АСТРОФИЗИКА

ТОМ 48 АВГУСТ, 2005 ВЫПУСК 3

УДК: 524.8:531.51

КОСМОЛОГИЧЕСКИЙ СКАЛЯР В ТЕОРИИ ЙОРДАНА-БРАНСА-ДИККЕ. I

Р.М.АВАКЯН, Г.Г.АРУТЮНЯН, В.В.ПАПОЯН

Поступила 21 января 2005

Принята к печати 6 апреля 2005

Рассматривается вариант теории Йордана-Бранса-Дикке (ЙБД) при наличии космологического скаляра, записанного таким образом, чтобы при переходе к эйнштейновскому представлению он обращался в обычную космологическую постоянную ОТО. Работа разбита на два этапа. В I части рассмотрены космологические решения, полученные для эйнштейновского представления теории ЙБД, т.е. при наличии минимально связанного скалярного поля. Во II части будут исследованы космологические решения в собственном представлении теории ЙБД с самосогласованным скалярным полем. Анализ полученных решений представляет интерес в связи с современными представлениями об эволюции Вселенной, в частности с обнаружением ускорения космологического расширения и оценками плотности темной материи и темной энергии.

1. *Введение.* Скалярно-тензорная теория тяготения Йордана-Бранса-Дикке (теория ЙБД) [1-8] физически наиболее содержательная и полно разработанная модификация общей теории относительности (ОТО). В этой теории, помимо метрики пространства-времени, гравитационное поле описывается также дальнодействующим скалярным безмассовым полем, потенциал которого $y = y(x^{\mu})$ называют гравитационным скаляром и который в каждой точке заменяет собой ньютоновскую константу тяготения G. Скалярное поле теории ЙБД в соответствии с идеями Маха определяется всей материей во Вселенной, оно проявляется только через гравитационное взаимодействие, поэтому в теории ЙБД выполняется требование слабого принципа эквивалентности - пробные частицы и лучи света движутся по геодезическим.

Недавние наблюдения вспышек далеких сверхновых [9-11] существенно изменили наши представления о Вселенной, в частности, основываясь на результатах этих наблюдений, можно считать установленным, что

- динамикой космологического расширения управляет "антигравитация";

- космологическое расширение ускоряется;

- во Вселенной доминирует вакуум, плотность энергии которого намного превосходит плотность всех "обычных" форм космической материи вместе взятых (часть космологов считает доминирующей некую гипотетическую субстанцию - *квинтэссенцию*, подобную вакууму по свойствам).

"Антигравитационный" механизм был введен Эйнштейном [12] путем включения в уравнения ОТО общековариантного слагаемого, содержащего космологическую постоянную Λ

$$G_{\alpha,\beta} - \Lambda g_{\alpha,\beta} = \kappa_0 T_{\alpha,\beta}\,, \quad \kappa_0 = \frac{8\pi G}{c^4}\,.$$

Нетрудно убедиться в том, что это дополнительное слагаемое обеспечивает отталкивание. Для этого рассмотрим простую модель - шар радиуса r_0, в центре и на поверхности которого расположены взаимодействующие пробные частицы. Комбинация уравнений космологической задачи ОТО дает

$$\frac{d^2}{dt^2}(ar_0) = \frac{1}{3}\Lambda(ar_0) - \frac{GM}{(ar_0)^2}, \quad M = \frac{4\pi}{3}(ar_0)^3(\varepsilon + 3P)$$ - масса шарика ,

где P - давление, а ε - плотность энергии. Легко видеть, что обусловленная космологической постоянной сила,

$$F_\Lambda = \frac{1}{3}\Lambda(ar_0)$$

растет с увеличением расстояния между взаимодействующими частицами и имеет отталкивательный характер при $\Lambda > 0$.

Отсылая интересующихся историей отказа Эйнштейна от введения Λ-члена и последующего возвращения его в уравнения космологической задачи ОТО к обстоятельному обзору Вейнберга [13], перейдем к вопросу о способе описания вакуума в классической теории гравитации. В квантовой теории энергия основного состояния вакуума отлична от нуля:

$$T_{\mu\nu}^{\text{вак}} \equiv \left\langle \text{вак} \middle| T_{\mu\nu} \middle| \text{вак} \right\rangle = \varepsilon_{\text{вак}}\, g_{\mu\nu}\,,$$

поэтому Λ/κ_0 можно считать средней плотностью энергии вакуума, что подкрепляется также лоренц-инвариантностью обеих величин. Заметим, что если в выражении для тензора энергии-импульса (ТЭИ) идеальной жидкости

$$T_{\mu\nu} = (P+\varepsilon)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} \tag{1}$$

положить $P = -\varepsilon$, то ТЭИ вакуума и ТЭИ идеальной жидкости совпадают, если считать $\varepsilon_{\text{вак}} = \Lambda/\kappa_0$, другими словами, идеальная жидкость с уравнением состояния $P = -\varepsilon$ может служить удовлетворительной моделью вакуума.

Допустим, что уравнение состояния записано в неявной форме

$$P = P(n), \quad \varepsilon = \varepsilon(n),$$

где n - плотность числа частиц. Поскольку для внутренней энергии при изоэнтропическом процессе $dE = d(\varepsilon/n) = -PdV$, то

$$\frac{d\varepsilon}{dn} = \frac{(\varepsilon + P)}{n}\,,$$

следовательно при $P = -\varepsilon$ имеем $d\varepsilon/dn = 0$, поэтому как ε, так и P от n не зависят, т.е. не существует параметров, меняя которые можно изменить плотность энергии. Понятно, что в таких средах при изменении объема плотность энергии остается постоянной. Действительно, $dE \equiv d(\varepsilon V) = -PdV$, следовательно, $Vd\varepsilon = -(\varepsilon + P)dV$ и при $\varepsilon = -P$ плотность энергии $\varepsilon = \mathrm{const}$. Таким образом, есть все основания для утверждения: *в средах с уравнением состояния $\varepsilon = -P$ возможно проявление "антигравитационного" механизма.*

2. *Космологический скаляр в теории ЙБД*. Аргументы в пользу введения космологической постоянной в ОТО достаточно убедительны, поэтому имеет смысл ввести аналогичную величину в теорию ЙБД. Предположив, что поле этой величины должно быть скалярным, но не может быть динамическим (его изменения должны управляться гравитационным скаляром $y = y(x^\mu)$), введем в действие теории ЙБД космологический скаляр $\phi = \phi(y)$, аналогично тому, как вводится космологическая постоянная в действие ОТО.

$$W = \frac{1}{c}\int\sqrt{-g}\left[-\frac{c^4}{16\pi}y\left(R + 2\phi(y) - \zeta\frac{y^{,\mu}y_{,\mu}}{y^2}\right) + L_m\right]d^4x\,, \tag{2}$$

здесь ζ - безразмерная константа связи теории ЙБД. Приравнивая нулю результат независимого варьирования (2) по $g^{\alpha\beta}$ и y, получим уравнения теории ЙБД с космологическим скаляром

$$\nabla_\alpha y^{,\alpha} = \frac{\kappa T}{3+2\zeta} + \frac{2y}{3+2\zeta}\left(\phi - y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right), \quad \kappa = \frac{8\pi}{c^4}\,, \tag{3}$$

$$G^\mu_\nu = \frac{\kappa}{y}\left(T^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu\frac{T}{3+2\zeta}\right) + \frac{\nabla_\nu y^{,\mu}}{y} + \zeta\left(\frac{y_{,\nu}y^{,\mu}}{y^2} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu\frac{y_{,\alpha}y^{,\alpha}}{y^2}\right) + \frac{\delta^\mu_\nu}{3+2\zeta}\left[(1+2\zeta)\phi + 2y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]. \tag{4}$$

Наряду с собственным представлением (3) и (4), теорию ЙБД можно формулировать и в эйнштейновском представлении [14-16], которое получается из собственного конформным преобразованием метрики

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{y}{y_0}g_{\mu\nu}\,, \quad y_0 = \frac{2(2+\zeta)}{G(3+2\zeta)}\,. \tag{5}$$

Полевые уравнения эйнштейновского представления являются следствием варьирования конформно преобразованного действия (2)

$$\tilde{W} = \frac{1}{c}\int\sqrt{-\tilde{g}}\left[-\frac{y_0}{2\kappa}\left(\tilde{R} + 2\Lambda\right) + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} + \tilde{L}_m\right]d^4x\,, \tag{6}$$

и имеют вид

$$\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\psi_{,\beta} = 0\,, \tag{7}$$

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} - \Lambda\tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\kappa}{y_0}\left(\tilde{T}_{\alpha\beta} + \tilde{\tau}_{\alpha\beta}\right), \quad \tilde{\tau}_{\alpha\beta} = \psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\nu}\psi_{,\mu}\psi_{,\nu}\,, \tag{8}$$

где

$$\psi_{,\alpha} = \frac{y_{,\alpha}}{y}\sqrt{\frac{(3+2\zeta)y_0}{2\kappa}}. \tag{9}$$

Они отличаются от уравнений ОТО с дополнительным источником в виде минимально связанного скалярного поля $\psi(x^\alpha)$ только переобозначенной константой тяготения. Собственное и эйнштейновское представления теории ЙБД отвечают разному выбору масштабов измерений: в собственном представлении постоянны $\hbar$, c и массы покоя частиц m, но переменна G, в эйнштейновском $\hbar$, c, $G=\text{const}$, а массы покоя меняются согласно $\tilde{m} = (y/y_0)^{-1/2}\cdot m$, т.е. в этом представлении массы покоя частиц в разных пространственно-временных точках различны, что нарушает принцип геодезичности движения. В некоторых случаях эйнштейновское представление оказывается проще собственного. В частности, в космологических задачах с метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right], \quad k=-1,0,+1 \tag{10}$$

тензор энергии-импульса минимально связанного скалярного поля (8) в эйнштейновском представлении имеет гидродинамическую природу

$$\tilde{\tau}_0^0 = -\tilde{\tau}_1^1 = -\tilde{\tau}_2^2 = -\tilde{\tau}_3^3 = \frac{1}{2}\dot{\psi}^2.$$

(Здесь и далее точка над символом обозначает дифференцирование по времени). Иначе говоря, скалярное поле $\psi(t)$ эйнштейновского представления проявляет себя как покоящаяся идеальная жидкость с предельно жестким уравнением состояния

$$\tilde{\varepsilon}^s = \tilde{P}^s = \frac{1}{2}\dot{\psi}^2,$$

поэтому ряд качественных результатов можно получить, анализируя динамику той или иной космологической модели, не интегрируя полевых уравнений.

Исходя из факта существования собственного и эйнштейновского представлений теории ЙБД в конформно-соответствующих пространствах, установим функциональную зависимость $\psi(y)$, требуя, чтобы в эйнштейновском представлении скаляр $\phi(y)$ обращался в космологическую постоянную, что дает

$$\phi(y) = \frac{y}{y_0}\Lambda. \tag{11}$$

Предполагая, как это принято, что космическая материя - это идеальная жидкость с тензором энергии-импульса (1), состояние которой описывается уравнением

$$P = \alpha\varepsilon, \tag{12}$$

где

$$\alpha = \begin{cases} -1 & \text{модель вакуума,} \\ 0 & \text{эра преобладания вещества,} \\ 1/3 & \text{доминантность излучения,} \\ 1 & \text{предельно жесткое состояние,} \end{cases}$$

подставив (10) в пары (3)-(4) и (7)-(8), получим уравнения космологической задачи теории ЙБД как в собственном

$$\frac{1}{R^3}\frac{d}{dt}\left(\dot{y}R^3\right) = \frac{\kappa(1-3\alpha)}{3+2\zeta}\varepsilon\,, \tag{13}$$

$$3\left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right) = \frac{\kappa\varepsilon}{y} - \frac{3\dot{R}}{R}\frac{\dot{y}}{y} + \frac{\zeta}{2}\frac{\dot{y}^2}{y^2} + \frac{y}{y_0}\Lambda\,, \tag{14}$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -\frac{\kappa\alpha\varepsilon}{y} - \frac{\ddot{y}}{y} - \frac{2\dot{R}}{R}\frac{\dot{y}}{y} - \frac{\zeta}{2}\frac{\dot{y}^2}{y^2} + \frac{y}{y_0}\Lambda\,, \tag{15}$$

так и в эйнштейновском представлениях

$$\frac{d}{d\eta}\left(\psi_{,\eta}a^3\right) = 0\,, \quad \Rightarrow \quad \psi_{,\eta} = \frac{c}{a^3}\,, \quad d\eta = \sqrt{\frac{y}{y_0}}\,dt\,, \tag{16}$$

$$3\left(\frac{a_{,\eta}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = \frac{\kappa}{y_0}\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\psi_{,\eta}^2\right) + \Lambda\,, \tag{17}$$

$$\frac{2a_{,\eta\eta}}{a} + \frac{a_{,\eta}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -\frac{\kappa}{y_0}\left(\alpha\varepsilon + \frac{1}{2}\psi_{,\eta}^2\right) + \Lambda\,. \tag{18}$$

если учесть (12) и ввести $n = 3(1+\alpha)$. В результате $\varepsilon(t) = \varepsilon_0(a_0/a)^n$, $n = 0,\ 3,\ 4,\ 6$.

Масштабный фактор в собственном представлении, в отличие от аналогичной величины $a(t)$ в эйнштейновском, обозначен $R(t)$. И в собственном, и в эйнштейновском представлении вследствие ковариантного постоянства тензора энергии-импульса вещества (1) имеем

$$\dot{\varepsilon} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -n\frac{\dot{a}}{a} \tag{19}$$

(индексом 0 снабжены величины в момент времени, который обычно относят к текущему моменту).

Для решения задачи в эйнштейновском представлении с учетом (16) и (17) из (18) имеем

$$\dot{a}^2 = \frac{E_n}{3}a^{2-n} + \frac{\Lambda}{3}\cdot a^2 - k + \frac{4\pi}{3y_0}\frac{c^2}{a^4}\,. \tag{20}$$

Константа "c" появилась в результате интегрирования (16), и если скалярного поля нет, то $c = 0$. Поэтому в ОТО при $k = 0$ уравнение (20) принимает вид

$$\frac{\dot a}{a} = \pm\sqrt{\frac{\chi_0\varepsilon_0}{3}\left(\frac{a_0}{a}\right)^n + \frac{\Lambda}{3}}\,, \quad \chi_0 = 8\pi G \tag{21}$$

или

$$\frac{da^{n/2}}{dt} = \pm\frac{n}{2}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\sqrt{a^n + \frac{\chi_0\varepsilon_0}{\Lambda}a_0^n} \tag{22}$$

и имеет следующие решения:

а) для модели вакуума $\alpha = -1$ ($n = 0$),

$$a = a_0 e^{H_0(t-t_0)}, \quad H_0 = \sqrt{\frac{\chi_0\varepsilon_0 + \Lambda}{3}}, \quad H(t_0) = H_0\,: \tag{23}$$

б) для остальных моделей ($n = 3,\ 4,\ 6$)

$$a^{n/2} = \frac{A_n}{2}e^{\chi_n(t-t_0)} - \frac{E_n}{2A_n}e^{-\chi_n(t-t_0)}, \tag{24}$$

$$E_n = \frac{\chi_0\varepsilon_0 a_0^n}{\Lambda}, \quad A_n = a_0^{n/2} + \sqrt{a_0^n + E_n}, \quad \chi_n = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,. \tag{25}$$

При $\Lambda = 0$

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^{n/2} = 1 + \frac{n}{2}\sqrt{\frac{\chi_0\varepsilon_0}{3}}(t-t_0)\,. \tag{26}$$

В эйнштейновском представлении при $k=0$ и введенных обозначениях $H(t) = \dot a/a$, $q = -\ddot a a/\dot a^2$ из (16) имеем:

$$\psi(t) = \frac{c}{a^3}, \quad c = a_0^3\sqrt{\frac{2H_0^2(1+q_0)y_0}{8\pi} - \frac{n\varepsilon_0}{3}}\,, \tag{27}$$

и (20) можно представить в виде

$$\frac{1}{3}\frac{da^3}{dt} = \sqrt{\frac{E_n}{3}a^{6-n} + \frac{\Lambda}{3}a^6 + C}\,, \quad E_n = \frac{8\pi}{y_0}\varepsilon_0 a_0^n\,, \quad C = \frac{4\pi c^2}{3y_0}. \tag{28}$$

Для модели вакуума $\alpha = -1$ ($n = 0$), модели с преобладанием вещества $\alpha = 0$ ($n = 3$) и модели с предельно жестким уравнением состояния $\alpha = 1$ ($n = 6$) уравнение (28) удобно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(a^3 + \delta_n^3\frac{E_3}{2\Lambda}\right) = \chi_n\sqrt{\left(a^3 + \delta_n^3\frac{E_3}{2\Lambda}\right)^2 + B_n^2}\,, \tag{29}$$

где

$$\chi_n = \begin{cases}\sqrt{3(E_0+\Lambda)} & n = 0\\ \sqrt{3\Lambda} & n = 3, n = 6\end{cases}. \tag{30}$$

$$B_n^2 = \begin{cases}3C/(E_0+\Lambda) & n = 0\\ \left(12C\Lambda - E_3^2\right)/4\Lambda^2 & n = 3\\ (3C+E_6)/\Lambda & n = 6.\end{cases} \tag{31}$$

Интегрируя (28), получаем

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 = \frac{A_n}{2} e^{\chi_n(t-t_0)}\left[1-\frac{D_n^2}{A_n^2}e^{-2\chi_n(t-t_0)}\right] - \delta_n^3 \frac{E_3}{2\Lambda a_0^3}, \tag{32}$$

где

$$A_n = 1+\delta_n^3\frac{E_3}{2a_0^3\Lambda}+\sqrt{\left(1+\delta_n^3\frac{E_3}{2a_0^3\Lambda}\right)^2+D_n^2}, \quad D_n^2=\frac{B_n^2}{a_0^6}. \tag{33}$$

3. *Заключение.* Из (18) и (20) для, так называемого, коэффициента "замедления" получаем

$$q = 2-\frac{3(1-\alpha)\varepsilon_0+(3y_0\Lambda/4\pi)(a/a_0)^n}{2\varepsilon_0+(a/a_0)^n\left(c^2/a^6+y_0\Lambda/4\pi\right)}, \tag{34}$$

откуда для $a=a_0$, $\alpha=0$, $c=0$, $\Lambda=0 \Rightarrow q=0.5$. В общем случае имеет смысл выписать разложение (32) по степеням $(t-t_0)$, то есть исследовать поведение q во времена, близкие к t_0 (текущему моменту)

$$\frac{a}{a_0}\approx 1+\frac{\chi_n\left(A_n^2+D_n^2\right)}{6A_n}(t-t_0)+\chi_n^2\left[\frac{A_n^2-D_n^2}{12A_n}-\frac{\left(A_n^2-D_n^2\right)^2}{36A_n^2}\right](t-t_0)^2+\ldots \tag{35}$$

Из (35) для q в момент времени t_0 получим

$$q_0=\frac{-3z}{z^2+D_n^2}+2, \quad z\equiv 1+\delta_n^3\frac{E_3}{2a_0^3\Lambda}, \quad n=0,3,6 \tag{36}$$

откуда

$$q_0=\frac{-3}{1+3C/a_0^6(E_0+\Lambda)}+2, \quad P=-\varepsilon, \tag{37}$$

$$q_0=+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\frac{\left(\Lambda-3C/a_0^6\right)}{\Lambda+3C/a_0^6+E_3/a_0^3}, \quad P=0, \tag{38}$$

$$q_0=\frac{-3\Lambda}{\Lambda+3C/a_0^6+E_6/a_0^6}+2, \quad P=\varepsilon. \tag{39}$$

Наличие перехода от фазы замедления к фазе ускорения означает, что в некоторый момент времени коэффициент "замедления" обращается в нуль. Современному состоянию соответствует случай $P=0$. Как видно из формулы (38), разумным подбором параметров можно обеспечить выполнения условия $q_0=0$ и соответственно переход от фазы замедления к фазе ускорения.

Кафедра теоретической физики им. Г.С.Саакяна ЕГУ, Ереван, Армения, e-mail: ravag@freenet.am, ghar@freenet.am

THE COSMOLOGICAL SCALAR IN JORDAN-BRANS-DICKE THEORY. I

R.M.AVAGIAN, G.H.HARUTYUNYAN, $\boxed{\text{V.V.PAPOYAN}}$

The Jordan-Brans-Dicke (JBD) theory variant in the presence of cosmological scalar is considered. The latter is presented in such a way that under the transition into the Einsteinian representation it transfers into usual cosmological constant GR. The work is divided into two stages. In the first part the cosmological solutions for the Einsteinian representation of the JBD theory (i.e. in the presence of minimally coupling scalar field) are considered. In the second part cosmological solutions in the own representation of the JBD theory with the self-consistent scalar field are subject to investigation. The analysis of obtained solutions is of interest in connection with the contemporary conceptions about the Universe expansion, in particular with the discovery of accelerated cosmological expansion and estimation of dark matter and dark energy density.

Key words: *cosmology:scalar-tensor theory:cosmological solutions*

ЛИТЕРАТУРА

1. *P.Jordan*, Schwercraft und Weltall, Braunschwexig, 1955.
2. *P.Jordan*, Z. Physik, **157**, 112, 1959.
3. *C.Brans*, *R.Dicke*, Phys. Rev., **124**, 925, 1961.
4. *C.Brans*, Phys. Rev., **125**, 2194, 1962.
5. *Г.С.Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
6. *Г.С.Саакян*, в сб.: "Гравитация. Проблемы и перспективы", Наукова думка, Киев, 1972.
7. *R.H.Singh*, *L.N.Ray*, Gen. Rel. Grav., **15**, 875, 1983.
8. *V.Papoyan*, Phys. of Particle and Nuclei, **34**, 375, 2003.
9. *A.G.Riess*, *P.Nugent*, Astron. J., **116**, 1089, 1998.
10. *S.Perlmutter*, *G.Aldering*, *G.Goldhaber et al.*, Astrophys. J., **517**, 565, 1999.
11. *A.G.Riess*, *P.Nugent*, Astrophys. J., **560**, 49, 2001.
12. *A.Einstein*, Sitzung. Preuss. Akad. Wis. Phys. Math. Kl., **142**, 1917.
13. *S.Weinberg*, Rev. Mod. Phys., **61**, 1, 1989.
14. *R.Dicke*, Phys. Rev., **125**, 2163, 1962.
15. *R.Dicke*, Astrophys. J., **152**, 1, 1968.
16. *Г.Г.Арутюнян*, *В.В.Папоян*, Астрофизика, **44**, 483, 2001.