

УДК: 524.7

АНИЗОТРОПНЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ S-ЭЛЛИПСОИДЫ РИМАНА ВНУТРИ СФЕРОИДАЛЬНОГО ГАЛО. I

М.Г.АБРАМЯН

Поступила 24 марта 2005

Принята к печати 12 августа 2005

Обобщены классические S-эллипсоиды Римана с учетом феррерсовской неоднородности распределения массы, трехмерной анизотропии дисперсии скоростей и гравитации сфероидального гало. Феррерсова неоднородность не влияет на условия равновесия и устойчивости эллипсоидов, а лишь изменяет численные коэффициенты у равновесных параметров. Анизотропия дисперсии скоростей меняет как условия равновесия, так и критерии устойчивости эллипсоидов, расширяя или ограничивая области существования эллипсоидов. Гало расширяет эту область во всех случаях и стабилизирует эллипсоиды. В рамках неоднородной модели получены наблюдаемые в окрестностях Солнца дисперсии скоростей звезд.

1. *Введение.* Известно, что галактики состоят из ряда взаимопроникающих, вложенных друг в друга подсистем, которые характеризуются собственными полями скоростей, мерами сплюснутостей вдоль оси вращения, плотностями распределения их масс. Равновесие каждой подсистемы определяется не только силами собственной гравитации, давления и вращения, а также гравитацией других подсистем. Поэтому для детального астрофизического описания галактик нельзя обойти факт сложного неоднородного характера их распределения в фазовом пространстве. Однако из-за комплексности характера этой проблемы представляется целесообразным применение модельного подхода, учитывающего некоторые основные черты строения, динамики и кинематики галактики, но допускающего аналитическое рассмотрение проблемы до конца. В нулевом приближении галактику можно представить в виде вращающейся с угловой скоростью Ω сплошной гравитирующей среды с однородной плотностью распределения массы ρ и изотропным давлением. Это позволит применять к галактикам результаты классической теории фигур равновесия гравитирующей массы [1], согласно которой равновесие вращающейся массы возможно в виде сфероида Маклорена ($a_1 = a_2 \neq a_3$ - его полуоси) и трехосного эллипсоида Якоби. При этом существует критическое значение углового момента $L_c = 0.304$ (в единицах $(GM^3R)^{1/2}$, где $R = (a^2 a_3)^{1/3}$, M - масса) такое, что при $L < L_c$ единственно возможной фигурой равновесия

является сфероид Маклорена. При $L > L_c$ - равновесие возможно как в виде сфероида Маклорена, так и трехосного эллипсоида Якоби. Сфероид Маклорена становится динамически неустойчивым при $L > L_d = 0.509$, а эллипсоид Якоби неустойчив по отношению к грушеобразующим возмущениям и при $L \geq 0.39$ переходит к грушевидным фигурам. Для сфероидов Маклорена имеем [1]:

$$\frac{\Omega^2}{\pi \bar{G} \rho} = 2(A_1 - c^2 A_3) \equiv 2(1 - c^2) B_{13}, \quad (1)$$

где $c = a/a_3$ - отношение полуосей сфероида, а

$$A_{ik...} = \int_0^\infty \frac{a_1 a_2 a_3 ds}{\Delta^2(s) (a_i^2 + s) (a_k^2 + s) \dots}, \quad \Delta^2(s) = \prod_{j=1}^3 (a_j^2 + s), \quad B_{ik} = A_k - a_i^2 A_{ik} \quad (2)$$

- индексные символы Чандрасекара.

Применяя эти результаты к Галактике [2], для правой части (1) получаем значение 0.179. Учитывая, что в области Галактики $R \approx 10 - 15$ кпк угловая скорость вращения порядка $\Omega \approx 25 - 15$ км/с кпк, а плотность массы - $\rho \approx 7 \cdot 10^{-24}$ г/см³, для левой части (1) получаем оценку $\approx 0.161 - 0.473$. Однако результаты классической теории фигур явно противоречат наблюдениям в вопросах устойчивости сфероидов Маклорена. Согласно этой теории Галактика неустойчива по отношению к барообразующим возмущениям и должна была иметь бароподобную структуру. Численные эксперименты Пиблза и Острайкера показали [3], что этот результат имеет место и для бесстолкновительных гравитирующих систем, каковыми являются звездные системы типа галактик. Для стабилизации этой неустойчивости была высказана гипотеза о необходимости присутствия массивного гало у Галактики.

Стабилизирующее действие гало на барообразующие возмущения сфероидов Маклорена было установлено Абрамяном и Капланом [4], Абрамяном [5], практически одновременно с Пиблзом и Острайкером [3]. Обобщая классическую теорию фигур равновесия в рамках двухкомпонентной модели, ими были модифицированы критерии динамической и вековой неустойчивостей вложенных в сфероидальное гало фигур Маклорена (которые, кстати, в дальнейшем были "переоткрыты" рядом авторов [6,7]):

$$B_{11} - (1 - c^2) B_{13} + \frac{M_h}{M} c_h c^3 A_3^h = 0, \quad (3)$$

$$2 B_{11} - (1 - c^2) B_{13} + \frac{M_h}{M} c_h c (1 - (1/2 - c^2) A_3^h) = 0, \quad (4)$$

где M , M_h - массы сфероида и части гало, гравитационно действующей на вложенный сфероид, $c_h = a_{3h}/a_h$ - отношение полуосей гало. Уравнение (3) дает отношения полуосей вложенного сфероида бифуркации,

от которого ответвляются трехосные фигуры Якоби, а (4) - критическое значение c_d динамически устойчивого сфероида.

Учитывая, что для Галактики $c_G \approx 0.067$, легко оценить, что для стабилизации ее динамической и вековой неустойчивостей необходимо сферическое гало с массами $M_h \approx M$, $M_h \approx 200 M$ (!) соответственно. Положение практически не меняется, если вместо однородной вложенной подсистемы рассмотреть неоднородные подсистемы с политропным [8] или феррерсовым законами изменения плотности массы [9]:

$$\rho(x) = \rho_c \left(1 - \sum_{i=1}^3 x_i^2 / a_i^2 \right)^n, \quad (n \geq 0), \quad (5)$$

где ρ_c - центральная плотность, n - целое число, определяющее степень концентрации массы к центру системы. При этом вместо (1) получается уравнение, отличающееся от исходного лишь численным коэффициентом [9]:

$$\frac{\Omega^2}{\pi G \rho_c} = K_n (1 - c^2) B_{13}, \quad K_n = \frac{2^n}{n+1} \frac{(n+2)(n+3)\dots(2n+2)}{(2n+7)(2n+9)\dots(4n+5)}. \quad (6)$$

Поэтому учет неоднородности массы в рамках класса моделей (5) никак не влияет на критические сплюснутости динамически и секулярно устойчивых сфероидов Маклорена.

С другой стороны, наблюдения показывают, что дисперсия скоростей у галактик анизотропна [10]. В классической теории фигур равновесия гравитирующих масс фактор анизотропии давления впервые был учтен в работе [11], где в рамках биаксиальной анизотропии (дисперсия скоростей изотропна в плоскости вращения и отличается от дисперсии скоростей вдоль оси вращения сфероида: $\beta \equiv \sigma_1^2 / \sigma_3^2 \neq 1$) было показано, что существует критическое значение параметра анизотропии β_k , определяемое уравнением

$$B_{11} - A_1 - \beta_k c^2 A_3 = 0, \quad (7)$$

выше которого сфероидальные фигуры неустойчивы относительно к барообразующим колебаниям и переходят в трехосные эллипсоиды. Однако это значение β_k превосходит наблюдаемое отношение соответствующих дисперсий скоростей в нашей Галактике. Предположение о наличии массивного гало у Галактики тоже не разрешает проблему, так как, оказывается, гало не меняет критерий вековой неустойчивости анизотропного сфероида [12].

В более общей постановке классическая теория фигур равновесия вращающейся однородной, изотропной одиночной гравитирующей массы была построена Риманом [1].

Систематический учет влияния гало на равновесие и устойчивость классических эллипсоидальных фигур равновесия был проведен нами

в рамках теории вложенных фигур равновесия в работах [3,4,13-19]. В частности, в работах [17] были рассмотрены простейшие неоднородные модели S-эллипсоидов Римана с анизотропным давлением, где показаны видоизменения последовательностей самосопряженных эллипсоидов, а также свойств эллипсоидов Якоби, Дедекинда, Маклорена.

В настоящей работе будут обобщены S-эллипсоиды с учетом:

- гравитации сфероидального гало,
- неоднородности массы по закону (5),
- анизотропии дисперсии скоростей типа:

$$\sigma_i^2 = \sigma_{ic}^2 \left(1 - \sum_{j=1}^3 x_j^2 / a_j^2 \right)^m, \quad (m \geq 0), \quad (8)$$

где σ_{ic} - дисперсия скоростей вдоль i -той главной оси в центре эллипсоида.

2. *Основные уравнения равновесного состояния.* Рассмотрим гравитирующую массу с плотностью распределения по закону (5), которая вращается с угловой скоростью Ω вокруг главной оси X_3 . Во вращающейся системе отсчета, связанной с главными осями эллипсоида, вещество циркулирует с линейным полем скоростей:

$$u_i = Q_{ij} x_j, \quad Q_{ij} = -\lambda \Omega \varepsilon_{ij3} a_i / a_j, \quad (9)$$

где ε_{ijk} - тензор Леви-Чивита, λ - частота циркуляций вещества в единицах Ω .

Давление внутри эллипсоида будем считать имеющим тензорный характер, связанное с дисперсией скоростей (8) по закону

$$p_{ij} = \rho \sigma_i^2 \delta_{ij}. \quad (10)$$

Эллипсоид вложен в однородное сфероидальное гало с отношением полуосей c_h и с объемной плотностью массы ρ_h .

Тензорные уравнения вириала второго порядка для относительного равновесия вложенного эллипсоида имеют вид [1]

$$2T_{ij} + W_{ij} + W_{ij}^h + \Omega^2 (I_{ij} - \delta_{i3} I_{3j}) + 2\varepsilon_{ij3} \Omega \int_V \rho u_i x_j dV = -U_{ij}, \quad (11)$$

где

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int_V \rho u_i u_j dV = \frac{1}{2} Q_{jm} Q_{jn} I_{mn} \quad (12)$$

-тензор кинетической энергии внутренних циркуляций вещества,

$$W_{ij} = -K_n \pi G \rho_c A_i I_{ij}, \quad W_{ij}^h = -2\pi G \rho_h A_i^h I_{ij} \quad (13)$$

-тензоры собственной гравитационной энергии вложенного эллипсоида и его потенциальной энергии в поле гравитации гало ($A_1^h = A_2^h = 1 - (1/2)A_3^h$),

$$I_{ij} = \frac{M_n a_i^2}{2n+5} \delta_{ij} \quad (14)$$

-тензор момента инерции эллипсоида и

$$U_{ij} = \int_V \rho_{ij} dV = M_{n+m} \sigma_{ic}^2 \delta_{ij}, \quad (15)$$

где

$$M_k = 4\pi \rho_c \frac{a_1 a_2 a_3 2^k k!}{(2k+3)!!}. \quad (16)$$

С учетом (12)-(15) уравнение (11) дает

$$Q_{lm} Q_{jn} a_m^2 \delta_{mn} - (A_l + \kappa_n A_l^h) a_l^2 \delta_{lj} + \Omega^2 (a_l^2 \delta_{lj} - a_3^2 \delta_{3l}) + \\ + 2\Omega \varepsilon_{ll3} Q_{lm} a_m^2 \delta_{mj} = -(2n+5) \frac{M_{n+m} \sigma_{ic}^2}{K_n \pi G \rho_c M_n} \delta_{lj}. \quad (17)$$

Здесь и далее Ω^2 измеряется в единицах $K_n \pi G \rho_c$, и будут использованы обозначения

$$\kappa_n = 2\rho_h / K_n \rho_c, \quad b = a_2/a_1, \quad c = a_3/a_1. \quad (18)$$

С учетом (9) уравнения (17) в компонентах представим в виде

$$\Omega^2 (1 + \lambda^2) + 2\lambda \Omega^2 b = (A_1 + \kappa_n A^h) - (A_3 + \kappa_n A_3^h) c^2 \alpha, \quad (19)$$

$$\Omega^2 (1 + \lambda^2) b^2 + 2\lambda \Omega^2 b = (A_2 + \kappa_n A^h) b^2 - (A_3 + \kappa_n A_3^h) c^2 \beta, \quad (20)$$

$$(A_3 + \kappa_n A_3^h) c^2 = \frac{2n+5}{K_n \pi G \rho_c a_1^2} \frac{M_{n+m} \sigma_{3c}^2}{M_n}. \quad (21)$$

Здесь введены параметры анизотропии дисперсии скоростей модели:

$$\alpha = \sigma_{1c}^2 / \sigma_{3c}^2, \quad \beta = \sigma_{2c}^2 / \sigma_{3c}^2. \quad (22)$$

Из (19) и (20) следует

$$(1 + \lambda^2) \Omega^2 = B_{12} + \kappa_n A^h + (A_3 + \kappa_n A_3^h) \frac{c^2 (\beta - \alpha)}{1 - b^2} \equiv \Omega_J^2, \quad (23)$$

$$2\lambda \Omega^2 = a_1 a_2 A_{12} - (A_3 + \kappa_n A_3^h) \frac{c^2}{b} \frac{\alpha - b^2 \beta}{1 - b^2} \equiv J,$$

откуда для λ получаем уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda \Omega_J^2 / J + 1 = 0, \quad (24)$$

инвариантное относительно преобразования $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$, что соответствует теореме Дедекинда о сопряженных конфигурациях эллипсоидов [1].

Области возможных геометрий обобщенных S-эллипсоидов Римана в плоскости (b, c) получаются из условий действительности Ω и λ , которые из (23) дают:

$$\Omega_J^2 \geq |J|. \quad (25)$$

Классические S-эллипсоиды Римана в плоскости (b, c) ограничены сверху последовательностью самосопряженных эллипсоидов с отрицательной циркуляцией вещества $\lambda = -1$, а снизу - последовательностью самосопряженных эллипсоидов с положительной циркуляцией вещества

$\lambda = 1$. Эта область разделяется на две части ($\lambda < 0$ и $\lambda > 0$) последовательностью эллипсоидов Якоби ($\lambda = 0$). В рассматриваемом случае уравнениям последовательностей самосогласованных эллипсоидов $\lambda \neq 1$ соответствует равенство в (25) со знаками "-" и "+" соответственно:

$$B_{12} + a_1 a_2 A_{12} + \kappa_n A^h - (A_3 + \kappa_n A_3^h) \frac{c^2}{1+b} \left(\alpha + \frac{\beta}{b} \right) = 0, \quad (\lambda = -1), \quad (26)$$

$$B_{12} - a_1 a_2 A_{12} + \kappa_n A^h - (A_3 + \kappa_n A_3^h) \frac{c}{1-b} \left(\frac{\beta}{b} - \alpha \right) = 0, \quad (\lambda = +1). \quad (27)$$

Геометрия неоднородных и анизотропных вложенных эллипсоидов Якоби определяется уравнением $J = 0$:

$$a_1 a_2 A_{12} - (A_3 + \kappa_n A_3^h) \frac{c^2}{b} \frac{\alpha - b^2 \beta}{1 - b^2} = 0, \quad (\lambda = 0). \quad (28)$$

Угловая же скорость вращения эллипсоидов Якоби равна Ω_J и определяется через (23).

В общем случае частота внутренних циркуляций λ и угловая скорость вложенных анизотропных эллипсоидов определяются формулами

$$\lambda = \frac{\sqrt{\Omega_J^2 + J} - \sqrt{\Omega_J^2 - J}}{\sqrt{\Omega_J^2 + J} + \sqrt{\Omega_J^2 - J}}, \quad (29)$$

$$\Omega = \left(\sqrt{\Omega_J^2 + J} + \sqrt{\Omega_J^2 - J} \right) / 2. \quad (30)$$

Очевидно, угловые скорости эллипсоидов последовательностей $\lambda = \mp 1$ равны $\Omega_{J, \pm 1} / \sqrt{2}$, где в выражение (23) для Ω_J следует вставить решения уравнений (26) и (27).

3. *Области равновесных фигур в плоскости (α, β)* . Условия равновесия (19)-(21) ограничивают значения параметров анизотропии, что наглядно представляется графически в плоскости (α, β) . Так как область равновесных фигур ограничена последовательностями $\lambda = \mp 1$, то из (26) и (27) видно, что в рассматриваемой плоскости они изображаются прямыми, которые пересекают ось β в точках β_{-1} и β_{+1} , где

$$\beta_{\mp 1} = \frac{b(bA_2 \pm A_1) \pm \kappa_n A_3^h (1 \pm b)}{c^2 (A_3 + \kappa_n A_3^h)}, \quad \beta_0 = \frac{b^2 (A_2 - A_1)}{c^2 (A_3 + \kappa_n A_3^h)}. \quad (31)$$

Здесь приведена также координата β_0 точки пересечения последовательности Якоби с осью β . Все три прямые пересекаются в точке P с координатами (рис.1)

$$\alpha_P = \frac{(A_1 + \kappa_n A_3^h)}{(A_3 + \kappa_n A_3^h) c^2}, \quad \beta_P = \frac{(A_2 + \kappa_n A_3^h) b^2}{(A_3 + \kappa_n A_3^h) c^2}. \quad (32)$$

Из (31) и (32) видно, что $\beta_{-1} > \beta_P > \beta_0 > \beta_{+1}$. На графике рис.1а приведены области возможных значений α и β , необходимых для

равновесия одиночного (прерывистые линии) и вложенного внутри сферического гало с относительной плотностью κ_n (сплошные линии)

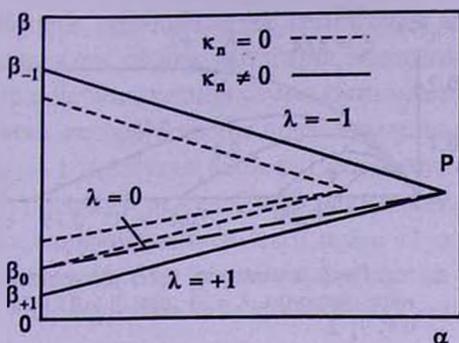


Рис. 1а. Области возможных значений α и β для одиночного (прерывистые линии) и вложенного внутри сферического гало с $\kappa_n = 0.3$ (сплошные линии) эллипсоида данной геометрии.

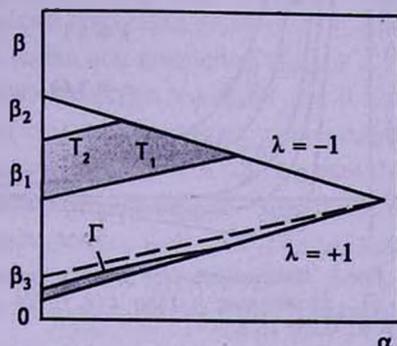


Рис. 1б. Области неустойчивости вложенных анизотропных эллипсоидов в плоскости α , β . Верхняя треугольная область устойчивости существует лишь для эллипсоидов табл. 1.

эллипсоида заданной геометрии. С изменением геометрии эллипсоида размеры этих равносторонних треугольников меняются. Заметим, что гало расширяет эту область. При условии $\kappa_n A_3^h \geq (bA_2 - A_1)/(1 - b)$ значение β_{+1} становится отрицательным.

4. *Сфероидальные фигуры* ($b = 1$). Из (19), (20) видно, что для этих фигур дисперсия скоростей должна быть изотропной в плоскости вращения: $\alpha = \beta$. В инерциальной системе отсчета сфероидальные фигуры вращаются с угловой скоростью

$$\Omega_{Mc}^2 = 1 + \kappa_n - (A_3 + \kappa_n A_3^h) \left(\frac{1}{2} + \beta c^2 \right). \quad (33)$$

Соотношение (21) дает дисперсию скоростей вдоль оси вращения фигуры, а (26)-(28) - отношение полуосей тех сфероидов, от которых ответвляются последовательности изотропных в плоскости вращения самосопряженных эллипсоидов $\lambda \neq 1$ и сфероида бифуркации $\lambda = 0$ соответственно. Очевидно, что последовательность самосопряженных эллипсоидов с $\lambda = -1$ ответвляется от покоящейся фигуры. В классической теории такой фигурой является сфера. При наличии сфероидального гало эта фигура имеет форму сфероида [4]. В анизотропном случае, в зависимости от меры сплюснутости гало и его относительной плотности κ_n , всегда существует значение β , при котором эта фигура является сферой. В общем случае последовательность самосопряженных эллипсоидов $\lambda = -1$ ответвляется от покоящегося сфероида, зависимость β от сплюснутости которого, внутри гало с отношением полуосей s_n при разных значениях относительной плотности κ_n ,

изображается спадающими кривыми, которые независимо от κ_n пересекаются в точке $c = c_n$, $\beta = (1 - 0.5 A_3^h) / A_3^h c_n^2$.

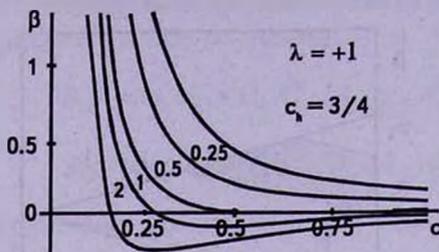


Рис.2. Зависимость $\beta(c)$ для сфероидов $\lambda = +1$, вложенных в гало с $c_n = 3/4$ и $\kappa_n = 0; 0.25; 1; 2$.

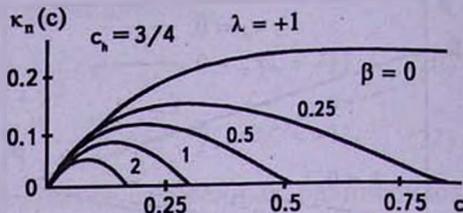


Рис.3. Зависимость $\kappa_n(c)$ для вложенного сфероида $\lambda = +1$ при $\beta = 0; 0.25; 0.5; 1; 2$.

Интересной представляется зависимость $\beta(c)$ для вложенного сфероида, от которого отщепляется последовательность изотропных в плоскости вращения самосопряженных эллипсоидов $\lambda = +1$ (рис.2). Внутри гало данной сплюснутости существует область κ_n , каждому из которых соответствуют значения c_1, c_2 , такие, что сфероиды с отношением полуосей $c_1 > c > c_2$ не являются фигурами равновесия из-за отрицательности β . Так, например, внутри гало с отношением полуосей $c_n = 3/4$ и относительной плотностью $\kappa_n \geq 0.245$ параметр анизотропии β положителен для всех сплюснутостей c , а уже при $\kappa_n = 0.24$ возможными фигурами с $\lambda = +1$ являются либо сфероиды с $c < 0.54$, либо, практически холодные вдоль оси вращения ($\beta \approx 0$), сфероиды с $c > 0.74$. Вторая ветвь исчезает при $\kappa_n \approx 0.227$, где возможными фигурами равновесия являются сфероиды с $c < 0.41$, при $\kappa_n = 0.2$ - сфероиды с $c < 0.28$. Внутри сферического гало аналогичная картина имеет место при меньших значениях κ_n . Кривые на рис.3 дают зависимость $\kappa_n(c)$ при разных значениях параметра анизотропии $\beta = 0; 0.25; 0.5; 1; 2$.

Уравнение (28) с учетом (21) дает зависимость дисперсии скоростей в плоскости вращения σ_{1c}^2 вложенного сфероида бифуркации от меры его сплюснутости. В таком виде это уравнение уже не содержит κ_n и c_n . Это означает, что гало не влияет на геометрию анизотропного сфероид бифуркации [12], т.е. на его вековую неустойчивость, однако обеспечивает равновесие и устойчивость сильно сплюснутых вдоль оси вращения сфероидов (см. "гало-эффект" [5]).

5. *Вложенные S-эллипсоиды, изотропные в плоскости вращения* ($\alpha = \beta$). Одиночные неоднородные S-эллипсоиды, независимо от степени уплотнения вещества к их центру, т.е. от значения n , в плоскости геометрий (b, c) занимают аналогичные жидким S-эллипсоидам области. Присутствие биаксиальной анизотропии, изучаемой в настоящем

разделе, меняет эту картину лишь количественно. В зависимости от меры анизотропии β , последовательности самосопряженных эллипсоидов с $\lambda \neq 1$, которыми ограничена эта область (см.рис.4), либо приближаются к оси абсцисс, сплющивая все эллипсоиды вдоль оси вращения (если $\beta > 1$), либо удаляются от нее, вытягивая эллипсоиды вдоль оси вращения (при $\beta < 1$). Правда, в последнем случае вытягивание происходит до значения $\beta = 0.424$, ниже которого члены последовательности самосопряженных эллипсоидов $\lambda = -1$ перестают быть фигурами равновесия. При еще меньших значениях β : $\beta \leq 0.21$ и $\beta \leq 0.045$ нарушаются условия равновесия эллипсоидов последовательностей $\lambda = 0$ и $\lambda = +1$ соответственно, хотя, как увидим ниже в разделе б, еще раньше нарушаются условия их устойчивости.

Присутствие гало качественно меняет приведенную картину, особенно

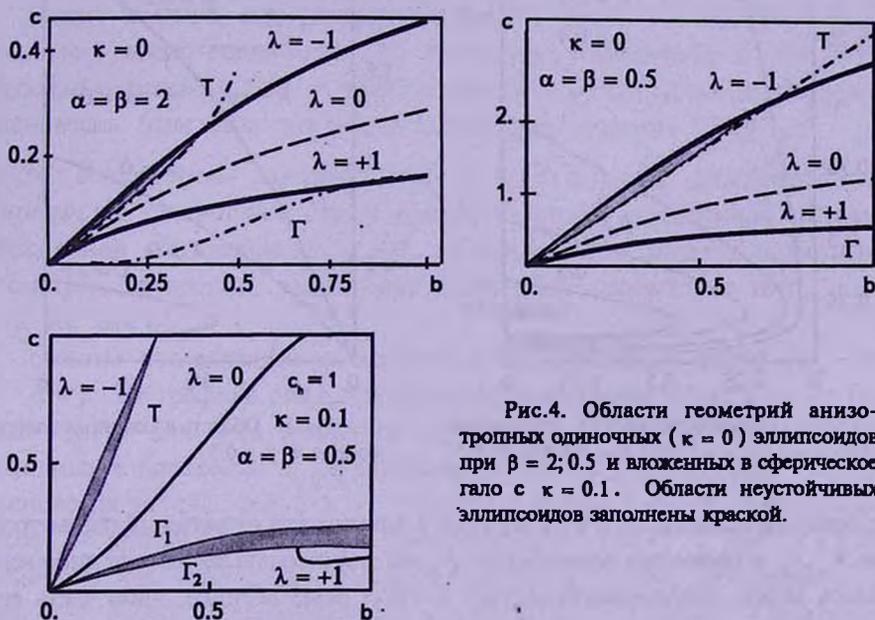


Рис.4. Области геометрий анизотропных одиночных ($\kappa = 0$) эллипсоидов при $\beta = 2; 0.5$ и вложенных в сферическое гало с $\kappa = 0.1$. Области неустойчивых эллипсоидов заполнены краской.

в области эллипсоидов с положительной циркуляцией вещества. На графиках рис.5а представлены области возможных геометрий эллипсоидов, вложенных внутри сплюснутого гало с отношением полуосей $c_n = 3/4$ и относительной плотностью $\kappa_n = 0.1$, при значениях параметра анизотропии $\beta = 1; 2; 0.5$. Эти области сверху ограничены, как обычно, последовательностями вложенных самосопряженных эллипсоидов $\lambda = -1$, ниже которых, до последовательности вложенных эллипсоидов Якоби ($\lambda = 0$), занимают место эллипсоиды с $\lambda < 0$. Самую нижнюю область заполняют эллипсоиды с положительной циркуляцией вещества ($\lambda > 0$).

По мере увеличения дисперсии скоростей вдоль оси вращения (т.е. с уменьшением значения параметра β), вложенные трехосные эллипсоиды

вытягиваются вдоль оси вращения. Наиболее вытянутыми при этом являются эллипсоиды самосопряженной последовательности $\lambda = -1$, которая ответвляется от вытянутого вдоль оси симметрии X_3 покоящегося сфероида ($c > 1$). Однако существует минимальное значение параметра β_- , зависящее от параметров гало, ниже которого рассматриваемые трехосные эллипсоиды уже не являются фигурами равновесия (см. рис.1). В данном случае это имеет место при $\beta_- = 0.369$, вместо 0.424 - при отсутствии гало.

Как у вложенных жидких эллипсоидов [16], здесь тоже имеет место так называемый "гало-эффект". Гало обеспечивает равновесие сильно сплюснутых вдоль оси вращения анизотропных трехосных эллипсоидов с положительной

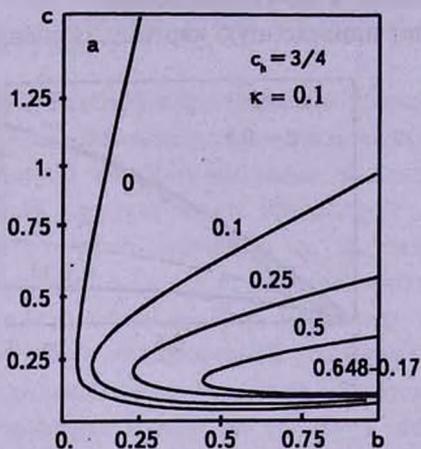


Рис.5а. Последовательности вложенных эллипсоидов с $\lambda = +1$ при $\beta = 0; 0.1; 0.25; 0.5$.

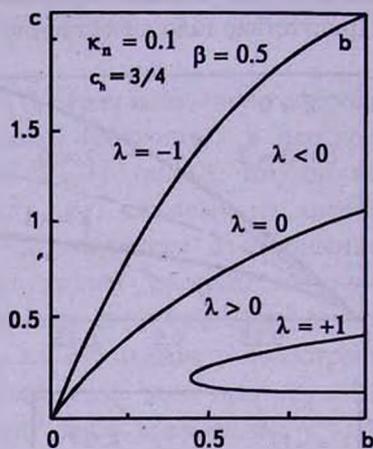


Рис.5б. Область вложенных эллипсоидов с $\beta = 0.5$.

циркулирующей вещества ($\lambda > 0$). При этом, в зависимости от значений параметров гало κ_n, c_h и параметра анизотропии β , эти эллипсоиды заполняют либо всю область между последовательностью $\lambda = 0$ и осью абсцисс, либо часть ее. Последнее зависит от условий существования последовательности вложенных самосопряженных эллипсоидов с положительной циркулирующей вещества $\lambda = +1$. В отсутствии гало эта последовательность существует при значениях параметра анизотропии $\beta \geq 0.045$, и с ростом β все больше приближается к оси абсцисс. Присутствие гало, даже очень малой относительной плотности, резко меняет эту картину. Во-первых, члены последовательности вложенных самосопряженных эллипсоидов $\lambda = +1$ становятся фигурами равновесия даже при значении $\beta = 0$, т.е. когда эллипсоид является холодным в плоскости вращения. На графике рис.5а приведены эти последовательности эллипсоидов, вложенные в гало с параметрами $c_h = 3/4, \kappa_n = 0.1$, при значениях параметра анизотропии $\beta = 0; 0.1; 0.25; 0.5$. Кстати, кривая $\beta = 0$ на рис.5а совпадает с кривой, представляющей холодные в плоскости вращения бесстолкновительные

вложенные эллипсоиды [16]. Во-вторых, внутри гало данной сплюснутости существует зависящее от κ_n критическое значение $\beta_{+1}(\kappa_n)$, при котором последовательность эллипсоидов с $\lambda = +1$ вырождается в точку (в сфероид). Эллипсоиды с $\beta \geq \beta_{+1}(\kappa_n)$ и $\lambda > 0$ заполняют всю область между осью абсцисс последовательностями Маклорена и Якоби ($\lambda = 0$). Эллипсоиды же с $\beta < \beta_{+1}(\kappa_n)$ и $\lambda > 0$ заполняют область между последовательностями вложенных эллипсоидов с $\lambda = +1$, $\lambda = 0$ Маклорена и осью абсцисс (рис.5б). В рассматриваемом случае $\kappa_n = 0.1$, $c_h = 3/4$ имеем $\beta_{+1}(0.1) = 0.648$. Поэтому на графиках рис.5б последовательность вложенных эллипсоидов $\lambda = +1$ фигурирует лишь у эллипсоидов с $\beta = 0.5$. Она начинается и заканчивается сфероидами, отношения полюсей которых равны $c_1 = 0.29$, $c_2 = 0.12$, и вращаются с угловыми скоростями $\Omega_1 = 0.55$ и $\Omega_2 = 0.46$ соответственно.

Важно заметить, что сильно сплюснутые вдоль оси вращения биаксиально - анизотропные ($\alpha = \beta$) трехосные эллипсоиды, в том числе двухосные диски ($a_3 = 0$), в присутствии гало всегда являются фигурами равновесия (при всех значениях параметров системы β, κ_n, c_h).

6. Вложенные эллипсоиды с трехмерной анизотропией дисперсии скоростей. Если давление внутри эллипсоида обладает трехмерной анизотропией: $\alpha \neq \beta$, то оказывается, область возможных геометрий трехосного эллипсоида качественно зависит от того, $\alpha > \beta$ или же $\alpha < \beta$.

Начнем исследование с одиночных анизотропных фигур ($\kappa_n = 0$).

$\alpha < \beta$. На графике рис.6 представлена характерная область геометрий этих фигур для всех значений параметров $\alpha < \beta$, за исключением холодных в плоскости X_1, X_3 эллипсоидов ($\alpha = 0$), для которых условия равновесия эллипсоидов с $\lambda = -1$ нарушаются при $\beta \leq 0.39$, эллипсоидов Якоби - при $\beta \leq 0.20$, а последовательности $\lambda = +1$ - при $\beta \leq 0.04$. Заметим, что последовательности Якоби и $\lambda = +1$ начинаются от круглого диска и заканчиваются иглообразной фигурой. Сфероидам соответствуют лишь отрицательные внутренние циркуляции вещества ($\lambda < 0$). Последовательность $\lambda = -1$ при $\alpha > 1$ всегда начинается от сплюснутого покоящегося сфероида, а при $\alpha < 1$ - от вытянутого.

$\alpha > \beta$. Область геометрий и свойства анизотропных эллипсоидов качественно меняются, если дисперсия скоростей вдоль большой оси превосходит дисперсию скоростей вдоль малой оси в плоскости вращения эллипсоида. Сфероиды при этом уже не являются фигурами равновесия. Все последовательности эллипсоидов начинаются от трехосного эллипсоида (назовем его вырожденным), геометрия которого определяется значениями α и β , и заканчиваются иглообразной фигурой. Здесь также вырожденный эллипсоид при $\alpha < 1$ вытянут вдоль оси вращения. На графике рис.7а представлена область геометрий эллипсоидов $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.75$. При заданном

значении α , с уменьшением β область геометрий сжимается к началу координат до некоторого, зависящего от α значения β , ниже которого эллипсоиды $\lambda = -1$ перестают быть фигурами равновесия, при еще меньших значениях β - нарушаются условия равновесия эллипсоидов с $\lambda = 0$. Например, при значении $\alpha = 1.5$ первое имеет место при значениях $\beta \leq 0.21$, а второе - при $\beta \leq 0.176$.

Заметим, что в отсутствие гало, ни при каких значениях параметров анизотропии двухосные в плоскости вращения диски, а также близкие к ним сильно сплюснутые вдоль оси вращения трехосные эллипсоиды не являются фигурами равновесия.

Присутствие гало вновь резко меняет ситуацию.

$\alpha < \beta$. Независимо от значений α и параметров гало здесь полностью исчезает последовательность эллипсоидов $\lambda = +1$ и поэтому эллипсоиды с $\lambda > 0$ заполняют всю область между осью абсцисс и последовательностью безвихревых эллипсоидов $\lambda = 0$ (рис.6б). Изменения эллипсоидов $\lambda = -1$ и $\lambda = 0$ носят лишь количественный характер.

$\alpha > \beta$. Здесь также качественные изменения терпят последовательность $\lambda = +1$. На графике рис.7б, с приведены кривые, представляющие последовательности вложенных эллипсоидов $\lambda = \pm 1$, $\lambda = 0$ в случае $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.75$. Аналогичные изменения терпят области геометрий всех одиночных анизотропных эллипсоидов с $\alpha > \beta$.

Приведенные исследования показывают общность характера установленного нами в [16] эффекта гало на вложенные в него эллипсоидальные подсистемы. Гало, даже незначительной плотности, обеспечивает равновесие сильно сплюснутых вдоль оси вращения трехосных эллипсоидов и двухосных дисков, независимо от меры концентрации массы к центру системы, от меры и характера анизотропии (биаксиальной или грехмерной) дисперсии скоростей, а также от меры сплюснутости гало.

7. Устойчивость вложенных анизотропных эллипсоидов.

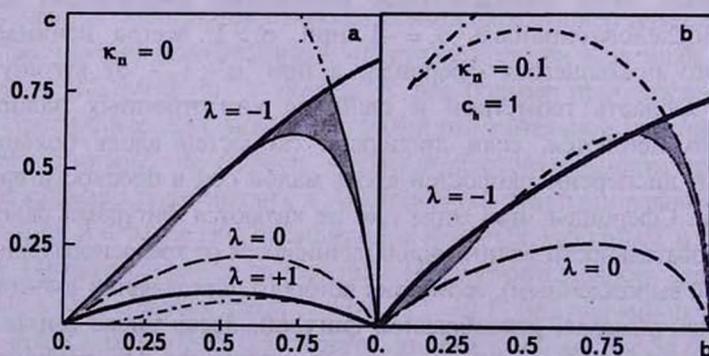


Рис.6. Области геометрий анизотропных с $\alpha = 0.75$, $\beta = 1.5$ одиночных (а) и вложенных (б) эллипсоидов.

Рассмотрим вторые формы колебания вложенного, неоднородного и анизотропного эллипсоида методом тензорных уравнений вириала [18]:

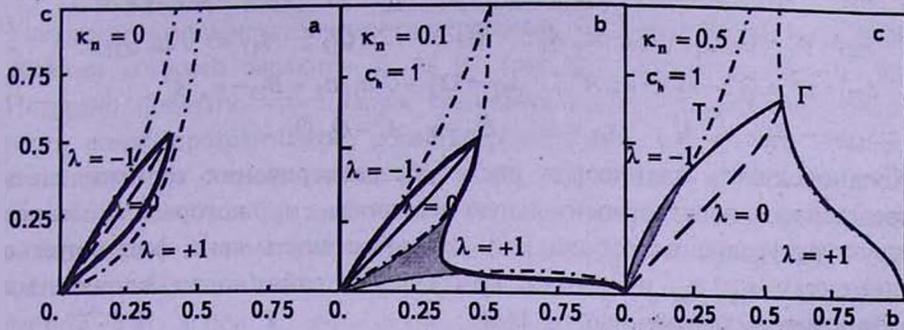


Рис.7. Области геометрий анизотропных с $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.75$ одиночных (а) и вложенных внутри гало с $\kappa_n = 0.1, 0.5$ (b, c) эллипсоидов.

$$\omega^2 N_{i,j} - i 2\omega Q_{jl} N_{i,l} - i 2\omega \varepsilon_{ll3} N_{ij} + 2\Omega \varepsilon_{ll3} (Q_{lk} N_{j,k} - Q_{jk} N_{l,k}) - Q_{jl}^2 N_{i,l} - Q_{il}^2 N_{j,l} = \kappa_n A^h N_{i,j} - \delta W_{ij} - \Omega^2 (N_{ij} - N_{3j} \delta_{i3}) - \delta U_i \delta_{ij}, \quad (34)$$

где возмущения характеризованы лагранжевым смещением частиц:

$$\xi(x, t) = \xi(x) \exp[-i \omega t], \quad (35)$$

ω - частота, δU_i и δW_{ij} - возмущения внутренней и собственной гравитационной энергий вложенного эллипсоида [8]

$$\delta W_{ij} = -K_n \pi G \rho_c B_{ij} N_{ij}, \quad (36)$$

$$N_{ij} = \int \rho (\xi_i x_j + \xi_j x_i) dV = N_{i,j} + N_{j,i}. \quad (37)$$

Уравнения (34) дополняются условием соленоидальности возмущений:

$$\sum_{i=1}^2 N_{ii} / a_i^2 = 0. \quad (38)$$

В работе [18], исследуя вопрос устойчивости вложенных S-эллипсоидов Римана, мы установили, что неустойчивость возникает лишь по отношению к нечетным по индексу 3 формам колебания. При этом оказалось, что часть эллипсоидов с обратной циркуляцией вещества, которые устойчивы в отсутствие гало и внутри сферического гало, становятся неустойчивыми внутри сплюснутого гало. Здесь не будем приводить подробные расчеты, а приведем лишь характеристическое уравнение, определяющее вопрос устойчивости вложенных неоднородных и анизотропных эллипсоидов по отношению к нечетным по индексу 3 формам колебания:

$$\text{Det}(S) = 0, \quad (39)$$

где S - матрица четвертого ранга с элементами

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= \omega^2 + \Omega^2 - B_{13} - \kappa_n A_3^h, & s_{12} &= \Omega_J^2 + J a_2/a_1 - B_{13} - \kappa_n A^h, \\
 s_{13} &= -s_{31} = -i 2\omega\Omega, & s_{14} &= s_{23} = s_{32} = s_{41} = 0, & s_{21} &= -B_{13} - \kappa_n A_3^h, \\
 s_{22} &= \omega^2 - Q_{12}Q_{21} - B_{13} - \kappa_n A_3^h, & s_{24} &= -i 2\omega Q_{12}, & s_{42} &= -i 2\omega Q_{21}, \\
 s_{33} &= \omega^2 + \Omega^2 - B_{23} - \kappa_n A^h, & s_{34} &= \Omega_J^2 + J a_1/a_2 - B_{23} - \kappa_n A^h, \\
 s_{43} &= -B_{23} - \kappa_n A_3^h, & s_{44} &= \omega^2 - B_{23} - \kappa_n A_3^h - Q_{12}Q_{21}.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Неоднородность эллипсоида после обезразмеривания времени здесь представлена через относительную плотность κ_n , которая не меняет структуру уравнения работы [18]. Анизотропность явно фигурирует в элементах s_{12} , s_{34} и меняет критерий устойчивости вложенных эллипсоидов, полученный в [18].

Левая часть уравнения (39) является многочленом четвертой степени по ω^2 . В общем случае несферического гало его удастся представить в виде $(\omega^2 - \lambda^2 \Omega^2)D$, где D - многочлен третьей степени по ω^2 . В настоящей работе будем рассматривать случай сферического гало: $A^h = A_3^h = 2/3$, при котором уравнение (39) допускает корни

$$\omega^2 = \Omega^2, \quad \omega^2 = \lambda^2 \Omega^2, \tag{41}$$

а устойчивость определяется биквадратным уравнением

$$\omega^4 - 2R\omega^2 + T = 0, \tag{42}$$

где

$$R = \frac{1}{2} \Omega_J^2 + B_{13} + B_{23} + \frac{4}{3} \kappa_n, \tag{43}$$

$$T = \left(2B_{13} + \frac{4}{3} \kappa_n + J a_1/2 a_2 \right) \left(2B_{23} + \frac{4}{3} \kappa_n + J a_2/2 a_1 \right). \tag{44}$$

Реальные решения уравнения (43) получаются при

$$\Gamma \equiv R^2 - T \geq 0, \quad T \geq 0. \tag{45}$$

Как видно из (44), второе условие (45) может быть нарушено лишь у эллипсоидов с отрицательной циркуляцией вещества, так как $J < 0$ только в случае $\lambda < 0$. Но тогда первое условие выполняется автоматически для всех эллипсоидов. Поэтому вопрос неустойчивости эллипсоидов с положительной циркуляцией вещества решается первым условием (45), а эллипсоидов с отрицательной циркуляцией вещества - вторым. Рассмотрим сначала условия устойчивости (45) в плоскости α, β . Второе условие требует, чтобы выражения в скобках имели одинаковый знак. С учетом (23) получаем, что устойчивым эллипсоидам соответствуют значения параметров анизотропии вне полосы

$$\beta_1 + b^2 \alpha \leq \beta \leq \beta_2 + b^2 \alpha, \tag{46}$$

расположенной параллельно прямой $\lambda = 0$, где использованы обозначения

$$\beta_1 = \frac{4 B_{13} + a_1^2 A_{12} + (8/3)\kappa_n}{c^2 (A_3 + (2/3)\kappa_n)} b^2 (1 - b^2), \quad \beta_2 = \frac{4 B_{23} + b^2 a_1^2 A_{12} + (8/3)\kappa_n}{b^2 (A_3 + (2/3)\kappa_n)} (1 - b^2).$$

Указанная полоса неустойчивости пересекает ось β на отрезке, крайними точками которого являются β_1 и β_2 (рис.1б). Очевидно, что $\beta_1 > \beta_0$. Нетрудно показать, что нижняя граничная прямая полосы неустойчивости всегда проходит через область треугольника, т.е. $\beta_1 < \beta_{-1}$. Что же касается точки с координатой β_2 , то она лежит ниже точки β_{-1} лишь в небольшом, слабо зависящем от κ_n , диапазоне сплюснутости эллипсоида b в плоскости вращения. Например, при $\kappa_n = 0$ это имеет место в диапазоне сплюснутости $b = 0.67 - 0.83$, при $\kappa_n = 0.25$ - в диапазоне $b = 0.73 - 0.81$, а при $\kappa_n = 1$ - в диапазоне $b = 0.75 - 0.80$. Для этих фигур значения α и β , которые соответствуют устойчивым конфигурациям, заполняют отделенные полосой неустойчивости две области - треугольник и трапецию (см. рис.1б). Для эллипсоидов вне указанного диапазона, верхняя треугольная область в плоскости α, β исчезает.

Исследование критерия устойчивости эллипсоидов с положительной циркуляцией вещества показывает, что в плоскости α, β первое условие в (45), при знаке равенства, изображается гиперболой Γ , которая пересекает ось β в точке с координатой β_3 . Эллипсоиды, лежащие ниже Γ , - неустойчивы. В зависимости от геометрии эллипсоида и от относительной плотности гало, β_3 может быть как меньше β_{+1} , так и больше. В первом случае неустойчивость не возникает. Во втором - Γ пересекает также прямую $\lambda = +1$. Область между Γ и прямой $\lambda = +1$ соответствует неустойчивым фигурам (рис.1б).

Для анизотропных сфероидов ($b = 1, \alpha = \beta$) второе условие (45) выполняется автоматически, так как здесь $T = g^2(c)$, где $g(c) = 2 B_{13}(c) + (1/2)J(c) + (4/3)\kappa_n$. Первое же условие принимает более упрощенный вид: $(R - g)(R + g) \geq 0$, который дает

$$\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2, \quad (47)$$

где

$$\beta_1(c) = \frac{A_1 - 2 B_{11} - (2/3)\kappa_n}{(A_3 + (2/3)\kappa_n)c^2}, \quad \beta_2(c) = \frac{A_1 + 8 B_{13} + 6 \kappa_n}{(A_3 + (2/3)\kappa_n)c^2}. \quad (48)$$

При знаках равенства, (47) дает кривые марджинально - устойчивых сфероидов. В случае одиночных сфероидов в изотропном случае ($\beta = 1, \kappa = 0$) условие (47) для сплюснутости устойчивых сфероидов дает известный результат: $c \geq 0.303$. При наличии сферического гало с $\kappa > 0.21$ функция $\beta_1(c)$ отрицательна для всех значений c . При меньших, чем 0.21 значениях относительной плотности гало функция $\beta_1(c)$ становится положительной сначала в области слабо сплюснутых сфероидов, а при дальнейшем уменьшении κ_n - умеренно сплюснутых сфероидов.

Следовательно, гало обеспечивает равновесие и устойчивость даже холодных в плоскости вращения сильно сплюснутых сфероидов. Функция $\beta_2(c)$ положительна для всех c и принимает значения больше, чем 4.2. Графически все это в плоскости β , c представлено на рис.8а, где приведены кривые

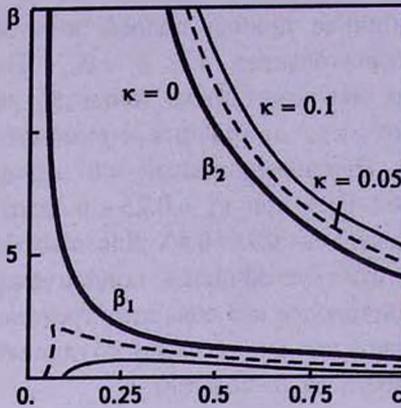


Рис.8а. Кривые маргинально-устойчивых анизотропных одиночных ($\kappa = 0$) и вложенных сфероидов внутри сферического гало с $\kappa = 0.05; 0.1$. Устойчивые области лежат между соответствующими кривыми β_1 и β_2 .

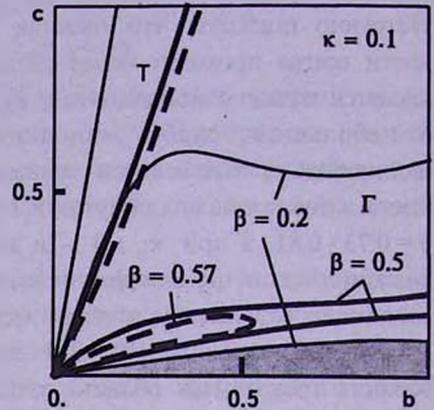


Рис.8б. Кривые маргинально-устойчивых анизотропных сфероидов внутри сферического гало с $\kappa = 0.1$ при $\beta = 0, 0.2, 0.5, 0.57$. Неустойчивые фигуры заполняют области между Γ кривыми (область петли) и выше T кривых. Область холодных в плоскости вращения устойчивых эллипсоидов ($\beta = 0$) окрашена.

маргинальной устойчивости одиночных ($\kappa_n = 0$) и вложенных в гало с $\kappa_n = 0.05, 0.1$ сфероидов. Очевидно - гало расширяет область устойчивых сфероидов, стабилизируя в первую очередь сильно сплюснутые вдоль оси вращения анизотропные сфероиды.

Изотропные в плоскости вращения одиночные эллипсоиды: $\kappa_n = 0$, $\alpha = \beta$. При этом, в плоскости геометрий (b , c) устойчивые эллипсоиды занимают область между кривыми маргинальной устойчивости, которые определяются через (46), при знаках равенства. Эта область снизу ограничена кривой Γ , а сверху - кривой T . Они обе начинаются от иглообразной фигуры и заканчиваются сфероидом. С ростом параметра анизотропии β кривые приближаются к оси абсцисс.

Кривая Γ лежит ниже области возможных геометрий эллипсоидов с $\lambda > 0$ пока $\beta \geq 0.5$. При меньших значениях β кривая Γ проходит выше последовательности $\lambda = +1$, пересекая ее в крайних точках $b = 0$ и $b = 1$. Так что, все эллипсоиды с $\lambda > 0$ устойчивы по отношению к рассматриваемым модам колебаний, пока $\beta \geq 0.5$. Ниже этого значения, до $\beta = 0.21$, устойчива лишь часть эллипсоидов с $\lambda > 0$, которая заполняет область между кривой Γ и последовательностью $\lambda = 0$.

Кривая T пересекает последовательность $\lambda = -1$ в двух точках. Поэтому неустойчивость эллипсоидов с обратной циркуляцией вещества возникает в участке, ограниченном последовательностью $\lambda = -1$ и кривой T - между точками их пересечения (рис.4а, 4б).

Изотропные в плоскости вращения вложенные эллипсоиды: $\kappa_n \neq 0$, $\alpha = \beta$. Присутствие гало опять усложняет картину, особенно в области эллипсоидов с положительной осцилляцией вещества. Внутри сферического гало с заданной относительной плотностью массы κ_n (пусть $\kappa_n = 0.1$) с постепенным ростом дисперсии скоростей вдоль оси вращения, т.е. с уменьшением β , начиная с некоторого значения $\beta(\kappa_n)$, в области иглообразных фигур возникает кривая Γ в виде узкой петли, которая быстро вытягивается к оси сфероидов $b=1$, пересекает в двух ее точках (после этого первое условие (45) представляется двумя кривыми - Γ_1 и Γ_2), образуя в области геометрий вложенных эллипсоидов с $\lambda > 0$ полосу неустойчивости (рис.8б). Еще раньше, при $\beta \leq \beta_{+1}(\kappa_n)$, от оси сфероидов возникает другая петля - последовательность вложенных самосопряженных эллипсоидов $\lambda = +1$, которая, расширяясь на оси сфероидов, вытягивается в обратную сторону - к иглообразным фигурам (см. раздел 5). Следовательно, преобладающая дисперсия скоростей вдоль оси вращения (в рассматриваемом случае $\beta(0.1) = 0.594$, т.е. при $\sigma_{3c} > 1.3\sigma_{1c}$) приводит не только к нарушениям условий равновесия эллипсоидов внутри петли $\lambda = +1$, но и к дестабилизации части вложенных эллипсоидов с $\lambda > 0$. Однако сильно сплюснутые вдоль оси вращения эллипсоиды и двухосные диски при этом остаются устойчивыми образованиями.

8. Устойчивость эллипсоидов с трехмерной анизотропией ($\alpha \neq \beta$).

Сначала рассмотрим устойчивость одиночных анизотропных эллипсоидов.

При $\alpha < \beta$ кривая T расщепляется на две кривые - T_1 и T_2 , область между которыми заполняют неустойчивые фигуры. Кривые T_1 и T_2 начинаются от круглого диска. Первая заканчивается на иглообразной фигуре, а вторая поднимается вверх (см. рис.6а). Неустойчивость здесь возникает в основном в узкой, приграничной с последовательностью $\lambda = -1$ и кривой T_2 полосе. Кривая Γ тоже начинается от круглого диска и заканчивается на иглообразной фигуре. Область над этой кривой соответствует устойчивости. И так как кривая Γ проходит ниже последовательности $\lambda = +1$, то неустойчивость по первому критерию (45) у эллипсоидов с $\lambda > 0$ не возникает.

При $\alpha > \beta$ вопрос устойчивости одиночных эллипсоидов определяется двумя кривыми - T_1 и Γ , которые начинаются от иглообразной фигуры и поднимаются вверх (рис.7а). Область, заключенная между этими кривыми, соответствует устойчивости. Кстати, соответствующие равновесные фигуры

в основном лежат именно в устойчивой области, за исключением очень маленькой приграничной с $\lambda = -1$ области.

В присутствии сферического гало:

$\alpha < \beta$. Все эллипсоиды с $\lambda > 0$, которые заключены между осью абсцисс и кривой $\lambda = 0$, являются устойчивыми фигурами равновесия, так как кривая Γ , так же, как и последовательность $\lambda = +1$, здесь отсутствуют. Неустойчивость, определяемая кривыми T_1 и T_2 , опять возникает лишь в узких полосках в области $\lambda < 0$, которые с ростом α, β и k_n становятся еще уже и, наконец, исчезают при их больших значениях (рис.7b, c).

$\alpha > \beta$. При малой относительной плотности гало условия (45) представляются тремя кривыми T_1 , Γ_1 и Γ_2 . Притом, устойчивые фигуры расположены в областях: между T_1 и Γ_2 и ниже Γ_1 . Кривые Γ_1 и Γ_2 начинаются от иглообразной фигуры. Γ_1 заканчивается на круглом диске, а T_1 и Γ_2 - имеют поведение соответствующих кривых одиночного эллипсоида (рис.6b). Поэтому все сильно сплюснутые вдоль оси вращения трехосные эллипсоиды устойчивы. С ростом относительной плотности гало кривые Γ_1 и Γ_2 сливаются в одну Γ кривую, которая сначала проходит вдоль последовательности $\lambda = +1$ и, не доходя T_1 , поднимается вверх, медленно приближаясь к последней.

9. Обсуждение результатов. Усредняя дисперсии скоростей разных типов звезд в окрестностях Солнца [2], находим $\langle \sigma_1 \rangle \approx 15.1 \pm 5.3$ км/с, $\langle \sigma_2 \rangle \approx 22.8 \pm 9.6$ км/с, $\langle \sigma_3 \rangle \approx 12.6 \pm 4.7$ км/с, которым соответствуют значения параметров анизотропии $\langle \alpha \rangle \approx 1 - 2$, $\langle \beta \rangle \approx 2 - 4$. Подставляя эти величины в (45) в качестве значений α, β в центре Галактики, получаем области b , Ω и $\lambda\Omega$, соответствующие устойчивым анизотропным эллипсоидам. Расчеты показывают, что неоднородные подсистемы стабилизируются при меньших значениях относительной массы гало. Анизотропность дисперсий скоростей тоже стабилизирует эллипсоиды, притом тем сильнее, чем больше сумма $\alpha + \beta$. Трехосные эллипсоиды с $c \approx 0.067$ устойчивы и без наличия гало.

Если принимать Галактику в виде сильно сплюснутого неоднородного сфероида с отношением полуосей меридианного сечения $c \approx 0.067$, то условия динамической устойчивости (50) и равновесия вдоль оси вращения (21), с учетом (5),(8),(16),(18) в области солнечной окрестности примут вид

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \geq \frac{K_n \pi G \rho_\Theta a^2}{(2n+5)} \frac{M_n}{M_{n+m}} \left(A_1 - 2B_{11} - \frac{c^{2n+2} n!}{K_n (2n+3)!} \frac{M_h}{M_n} \right) \left(1 - R_\Theta^2/a^2 \right)^{m-n}, \quad (52)$$

$$\sigma_3^2 = \frac{K_n \pi G \rho_\Theta c^2 a^2 M_n}{(2n+5) M_{n+m}} \left(A_3 + \frac{c^{2n+2} n!}{K_n (2n+3)!} \frac{M_h}{M_n} \right) \left(1 - R_\Theta^2/a^2 \right)^{m-n}. \quad (53)$$

В отсутствие гало в случае однородного распределения массы эти формулы

совпадают с результатами работы [11] и для окрестности Солнца, с учетом $\rho_{\odot} \approx 7 \cdot 10^{-24}$ г/см³, $R_{\odot} \approx 10$ кпк, $a \approx 15$ кпк, дают: $\sigma_1 \geq 88$ км/с, $\sigma_3 = 39$ км/с, которые находятся в сильном несоответствии с наблюдениями. Наличие гало понижает нижний предел σ_1 , но увеличивает (хотя незначительно) значение σ_3 . Например, учет гало с $M_h/M_n \approx 0.6$ дает: $\sigma_1 \geq 56$ км/с и практически не меняет σ_3 . Так что в рамках однородной модели гало не может устранять несоответствие теории с наблюдениями. Учет неоднородности массы дает результаты, близкие к наблюдаемым. Например, при $n=2$; $m=3-5$ формулы (52) и (53) при $c=0.067$, даже без учета гало, дают: $\sigma_1 \geq 25.4$ км/с, $\sigma_3 \approx 18.7$ км/с. Однако формула (33) для скорости локального центроида звезд в районе Солнца при этом дает пониженную оценку: 200 км/с, вместо наблюдаемого 250 км/с. Для углового же момента модели получаем $L \approx 0.8 \cdot 10^{74}$ г см²/с, вместо наблюдаемого $1.2 \cdot 10^{74}$ г см²/с.

В следующей работе будет рассмотрен случай, когда дисперсия скоростей вдоль оси вращения эллипсоида зависит от плотности квадратичным законом, а в плоскости вращения - линейным. Обычно такое уравнение состояния используется с целью замыкания цепочки моментных уравнений при построении бесстолкновительной гидродинамики для сильно сплюснутых гравитирующих систем (см., например, [20]).

Ереванский государственный университет,
Армения, e-mail: mabr49@arminco.com

ANISOTROPIC INHOMOGENEOUS RIEMANN S-TYPE ELLIPSOIDS IN THE SPHEROIDAL HALO. I

M.G.ABRAHAMYAN

The classical S-type Riemann ellipsoids are generalized taking into account inhomogeneous density distribution of mass (Ferrers type), three dimensional anisotropy of the velocity dispersion and the gravitation of spheroidal halo. Inhomogeneity doesn't change equilibrium conditions and stability criteria of ellipsoids. The anisotropy can enlarge or restrict the possible geometrie's region of stable ellipsoids, while the halo always enlarge it and stabilize ellipsoids. In the framework of inhomogeneous model the anisotropic velocity dispersion of stars at the solar vicinity is obtained.

Key words: *Galaxies: halo: anisotropy: subsystems of galaxy*

ЛИТЕРАТУРА

1. *С.Чандрасекар*, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
2. *К.У.Аллен*, Астрофизические величины, Мир, М., 1977.
3. *P.J.Peebse, P.J.E.Ostriker*, *Astrophys. J.*, 186, 467, 1973.
4. *М.Г.Абрамян, С.А.Каплан*, *Астрофизика*, 10, 665, 1974.
5. *М.Г.Абрамян*, *Астрофизика*, 11, 121, 487, 1975.
6. *R.H.Durisen*, *Astrophys. J.*, 224, 826, 1978.
7. *F.Pacheco*, Thesis, Univ. Rome, 1982.
8. *P.O.Vandervoort, O.E.Welty*, *Astrophys. J.*, 263, 654, 1982.
9. *P.H.Roberts*, *Astrophys. J.*, 136, 1108, 1962.
10. *J.J.Binney*, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 183, 501, 1978.
11. *R.Weigandt*, *Astron. Astrophys.*, 82, 177, 1980.
12. *R.Weigandt*, *Astron. Astrophys.*, 105, 326; 106, 240, 1982.
13. *М.Г.Абрамян*, *Астрофизика*, 12, 177, 1976
14. *М.Г.Абрамян*, *Астрофизика*, 13, 253, 1977.
15. *М.Г.Абрамян*, *Астрофизика*, 25, 173, 342, 1986.
16. *М.Г.Абрамян, Д.М.Седрамян*, *Астрон. ж.*, 63, 1089, 1986.
17. *М.Г.Абрамян*, Труды АН КазССР, 1989, 'и в сб. "Вопросы небесной механики и звездной динамики". Наука, Алма-Ата, 1990, с.54.
18. *М.Г.Абрамян*, *Астрофизика*, 45, 125, 2002; 45, 251, 2002.
19. *М.Г.Абрамян*, *Астрофизика*, 47, 657, 2004.
20. *Л.С.Марочник, А.А.Сучков*, *Галактика*, Наука, М., 1984.