

УДК: 524.382-56

ВЛИЯНИЕ ЗАКОНА ПОТЕМНЕНИЯ ДИСКА ЗВЕЗДЫ К КРАЮ НА ВЕРОЯТНОСТИ ОТКРЫТИЯ РАЗДЕЛЕННЫХ ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД КАК ЗАТМЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

О.В.ЕРЕТНОВА¹, М.А.СВЕЧНИКОВ², М.А.ЭБЕЛЬ¹

Поступила 20 июня 2005

Принята к печати 14 ноября 2005

Для разделенных тесных двойных звезд (тип РГП) вычислены вероятности открытия как затменных переменных в зависимости от массы главной компоненты, отношения масс, большой полуоси и угла наклона орбиты. Рассматривается случай полного потемнения диска звезды к краю (гипотеза "D"). Проведено сравнение с результатами, полученными ранее для равномерно ярких дисков звезд (гипотеза "U"). На основе данных Каталога приближенных фотометрических и абсолютных элементов затменных переменных звезд Свечникова и Кузнецовой оценена пространственная плотность в окрестностях Солнца звезд этого типа, которая оказалась равной $\approx 460 \cdot 10^{-6} \text{ пк}^{-3}$.

1. *Введение.* Для оценки истинной численности тесных двойных звезд (ТДЗ) необходим учет эффектов наблюдательной селекции, а именно знание вероятности открытия ТДЗ как затменных переменных. В работах [1,2] была оценена вероятность открытия разделенных ТДЗ, обе компоненты которых принадлежат Главной последовательности (тип РГП согласно классификации Свечникова [3]) как затменных переменных при массовых фотографических наблюдениях для случая равномерно ярких дисков звезд (гипотеза "U"). В этой гипотезе видимые диски звезд имеют одинаковую яркость на краях и в центре. Однако данная гипотеза наиболее хорошо применима только для звезд ранних спектральных классов. Целью данной работы является оценка вероятности открытия ТДЗ типа РГП как затменных переменных для случая полного потемнения диска звезды к краю (гипотеза "D") в зависимости от большой полуоси их орбиты A , массы главной компоненты M_1 , отношения масс компонент q и угла наклона орбиты i . В случае гипотезы "D" закон потемнения диска звезды к краю $I = I_0(1 + \cos\omega)$, где I_0 - яркость в центре диска, ω - угол между направлением из центра звезды на Землю и направлением из центра звезды на выбранный элемент ее поверхности.

Большинство затменных переменных звезд, приведенных в Общем каталоге переменных звезд [4], открыто при массовых фотографических наблюдениях путем сравнения небольшого числа (3-4) пар фотографи-

ческих пластинок. Полная вероятность открытия ТДЗ как затменной переменной при сравнении двух фотографических пластинок, полученных в произвольные моменты времени t_1 и t_2 , равна $W = W_1 \cdot W_2$. Здесь W_1 - геометрическая вероятность открытия затменной переменной, т.е. вероятность того, что плоскость орбиты ТДЗ будет ориентирована по отношению к наблюдателю таким образом, чтобы имели место затмения глубиной, большей, чем "порог обнаружения" Δm_{min} при фотографических наблюдениях. W_2 - вероятность обнаружения при сравнении двух фотографических пластинок переменности блеска двойной звезды с амплитудой главного минимума $A_1 \geq \Delta m_{min}$ при данной ориентации орбиты. Величина W_2 зависит от формы кривой блеска затменной переменной, амплитуд обоих минимумов A_1 и A_2 и от средней звездной величины переменной звезды.

2. Геометрическая вероятность. Геометрическая вероятность W_1 открытия ТДЗ как затменной переменной может быть оценена следующим образом. Рассмотрим систему, состоящую из двух сферических звезд с радиусами R_1 и R_2 , движущихся относительно друг друга по круговой орбите с радиусом A (рис.1).

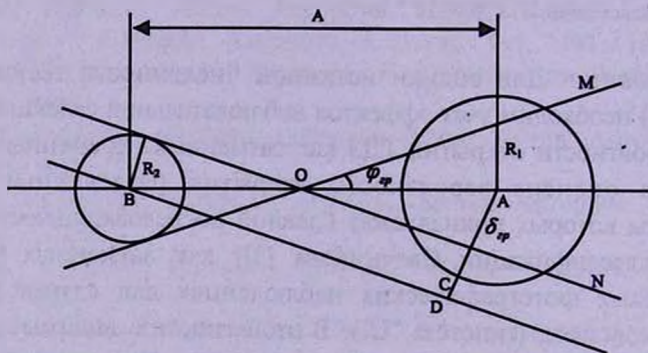


Рис.1. Оценка геометрической вероятности открытия ТДЗ как затменных переменных.

Для внешнего наблюдателя, находящегося на очень большом удалении от системы, будут иметь место периодические затмения, если относительное расстояние δ между проекциями центров компонент на картинную плоскость окажется меньше, чем $r_1 + r_2 = (R_1 + R_2)/A$. Однако при δ , незначительно меньших $r_1 + r_2$, глубины затмений окажутся очень малыми - ниже порогового значения Δm_{min} , при котором можно обнаружить переменность звезды при сравнении пары фотографических пластинок. В этом случае, даже при наблюдении данной системы на одной пластинке вне затмения, а на другой - в середине главного минимума, мы не сможем обнаружить ее переменности. Минимальное значение Δm_{min} при массовых фотографических наблюдениях составляет $0^m.2 - 0^m.35$ [5]. В дальнейших расчетах будем принимать $\Delta m_{min} = 0^m.25$.

Обозначим через δ_{φ} то граничное значение δ , при котором глубина главного минимума будет равна $\Delta m_{\min}$. Найдем связь между δ_{φ} и W_1 . Допустим, что наблюдатель находится на поверхности сферы с очень большим радиусом (по сравнению с AB) с центром в точке O . Затмения с амплитудой $A_1 \geq \Delta m_{\min}$ будут видны наблюдателю, находящемуся на поверхности шарового пояса, вырезаемого на сфере при вращении семейством конусов MON с углом раствора $\varphi_{\varphi} = 90^\circ - i_{\varphi}$, где i_{φ} - граничное значение угла наклона орбиты, при котором главный минимум имеет глубину, равную $\Delta m_{\min}$. Следовательно, W_1 - есть отношение площади указанного выше шарового пояса к площади всей сферы: $W_1 = \sin \varphi_{\varphi} = \cos i_{\varphi}$. Из подобных треугольников AOC и BAD получаем $W_1 = \delta_{\varphi}$, и, представив δ_{φ} в виде $\delta_{\varphi} = (R_1 + R_2 \cdot p_{\varphi})/A$, где p_{φ} - геометрическая глубина затмения для $\varphi = \varphi_{\varphi}$, имеем $W_1 = (R_1 + R_2 \cdot p_{\varphi})/A$. Физический смысл геометрической глубины затмения p таков: если затмевается малая звезда, то p равно отношению расстояния от центра затмеваемой звезды до ближайшей точки затмеваемой звезды к радиусу затмеваемой звезды ($p = (\delta - r_1)/r_2$). В начале затмения, в момент первого контакта, $\delta = r_1 + r_2$ и $p = 1$. В начале же полной фазы затмения, когда происходит второй контакт и малая звезда полностью заходит за большую, $\delta = r_1 - r_2$ и $p = -1$. В момент, когда центры дисков звезд совпадают, $\delta = 0$ и $p = -r_1/r_2 = -1/k$.

Поскольку эмпирическая зависимость масса (M) - радиус (R) для звезд Главной последовательности имеет вид (согласно [6]):

$$\log M = \begin{cases} 1.534 \cdot \log R - 0.147, & \log M > 0.14, \\ 0.971 \cdot \log R - 0.098, & \log M \leq 0.14, \end{cases} \quad (1)$$

то для систем типа РГП, у которых обе компоненты являются звездами Главной последовательности, и, следовательно, более массивная компонента является большей по размерам,

$$W_1 = \begin{cases} 1.247 \cdot M_1^{0.652} (1 + q^{0.652} p_{\varphi}) A^{-1}, & \log M_1 \geq \log M_2 \geq 0.14, \\ 1.247 \cdot M_1^{0.652} + 1.262 \cdot p_{\varphi} M_2^{1.03} A^{-1}, & \log M_1 \geq 0.14 > \log M_2, \\ 1.262 \cdot M_1^{1.03} (1 + q^{1.03} p_{\varphi}) A^{-1}, & 0.14 > \log M_1 \geq \log M_2. \end{cases} \quad (2)$$

Геометрическая глубина затмения p_{φ} является функцией от отношения радиусов компонент k и фотометрической фазы затмения α : $p_{\varphi} = p(k, \alpha_{\varphi})$. Отношение радиусов компонент $k = r_2/r_1 = R_2/R_1$ может быть найдено, используя формулу (1), из соотношений:

$$k = \begin{cases} q^{0.652}, & \log M_1 \geq \log M_2 \geq 0.14, \\ 1.012 \cdot \frac{M_2^{1.03}}{M_1^{0.652}}, & \log M_1 \geq 0.14 > \log M_2, \\ q^{1.03}, & 0.14 > \log M_1 \geq \log M_2. \end{cases} \quad (3)$$

У РГП - систем в главном минимуме затмение типа $M \rightarrow B$ (малая звезда затмевает большую), и при определенных углах наклона орбиты возможны кольцеобразные затмения (прохождения). Вторичный минимум, соответствующий затмению типа $B \rightarrow M$, менее глубокий, т.к. величина W_1 определяется более глубоким минимумом, при вычислении геометрической глубины затмения будем рассматривать затмение типа $M \rightarrow B$.

Малая звезда после второго контакта (в момент внутреннего касания дисков) будет последовательно закрывать от нас различные части диска большой, которая, согласно гипотезе "D", потемнена к краю неравномерно. Поэтому после начала кольцевой фазы блеск системы продолжает изменяться, достигая наименьшей величины только при наименьшем расстоянии между центрами дисков. Итак, общий ход затмения такой: начиная с момента первого контакта, блеск системы ослабевает. После второго контакта, когда затмевающая малая звезда целиком проецируется на большой диск затмеваемой звезды, ослабление блеска продолжается. Период постоянной фазы отсутствует. После того, как пройдет момент наибольшего приближения центров дисков друг к другу, т.е. после наибольшей фазы затмения, блеск начинает возрастать, и после последнего контакта снова наступает период максимального блеска.

Фотометрической фазой затмения называют отношение потери блеска в данный момент к потере блеска в момент внутреннего касания дисков [7]. Обозначим через L_D величину потери блеска системы при данных значениях геометрической глубины затмения p и отношения радиусов компонент k . Через L_{DA} обозначим потерю блеска системы в момент внутреннего касания дисков. Тогда фотометрическая фаза затмения выражается формулой:

$$\alpha = \frac{L_D}{L_{DA}} = \frac{\iint_{\Omega} I(\omega) d\sigma}{\iint_{\Omega_1} I(\omega) d\sigma}, \quad (4)$$

где Ω - область интегрирования, соответствующая затемненной части большой звезды при данном расстоянии между центрами δ , т.е. при данных p и k , Ω_1 - область интегрирования, распространенная по поверхности диска большой звезды, закрытой малой, I - яркость единицы поверхности диска звезды, а ω - угол между направлением из центра звезды на Землю и направлением из центра звезды на выбранный элемент ее поверхности $d\sigma$.

Тогда, используя закон потемнения диска звезды к краю, можно записать следующее:

$$L_D = I_0 \iint_{\Omega} \cos \omega d\sigma \quad \text{и} \quad L_{DA} = I_0 \iint_{\Omega_1} \cos \omega d\sigma. \quad (5)$$

Обозначим наибольшую возможную фотометрическую фазу затмения при данном значении k через α_M ($\alpha_M > 1$). Она осуществляется при совпадении центров дисков звезд, т.е. когда диски располагаются для земного наблюдателя концентрически. По определению, если мы обозначим через L_{DM} соответствующую этому расположению потерю блеска, а через L_{DA} - потерю блеска в момент внутреннего касания, то

$$\alpha_M = \frac{L_{DM}}{L_{DA}}. \quad (6)$$

Деля (4) на (6), получим:

$$\frac{\alpha}{\alpha_M} = \frac{L_D}{L_{DM}} = \frac{L_D}{L_1} \cdot \frac{L_1}{L_{DM}}, \quad (7)$$

где L_1 - блеск большой звезды.

Как упоминалось ранее, $\Delta m_{min} = 0^m.25$. Соответствующий этому граничному значению блеск системы L_{sp} :

$$-2.5 \cdot \log L_{sp} = 0^m.25.$$

Тогда

$$L_D = 1 - L_{sp} = 1 - 10^{-0.1} = 0.2057.$$

Потеря блеска при совпадении центров дисков звезд L_{DM} выражается следующим интегралом:

$$L_{DM} = I_0 \iint_{\Omega} \cos \omega d\sigma,$$

где Ω - область интегрирования, распространенная по всей поверхности диска большой звезды, закрытой малой. Переходя к вычислению этого интеграла в полярных координатах, начало которых находится в совпадающем центре дисков звезд, имеем:

$$L_{DM} = I_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_2} \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^2} \rho d\rho = \frac{2}{3} \pi I_0 r_1^2 \left(1 - (1 - k^2)^{3/2}\right). \quad (8)$$

Блеск большой звезды L_1 выражается следующим образом:

$$L_1 = I_0 \iint_{\Omega_1} \cos \omega d\sigma,$$

где Ω_1 - область интегрирования, распространенная по всей поверхности диска большой звезды. Тогда

$$L_1 = I_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^2} \rho d\rho = \frac{2}{3} \pi I_0 r_1^2.$$

Отношение L_1/L_{DM} , как нетрудно убедиться, равно:

$$\frac{L_1}{L_{DM}} = \frac{1}{1 - (1 - k^2)^{3/2}}. \quad (9)$$

Так как $\alpha_M = 1 + A(k)$, где $A(k)$ - функция, зависящая только от отношения радиусов звезд и табулированная для различных значений k в работе [7], то, подставляя эти выражения в (7):

$$\frac{\alpha_{\varphi}}{1 + A(k)} = \frac{0.2057}{L_1} \cdot \frac{1}{1 - (1 - k^2)^{3/2}}.$$

Значит, окончательное выражение для фотометрической фазы затмения примет следующий вид:

$$\alpha_{\varphi} = \frac{0.2057(1 + A(k))}{L_1(1 - (1 - k^2)^{3/2})}. \quad (10)$$

Величину L_1 можно найти следующим образом. Отношение поверхностных яркостей J_1 и J_2 компонент (считая их излучение чернотельным) равно:

$$\gamma = \frac{J_1}{J_2} = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{e^{c_2/\lambda T_2} - 1}{e^{c_2/\lambda T_1} - 1},$$

где T_1, T_2 - эффективные температуры компонент ТДЗ; λ - длина волны, на которой наблюдается звезда; $c_2 = hc/k = 1.43883 \text{ см/град} \dots$

Обе компоненты РГП-систем удовлетворяют эмпирическому соотношению масса (M) - эффективная температура (T_{φ}) для звезд Главной последовательности. Для звезд, более ранних, чем М0 (т.е. практически для компонент всех наблюдаемых систем типа РГП), из [6]:

$$\log M = 1504 \cdot \log T_{\varphi} - 5598,$$

откуда $T_{\varphi} = 5275 \cdot M^{0.665}$. Для $\lambda \approx 5400 \text{ \AA}$ получим

$$\gamma = \frac{e^{5.051 M_2^{-0.665}} - 1}{e^{5.051 M_1^{-0.665}} - 1}.$$

Зная γ , легко найдем L_1 из соотношения $L_1/L_2 = \gamma/k^2$ и $L_1 + L_2 = 1$ при различных значениях M_1 и M_2 :

$$L_1 = \begin{cases} \frac{\gamma}{\gamma + q^{1.304}}, & \log M_1 \geq \log M_2 \geq 0.14, \\ \frac{\gamma}{\gamma + 1.024 \frac{M_2^{2.06}}{M_1^{1.304}}}, & \log M_1 \geq 0.14 \geq \log M_2, \\ \frac{\gamma}{\gamma + q^{2.06}}, & 0.14 \geq \log M_1 \geq \log M_2. \end{cases} \quad (11)$$

Теперь найдем α_{φ} и затем (по таблицам Цесевича [7]) определим

$p_{sp} = p(k, \alpha_{sp})$. Затем по формуле (2) определим геометрическую вероятность.

3. *Фотометрическая вероятность.* Вероятность W_2 определим следующим образом. Пусть в момент первого наблюдения t_1 (которому соответствует фазовый угол θ_1) блеск переменной звезды соответствует $m(\theta_1)$, а в момент второго наблюдения t_2 (с фазовым углом θ_2) блеск ее соответствует $m(\theta_2)$. При сравнении одной пары пластинок, полученных в произвольные моменты t_1 и t_2 , разность блеска звезды соответствует $\Delta m = m(\theta_1) - m(\theta_2)$ и при $\Delta m \geq \Delta m_{min}$ возможно обнаружение ее с вероятностью $F(\Delta m, \bar{m})$ (где вид функции F зависит от способа открытия переменной звезды, внимательности наблюдателя и ряда других субъективных факторов). Согласно Плауту [5], для сравнительно ярких звезд ($\bar{m} \leq 15^m$), для которых мы, в основном, проводим статистические исследования, зависимость от $\bar{m}$ очень слабая, а зависимость F от Δm может быть представлена приближенно в виде:

$$F(\Delta m) = \begin{cases} 0, & \Delta m \leq 0^m.25, \\ -0.04 + 0.5\Delta m, & 0^m.25 \leq \Delta m \leq 1^m.7, \\ \approx 0.83, & \Delta m \geq 1^m.7. \end{cases} \quad (12)$$

Величина Δm при данных значениях θ_1 и θ_2 определяется формой кривой блеска и глубинами минимумов; она зависит от физических параметров компонент системы, размеров и угла наклона орбиты: $\Delta m = \Delta m(M_1, q, A, i)$. Δm определяется следующим образом:

$$m = -2.5 \log L + m_0,$$

где L - блеск системы в данный момент времени.

Блеск системы L в случае затмения типа $B \rightarrow M$ выражается формулой:

$$L = 1 - \alpha L_2 = 1 - \alpha(1 - L_1),$$

а в случае затмения типа $M \rightarrow B$ (используя (7) и (9)):

$$L = 1 - L_D = 1 - \alpha \frac{L_1}{1 + A(k)} \left[1 - (1 - k^2)^{3/2} \right].$$

В дальнейшем нам необходимо осуществить моделирование кривой блеска звезды. Различные участки кривой блеска соответствуют определенным типам затмений. Всего их может быть четыре:

1. Полное затмение ($\alpha = 1$, $-1/k \leq p \leq -1$);
2. Частные фазы полного затмения ($0 < \alpha < 1$, $-1 < p \leq -1$);
3. Кольцевое затмение ($\alpha \geq 1$, $-1/k \leq p \leq -1$);
4. Частные фазы кольцевого затмения ($0 < \alpha < 1$, $-1 < p \leq -1$).

Основная проблема опять же заключается в нахождении фотометрической фазы. Остановимся на этом подробнее.

Прежде всего, рассмотрим частные фазы полного затмения, то

есть когда закрывается малая звезда, заходя за большую. Воспользуемся формулами (5) для нахождения α .

Второй интеграл находится без труда в полярных координатах, начало которых находится в центре диска малой звезды:

$$L_{DA} = I_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{r_2}\right)^2} \rho d\rho d\varphi = \frac{2}{3} \pi I_0 r_2^2. \quad (13)$$

Нахождение L_D сводится к определению интеграла:

$$L_D = I_0 \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_2^2}} dx dy,$$

где область интегрирования определяется следующими условиями: по переменной x интегрируем в постоянных пределах от $\delta - r_1$ до r_2 , а по переменной y интегрируем от $y_0 = -\sqrt{r_1^2 - (x - \delta)^2}$ до $y_1 = +\sqrt{r_1^2 - (x - \delta)^2}$. Здесь $\delta = r_1 + r_2 \cdot p$, а геометрическую глубину затмения можно вычислить

по формуле $p = \frac{1}{r_2} \sqrt{1 - \sin^2 i \cos^2 \theta} - \frac{r_1}{r_2}$.

Таким образом, получим следующее:

$$L_D = 2 I_0 \int_{\delta - r_1}^{r_2} \int_0^{\sqrt{r_1^2 - (x - \delta)^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_2^2}} dx dy.$$

При вычислении этого интеграла были использованы специальные функции Вейерштрасса $\beta(u)$, $\zeta(u)$ и $\sigma(u)$. В работе [8] приведен окончательный результат для вычисления L_D :

$$\begin{aligned} \frac{L_D}{\gamma} = & \frac{\pi r_2^3}{6} + \frac{r_2^3}{3} \left\{ \left[E\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot [F^*(\varphi_2) - F^*(\varphi_1)] + [E^*(\varphi_2) - E^*(\varphi_1)] \cdot F\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} + \\ & + \frac{1}{6\sqrt{\delta r_1}} \left\{ [U\delta^3 + V\delta^2 + W\delta + X] F\left(\frac{\pi}{2}\right) - [Y\delta^3 + Z\delta] E\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{2 I_0}{r_2}, \quad U = -\frac{2}{3} r_1, \quad V = -\frac{10}{3} r_1^2, \quad W = \frac{8}{3} r_2^2 r_1 + r_2^3 - \frac{14}{3} r_1^3, \\ X = -r_2^4 + 4 r_2^2 r_1^2 - r_2^3 r_1 - 2 r_1^4, \quad Y = -\frac{4}{3} r_1, \quad Z = \frac{16}{3} r_2^2 r_1 - \frac{28}{3} r_1^3 \end{aligned}$$

и

$$\begin{cases} F^*(\varphi_i) = \int_0^{\varphi_i} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \chi^2 \sin^2(\psi)}}; & E^*(\varphi_i) = \int_0^{\varphi_i} \sqrt{1 - \chi^2 \sin^2(\psi)} d\psi, \\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2(\psi)}}; & E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K^2 \sin^2(\psi)} d\psi, \\ K^2 = 1 - \chi^2, \end{cases}$$

$F^*(\varphi_1)$ - эллиптический интеграл 1-го рода,

$E^*(\varphi_1)$ - эллиптический интеграл 2-го рода.

Вычисление эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода ищется в виде ряда по степеням χ ($\chi^2 < 1$) [9]. Чтобы найти углы φ_1 и φ_2 необходимо решить относительно них следующее:

$$\sin^2(\varphi_1) = \frac{2\delta}{\delta + r_1 + r_2}, \quad \sin^2(\varphi_2) = \frac{2r_1}{\delta + r_1 + r_2}.$$

Параметр χ^2 , или что то же самое $\sin^2\theta$, определяется из формулы

$$\chi^2 = 1 - K^2 = \sin^2\theta = \frac{(\delta + r_1)^2 - r_2^2}{4r_1\delta}.$$

Таким образом, задача о нахождении функций $\alpha = \alpha(p, k)$ для частных фотометрических фаз полного затмения полностью решена.

Задачу вычисления фотометрических фаз кольцеобразного затмения мы вынуждены разделить на две отдельные задачи. Именно, мы отдельно рассматриваем частные фазы затмения и его кольцевые фазы.

Как и раньше, мы определяем фотометрическую фазу затмения как отношение потери блеска в данный момент к той потере блеска, какую имела бы система в момент внутреннего касания дисков звезд. В данном случае этот момент знаменует конец частной фазы затмения и начало кольцеобразной его фазы.

Обозначим по-прежнему через L_D потерю блеска в данный момент, а через L_{DM} - потерю блеска в момент второго контакта. Хотя обозначения остаются прежними, но формулы, определяющие величины L_D и L_{DM} , а также их смысл изменяются. Из формулы (14) можно получить необходимое нам выражение для определения L_D , если заменить во всей совокупности формул величину r_1 величиной r_2 и наоборот.

Величина L_{DM} имеет совершенно отличный от прежнего вид. Потеря блеска L_{DM} равна блеску той части большой, затмеваемой звезды, которая закрыта диском малой звезды, при условии внутреннего касания дисков звезд. Данная величина выражается двойным интегралом, распространенным по затемненной части диска большой звезды. Задача решается в прямоугольных координатах, начало которых помещено в центре большой, затмеваемой звезды. Яркость элемента поверхности $d\sigma = dx \cdot dy$, находящегося на расстоянии ρ от начала координат, равна:

$$I(\omega) = I_0 \cos\omega = I_0 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_1^2}}.$$

Следовательно,

$$L_{DM} = I_0 \iint_{\Omega_1} \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_1^2}} dx dy.$$

В последнем интеграле область интегрирования определяется следующими условиями: по переменной y интегрирование ведется от $y_0 = -\sqrt{r_2^2 - (x - \delta)^2}$ до $y_1 = +\sqrt{r_2^2 - (x - \delta)^2}$ и по x от $x = r_1 - 2r_2$ до $x = r_1$. Замечая, что $\delta = r_1 - r_2$, получаем $y_0 = -\sqrt{(2r_2 - r_1 + x)(r_1 - x)}$ и $y_1 = +\sqrt{(2r_2 - r_1 + x)(r_1 - x)}$.

После вычисления получаем:

$$L_{DM} = \frac{r_1}{2I_0} \left(\frac{2}{3} r_1^3 \arcsin \sqrt{k} - \frac{\sqrt{r_1 - r_2} \sqrt{r_2}}{9} (6r_1^2 + 4r_1r_2 - 16r_2^2) \right). \quad (15)$$

Итак, мы теперь можем вычислить, зная величины L_D и L_{DM} , фотометрические фазы затмения α для частных фаз.

Для решения задачи о вычислении фаз α для кольцевых частей затмения вводят переменную q , связанную довольно простым соотношением с переменной величиной p :

$$q = -\frac{k(1+p)}{1-k}. \quad (16)$$

Величина q во время кольцевых фаз затмения пробегает, независимо от отношения радиусов звезд k , значения от нуля до единицы. При внутреннем касании дисков q равна нулю, в момент концентрического расположения дисков звезд она равна единице.

Обозначим через $\alpha_M = \alpha(1, k)$ наибольшую фотометрическую фазу, которая возможна при данном k . Ее нетрудно вычислить, она равна отношению максимальной возможной потери блеска L_{DM} (8) к потере блеска L_{DM} (15).

Введем новую функцию $X = X(q, k)$ при помощи выражения:

$$X(q, k) = \frac{\alpha(q, k) - 1}{\alpha(1, k) - 1}. \quad (17)$$

Отсюда находим функцию $\alpha(q, k)$:

$$\alpha(q, k) = 1 + X(q, k)(1 - \alpha(1, k)). \quad (18)$$

Функция $X = X(q, k)$ табулирована в работе [7]. Таким образом, интерполируя таблицы Цесевича, можно вычислить частные фазы α для кольцевых частей затмения.

Найдя $m(\theta_1)$ и $m(\theta_2)$, вычисляем $F(\Delta m) = F(\theta_1, \theta_2)$ по формуле (12). Затем определяем W_2 (при сравнении одной пары фотопластинок) по формуле:

$$W_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \quad (19)$$

Оценка W_2 выполнялась методом Монте-Карло. Для этого производилась выборка N независимых пар случайных чисел ξ_i, η_i , равномерно

распределенных в интервале $[0; 2\pi]$. Интеграл в (19) оценивался как

$$W_2 = F(\langle \xi, \eta \rangle) = \frac{1}{N} \sum_i F(\xi_i, \eta_i). \quad (20)$$

Объем выборки определяет точность оценки и должен быть достаточно большим. В нашей работе $N = 5000$.

Переход от $W_2(1)$ (сравнение одной пары фотопластинок) к $W_2(4)$ (сравнение четырех независимых пар фотопластинок) осуществлялся с помощью формулы

$$W(n) = 1 - [1 - W(1)]^n. \quad (21)$$

4. *Полная вероятность.* Полная вероятность открытия тесных двойных систем типа РГП как затменных переменных равна $W = W_1 \cdot W_2$. Так как в данной работе искомая вероятность рассматривается как функция от массы главной компоненты (M_1), большой полуоси орбиты

Таблица 1

ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ОТКРЫТИЯ $W(10^3)$ ДЛЯ ГИПОТЕЗЫ "D"

log A	log M_1										
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$q = 0.55 \quad i = 75^\circ$											
0.55	0.425										
0.65	0	0.466	1.395								
0.75	0	0	0.387	1.523	2.745						
0.85	0	0	0	0.420	1.004	1.968					
0.95	0	0	0	0	0	0.446	1.353	2.111			
1.05	0	0	0	0	0	0	0	0.715	1.666	2.628	
1.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.457
$q = 0.55 \quad i = 80^\circ$											
0.55	1.413										
0.65	0.737	1.464	1.978								
0.75	0	0.749	1.104	2.211	3.827						
0.85	0	0	0.523	1.233	1.869	2.764					
0.95	0	0	0	0.528	0.914	1.575	2.194	2.998			
1.05	0	0	0	0	0.325	0.659	0.980	1.669	2.619	3.416	
1.25	0	0	0	0	0	0	0	0.151	0.602	0.925	1.564
$q = 0.55 \quad i = 85^\circ$											
0.55	1.502										
0.65	0.973	1.607	2.075								
0.75	0.621	0.960	1.418	2.365	4.245						
0.85	0.345	0.629	0.822	1.461	2.781	3.447					
0.95	0.163	0.351	0.521	0.933	1.660	2.253	2.837	3.843			
1.05	0	0.172	0.263	0.537	0.888	1.251	1.765	2.339	3.020	4.171	
1.25	0	0	0	0.146	0.234	0.388	0.561	0.847	1.164	1.617	2.157
1.45	0	0	0	0	0	0	0.111	0.212	0.330	0.552	0.692

Таблица 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$q = 0.55 \quad i = 90^\circ$											
0.55	1.624										
0.65	1.081	1.601	2.171								
0.75	0.655	0.994	1.336	2.477	4.801						
0.85	0.395	0.667	0.853	1.589	2.814	3.639					
0.95	0.265	0.378	0.521	1.086	1.811	2.249	2.795	3.749			
1.05	0.162	0.260	0.331	0.634	1.122	1.552	1.847	2.466	3.182	4.198	
1.25	0.059	0.095	0.136	0.242	0.473	0.545	0.773	1.091	1.356	1.789	2.090
1.45	0.031	0.051	0.053	0.103	0.179	0.231	0.280	0.391	0.570	0.685	0.948
$q = 0.65 \quad i = 75^\circ$											
0.55	1.449										
0.65	0	1.505	2.630								
0.75	0	0	1.184	2.440	3.287						
0.85	0	0	0	1.007	1.361	2.392					
0.95	0	0	0	0	0	0.775	1.591	2.583			
1.05	0	0	0	0	0	0	0.131	1.114	1.824		
1.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.376	0.825
$q = 0.65 \quad i = 80^\circ$											
0.55	2.443										
0.65	1.270	2.307	3.365								
0.75	0.550	1.192	1.803	3.298	4.230						
0.85	0	0.469	0.899	1.813	2.285	3.332					
0.95	0	0	0.402	0.901	1.286	1.828	2.616	3.765			
1.05	0	0	0	0.362	0.426	0.794	1.361	2.050	2.797		
1.25	0	0	0	0	0	0	0	0.282	0.726	1.160	1.848
1.45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.232
$q = 0.65 \quad i = 85^\circ$											
0.55	2.874										
0.65	1.718	2.829	3.688								
0.75	1.054	1.806	2.396	3.837	5.598						
0.85	0.612	0.969	1.411	2.443	3.244	4.216					
0.95	0.263	0.512	0.821	1.484	2.174	2.477	4.128	5.610			
1.05	0.127	0.313	0.494	0.850	1.196	1.562	2.296	3.334	4.750		
1.25	0	0	0.107	0.227	0.291	0.464	0.643	0.946	1.704	2.371	3.440
1.45	0	0	0	0	0	0.049	0.177	0.279	0.408	0.681	1.153
$q = 0.65 \quad i = 90^\circ$											
0.55	3.050										
0.65	1.870	3.019	4.055								
0.75	1.128	1.936	2.611	4.074	5.407						
0.85	0.701	1.126	1.450	2.664	3.586	4.522					
0.95	0.499	0.755	0.991	1.669	2.327	2.853	4.258	5.946			
1.05	0.315	0.456	0.663	1.055	1.340	1.881	2.973	3.782	5.610		
1.25	0.142	0.182	0.263	0.452	0.539	0.634	1.152	1.608	2.314	3.001	3.706
1.45	0.047	0.062	0.084	0.168	0.243	0.326	0.462	0.622	0.898	1.239	1.788

Таблица 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$q = 0.75 \quad i = 75^\circ$											
0.55	1.981										
0.65	0.623	1.988	3.433								
0.75	0	0.457	1.541	2.220							
0.85	0	0	0.347	0.740	1.524	2.460					
0.95	0	0	0	0	0	0.946	1.822	3.250			
1.05	0	0	0	0	0	0	0.419	1.278	2.082		
1.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.652	1.130
$Q = 0.75 \quad i = 80^\circ$											
0.55	2.994										
0.65	1.735	2.979	4.403								
0.75	0.706	1.529	2.665	3.129							
0.85	0	0.768	1.202	1.792	2.554	4.675					
0.95	0	0	0.455	0.763	1.253	1.880	3.706	5.559			
1.05	0	0	0	0.147	0.543	0.945	1.424	3.021	4.534		
1.25	0	0	0	0	0	0	0	0.411	0.847	1.745	2.941
1.45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.275
$q = 0.75 \quad i = 85^\circ$											
0.55	4.094										
0.65	2.589	3.961	5.841								
0.75	1.456	2.423	3.909	5.269							
0.85	0.848	1.446	2.031	3.044	4.301	6.247					
0.95	0.405	0.766	1.107	1.744	2.721	3.761	5.504	7.433			
1.05	0.200	0.387	0.606	0.846	1.474	2.166	3.179	4.357	6.367		
1.25	0	0	0.140	0.206	0.304	0.504	0.958	1.483	2.318	3.293	4.384
1.45	0	0	0	0	0	0.069	0.148	0.304	0.611	1.022	1.440
$q = 0.75 \quad i = 90^\circ$											
0.55	4.570										
0.65	2.796	4.237	6.509								
0.75	1.740	2.552	4.172	6.395							
0.85	1.125	1.699	2.750	3.807	5.131	6.873					
0.95	0.763	1.001	1.561	2.655	3.552	4.310	5.935	7.605			
1.05	0.447	0.572	1.250	1.639	2.179	2.982	3.905	5.252	6.843		
1.25	0.155	0.251	0.388	0.675	0.843	1.249	1.616	1.997	2.907	3.803	4.799
1.45	0.066	0.133	0.182	0.261	0.398	0.458	0.679	0.908	1.156	1.562	2.069
$q = 0.85 \quad i = 75^\circ$											
0.55	2.319										
0.65	0.779	2.250	4.685								
0.75	0	0.768	1.638	1.945							
0.85	0	0	0.555	0.641	1.553	3.600					
0.95	0	0	0	0	0	0.949	2.452				
1.05	0	0	0	0	0	0	0.383	1.327	3.593		
1.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.210	1.449
$q = 0.85 \quad i = 80^\circ$											
0.55	3.949										
0.65	1.726	4.600	6.473								
0.75	0.810	2.008	3.614	4.656							

Таблица 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.85	0.185	0.831	1.661	2.299	3.627	5.518					
0.95	0	0.141	0.600	0.812	1.713	2.877	4.637				
1.05	0	0	0.072	0.104	0.565	1.271	2.168	3.571	5.500		
1.25	0	0	0	0	0	0	0	0.397	1.265	2.221	3.457
1.45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.396
$q = 0.85 \quad i = 85^\circ$											
0.55	6.026										
0.65	3.560	6.146	8.074								
0.75	1.977	3.753	4.889	6.313							
0.85	1.116	2.125	3.002	3.736	5.364	7.118					
0.95	0.452	1.151	1.747	2.287	3.202	4.355	5.695				
1.05	0.223	0.491	0.888	1.207	1.953	2.724	3.700	4.780	6.782		
1.25	0	0.039	0.142	0.207	0.446	0.809	1.205	1.748	2.614	3.553	4.962
1.45	0	0	0	0	0	0.076	0.190	0.446	0.761	1.160	1.630
$q = 0.85 \quad i = 90^\circ$											
0.55	6.535										
0.65	4.352	6.734	8.768								
0.75	2.768	4.302	5.413	7.039							
0.85	1.737	2.837	3.598	4.516	6.073	7.714					
0.95	1.051	1.856	2.468	2.839	3.774	4.951	7.072				
1.05	0.707	1.167	1.552	1.868	2.515	3.391	4.474	6.019	7.736		
1.25	0.300	0.417	0.650	0.715	1.049	1.520	1.887	2.446	3.262	4.152	5.787
1.45	0.125	0.201	0.261	0.309	0.458	0.583	0.765	1.044	1.398	1.737	2.364
$q = 0.95 \quad i = 75^\circ$											
0.55	3.267										
0.65	0.666	3.396	4.513								
0.75	0	0.696	1.414	3.430							
0.85	0	0	0	0.517	2.392	4.311					
0.95	0	0	0	0	0	1.358	3.174				
1.05	0	0	0	0	0	0	0.421	2.204	4.336		
1.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.238	2.204
$q = 0.95 \quad i = 80^\circ$											
0.55	5.339										
0.65	2.832	5.601	6.311								
0.75	1.163	2.944	3.456	5.300							
0.85	0.114	1.209	1.652	2.800	4.250	6.182					
0.95	0	0.127	0.307	1.236	2.202	3.471	4.932				
1.05	0	0	0	0	0.705	1.611	2.690	4.196	6.187		
1.25	0	0	0	0	0	0	0	0.693	1.598	2.503	4.095
1.45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.638
$q = 0.95 \quad i = 85^\circ$											
0.55	6.534										
0.65	4.233	7.005	7.850								
0.75	2.590	4.222	4.734	6.975							
0.85	1.429	2.442	2.873	4.195	4.954	7.922					
0.95	0.742	1.345	1.623	2.254	3.457	4.830	6.549				
1.05	0.285	0.755	0.870	1.381	2.097	2.849	3.916	5.675	7.616		

Таблица 1 (окончание)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.25	0	0.029	0.071	0.338	0.574	0.917	1.350	1.947	2.791	3.913	5.413
1.45	0	0	0	0	0	0.066	0.307	0.563	0.842	1.282	1.844
$q = 0.95 \quad i = 90^\circ$											
0.55	7.521										
0.65	5.144	7.922	8.830								
0.75	3.088	5.030	5.909	7.860							
0.85	2.192	3.228	3.582	5.313	6.642	8.473					
0.95	1.335	2.046	2.518	3.205	4.392	5.656	7.608				
1.05	0.791	1.387	1.601	2.019	2.627	3.849	4.466	6.608	8.350		
1.25	0.321	0.555	0.590	0.858	1.198	1.530	2.115	2.809	3.516	4.702	6.228
1.45	0.132	0.230	0.232	0.389	0.443	0.670	0.816	1.143	1.500	1.970	2.667

(А), отношения масс компонент (q) и угла наклона орбиты (i), то в качестве исходных данных использовались следующие величины:

- 1) отношение масс компонент: $q = 0.45, 0.55, K, 0.95$;
- 2) логарифм массы главной компоненты: $\log M_1 = 0.0, 0.1, K, 1.0$;
- 3) логарифм большой полуоси орбиты: $\log A = 0.55, 0.65, K, 1.45$;
- 4) угол наклона орбиты: $i = 75^\circ, 80^\circ, 85^\circ, 90^\circ$.

Масса главной компоненты и большая полуось орбиты измеряются в солнечных единицах.

Полученные результаты представлены в виде табл.1. Как видно из таблицы, с уменьшением угла наклона орбиты i и увеличением большой полуоси орбиты A вероятности открытия W ТДЗ типа РГП быстро убывают. Причем, зависимость W от большой полуоси орбиты более сильная. При малых углах наклона орбиты i вероятности открытия даже при небольших A равны нулю.

Также представлен график сравнения полной вероятности открытия разделенных ТДЗ для "U" и "D" гипотез (рис.2). Из рис.2 следует, что полная вероятность открытия ТДЗ данного типа для "D" гипотезы меньше, чем для "U", хотя отличие не очень существенно. Это объясняется следующими причинами: 1) Для наблюдения затмения необходимо, чтобы диски звезд перекрывались настолько, что разность в блеске компонент была равна порогу обнаружения. Так как яркость звезды к краю диска в гипотезе "D" меньше, то доля затмеваемой поверхности для достижения порога обнаружения здесь должна быть больше, чем в гипотезе "U". А это ведет к уменьшению геометрической вероятности открытия; 2) Для гипотезы "D" в случае затмения $M \rightarrow B$, которое соответствует главному минимуму для разделенных ТДЗ, после второго контакта блеск системы продолжает уменьшаться, и глубина затмения в этом случае будет больше, чем для "U" гипотезы. Поэтому разность глубин минимумов для "D"

гипотезы больше, чем для "U", и так как фотометрическая вероятность определяется разностью блеска затменной переменной звезды, то это

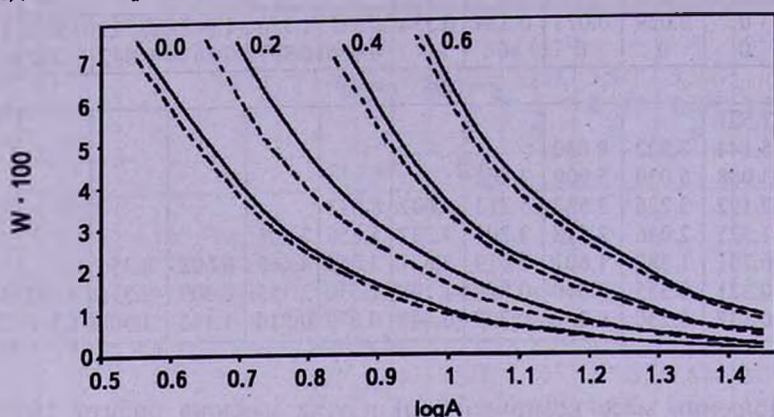


Рис.2. Сравнение вероятностей W открытия РГП-систем как затменных переменных в зависимости от массы главной компоненты M_1 и большой полуоси орбиты A при $q = 0.95$ и $i = 90^\circ$ для "D" гипотезы (пунктирная линия) и для "U" гипотезы (сплошная линия).

приведет к увеличению фотометрической вероятности открытия. 3) Фотометрическая вероятность определяется также формой кривой блеска, которая отличается в случае "U" и "D" гипотез.

5. Пространственная плотность РГП-систем. Исследование основано на материале Каталога приближенных фотометрических и абсолютных элементов затменных переменных звезд Свечникова и Кузнецовой [10]. Этот каталог включает сведения о 437 системах типа РГП, из которых 273 - системы с известными спектрами главных компонент Sp_1 . В данной работе рассматривались только такие системы.

При определении истинной численности ТДЗ необходимо вводить поправки, связанные с вероятностью обнаружения ТДЗ данного типа как затменных переменных звезд. Выше был изложен метод оценки вероятности открытия ТДЗ типа РГП как затменных переменных звезд в зависимости от большой полуоси их орбиты A , массы главной компоненты M_1 , отношения масс компонент q и угла наклона орбиты i . Однако в действительности вероятность открытия зависит и от звездной величины системы m_v , поэтому для слабых звезд эффекты селекции становятся более сложными. В связи с этим для систем с m_v больше некоторого граничного значения $m_{vгр}$ необходимо учитывать неполноту исследуемой выборки.

Полнота выборки может быть определена по подсчетам числа всех ТДЗ данного типа в 1 пк^3 , оцененного для различных значений объема $V(M'_1)$, который определяется массой главной компоненты M'_1 и принятым значением $m_{vгр}$.

Объем V_i определяется следующим образом. Для данного значения M'_i , используя зависимость масса - светимость для звезд Главной последовательности [6], можно оценить абсолютную болометрическую величину главной компоненты $M'_{i\text{bol}}$ и, при заданном значении $m_{\text{зр}}$, найти предельное расстояние $r'_{\text{зр}}$ из уравнения

$$M'_{\text{bol}} = m_{\text{зр}} + \Delta m'_{\text{bol}} + 5 - 5 \log r'_{\text{зр}} - \bar{A} r'_{\text{зр}}, \quad (22)$$

где $\bar{A} = 0.0019 \text{ пк}^{-1}$ - средняя величина межзвездного поглощения [11]; $M'_{\text{bol}} = M'_{i\text{bol}} - \Delta m'$ - абсолютная болометрическая величина системы в максимуме блеска ($\Delta m'$ - поправка для перехода от $M'_{i\text{bol}}$ к M'_{bol} ; в среднем для РГП-систем $\Delta m' = 0^m.48$ согласно [12]); $\Delta m'_{\text{bol}}$ - болометрическая поправка для звезд с $M'_{i\text{bol}}$, взятая из [13].

Зная $r'_{\text{зр}}$, объем V_i оцениваем как объем шарового слоя с радиусом $r'_{\text{зр}}$ и толщиной $h = 180 \text{ пк}$, поскольку, согласно [14], эффективная полутолщина плоской системы в Галактике, которую образуют ТДЗ, составляет $\approx 90 \text{ пк}$.

Чтобы оценить число РГП-систем в данном интервале масс главных компонент в единичном объеме пространства, необходимо знать расстояние до каждой системы. Расстояние до наблюдаемых ТДЗ типа РГП были вычислены по формуле (22). Далее, для каждой затменной системы (с $r \leq r_{\text{зр}}$) была определена вероятность открытия $W_i(M_i, A, q, i)$ путем последовательной линейной интерполяции по табл.1 и

найдена сумма всех $\sum_j \frac{1}{W_j} = N'_0$ в данном интервале изменения масс.

При этом из рассмотрения исключались системы, для которых вероятность $W_j < 0.001$, так как при столь малых значениях W_j могли возникнуть неточности в определении вероятности, приводящие к значениям N'_0 , очень сильно отличающимся от действительности. Полученное значение N'_0 делилось на объем пространства V_r в котором наблюдаются ТДЗ типа РГП с данными массами.

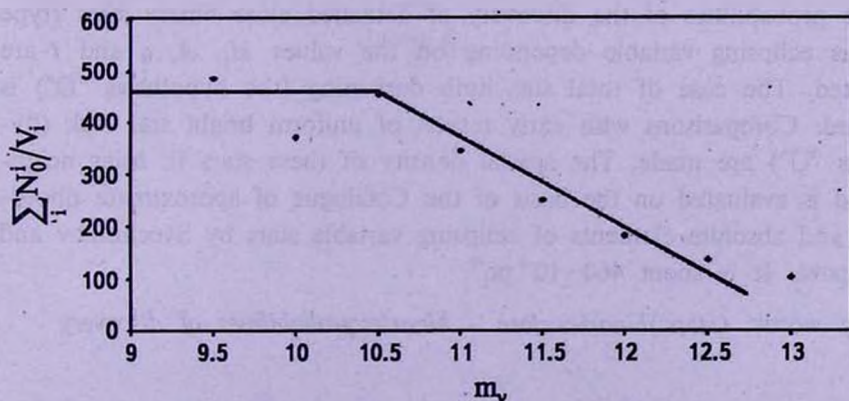


Рис.3. Численность РГП-систем в 1 пк^3 , подсчитанная для различных значений $m_{\text{зр}}$.

Зная суммарное количество ТДЗ в единичном объеме пространства $\sum_i \frac{N'_i}{V_i}$, получена зависимость пространственной плотности РГП-систем от звездной величины (рис.3). Из данной зависимости можно определить значение звездной величины, до которой выборка будет полной. В данном случае это соответствует $m_{\text{вр}} = 10^{\text{m}}.5$.

Полное число систем типа РГП в 1 пк^3 в однородном слое толщиной 180 пк в окрестностях Солнца составляет $\approx 460 \cdot 10^{-6}$, что близко к значению, полученному ранее по тому же наблюдательному материалу в работе [15] ($\approx 660 \cdot 10^{-6}$), где использовались вероятности открытия РГП-систем, оцененные для случая равномерно ярких дисков звезд. В случае полного потемнения диска звезды к краю вероятности открытия оказались немного меньше, что привело к увеличению числа систем, у которых $W_i < 0.001$. Следствием этого и является отличие в значении пространственной плотности РГП-систем для "U" и "D" гипотез.

¹ Челябинский государственный университет,
e-mail: eretnova@csu.ru

² Уральский государственный университет им. М.Горького, Россия

INFLUENCE OF STAR LIMB DARKENING LAW ON THE PROBABILITIES OF THE DISCOVERY OF DETACHED CLOSE BINARY STARS AS ECLIPSING VARIABLES

O.V.ERETNOVA¹, M.A.SVECHNIKOV², M.A.EBEL¹

The probabilities of the discovery of detached close binary stars (type DM) as eclipsing variable depending on the values M_i , A , q and i are calculated. The case of total star limb darkening (the hypothesis "D") is described. Comparisons with early results of uniform bright star disk (hypothesis "U") are made. The spatial density of these stars in solar neighborhood is evaluated on the basis of the Catalogue of approximate photometric and absolute elements of eclipsing variable stars by Svechnikov and Kuznetsova. It is about $460 \cdot 10^{-6} \text{ pc}^{-3}$.

Key words: (stars:)binaries:close - binaries:probabilities of discovery

ЛИТЕРАТУРА

1. *М.А.Свечников, О.В.Еретнова*, Астрономо-геодезические исследования, Екатеринбург, 75, 1991.
2. *М.А.Свечников, О.В.Еретнова, М.Н.Ольнева, Т.А.Тайдакова*, Научные информации, Зинатие, Рига, 67, 15, 1989.
3. *М.А.Свечников*, Каталог орбитальных элементов, масс и светимостей тесных двойных звезд, Изд. УрГУ, Иркутск, 1986, с.226.
4. *П.Н.Холопов*, Общий каталог переменных звезд, 4 изд., Наука, М., 1985.
5. *Н.Е.Курочкин*, Методы исследования переменных звезд, Наука, М., 1971.
6. *С.Ю.Горда, М.А.Свечников*, Астрон. ж., 76, 598, 1999.
7. "Затменные переменные звезды" Под ред. В.П.Цесевича, Наука, М., 352, 1971.
8. *В.П.Цесевич*, Методы исследования затменных переменных звезд, ОГИЗ: Гостехтеориздат, М.-Л., 3, 1947.
9. *Г.Б.Двайт*, Таблицы интегралов и другие математические формулы, Наука, М., 1983.
10. *М.А.Свечников, Э.Ф.Кузнецова*, Каталог приближенных фотометрических и абсолютных элементов затменных переменных звезд, Изд. УрГУ, Екатеринбург: 1, 2, 456, 1990.
11. *К.У.Аллен*, Астрофизические величины, Мир, М., 364, 1977.
12. *М.А.Свечников, Т.А.Тайдакова*, Бюл. Абастум. астрофиз. обсерв., 58, 305, 1985.
13. *D.M.Popper*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 18, 115, 1980.
14. *Л.Ф.Истомин*, Звездные скопления и двойные системы, Свердловск, 148, 1978.
15. *М.А.Свечников, Э.Ф.Кузнецова*, Астрономо-геодезические исследования, Свердловск, 81, 1988.