АСТРОФИЗИКА

ТОМ 48 ФЕВРАЛЬ, 2005 ВЫПУСК 1

УДК: 524.8:531.51

ПОВЕРХНОСТНАЯ ВАКУУМНАЯ ЭНЕРГИЯ И НАТЯЖЕНИЯ НА БРАНЕ В AdS-ПРОСТРАНСТВЕ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К МОДЕЛИ БРАН-МИРОВ

А.А.СААРЯН

Поступила 5 мая 2004
Принята к печати 15 ноября 2004

Исследованы вакуумные средние поверхностного тензора энергии-импульса, генерированные на бране в AdS пространстве-времени квантовыми флуктуациями скалярного поля с произвольным параметром связи. Предполагается, что на бране поле удовлетворяет граничным условиям смешанного типа. В качестве регуляризационной процедуры использован метод обобщенной дзета-функции. Рассмотрены обе области, расположенные слева (L-область) и справа (R-область) от брана. Показано, что поверхностные энергии для обеих этих областей содержат полюсные и конечные вклады. Выведены аналитические выражения для обеих частей. При вычислении полной поверхностной энергии, включающей вклады от L- и R-областей, в нечетных пространственных размерностях полюсные члены сокращаются. Индуцированный вакуумными квантовыми эффектами поверхностный тензор энергии-импульса соответствует генерации космологической постоянной на бране. Приведено приложение полученных результатов ко второй модели Рандалл-Сундрума.

1. *Введение.* Пространство-время анти-де-Ситтера (AdS) является максимально симметричным решением уравнений Эйнштейна с отрицательной космологической постоянной. В ранних исследованиях квантовой теории поля в AdS-фоне интерес к этому многообразию был обусловлен принципиальными вопросами квантования полей в искривленном пространстве-времени. Важность этих исследований особенно возросла, когда было показано, что AdS пространство-время описывает основное состояние в теориях расширенной супергравитации, моделей Калузы-Клейна и теории струн. В последние годы появление AdS/CFT соответствия и моделей бран-миров типа Рандалл-Сундрума привело к дальнейшей интенсификации исследований квантовых явлений на AdS-фоне. AdS/CFT соответствие (см. обзор [1]) представляет реализацию голографического принципа и связывает теории струн и супергравитации на AdS-фоне с конформной теорией поля на его границе. Это соответствие является мощным средством для исследований калибровочных теорий поля, в частности квантовой хромодинамики. Многие фундаментальные теории, объединяющие различные физические взаимодействия, естественно и самосогласованно формулируются в пространстве-времени с числом измерений больше четырех. В последнее время особое внимание стало

уделяться представлению о бран-мирах, в котором подразумевается локализация обычного вещества на трехмерном многообразии - бране, вложенном в объемлющее многомерное пространство, а дополнительные измерения доступны только гравитонам и, возможно, другим гипотетическим частицам, слабо взаимодействующим с веществом. В моделях бран-миров дополнительные измерения могут иметь большой или даже бесконечно большой размер и могут приводить к экспериментально наблюдаемым эффектам. Наличие больших дополнительных измерений позволяет редуцировать фундаментальный многомерный гравитационный масштаб к энергиям порядка 1 ТэВ [2-4] и тем самым разрешить проблему иерархии между планковским и электрослабым масштабами. Среди наиболее популярных сценариев бран-миров выделяются модели, предложенные Рандалл и Сундрумом [5,6]. Первая модель Рандалл-Сундрума основана на нефакторизуемой геометрии и содержит одно дополнительное измерение, являющееся S_1/Z_2 орбифолдом. Два брана с тремя пространственными измерениями и с противоположными натяжениями находятся в неподвижных точках орбифолда и вместе с отрицательной фоновой космологической постоянной являются источником пятимерной гравитации. Соответствующая пространственно-временная метрика содержит фактор, который экспоненциально зависит от радиуса дополнительной размерности. В сценарии, предложенном в [5], расстояние между бранами связано с вакуумным ожиданием безмассового скалярного поля (поле радиона). Для успешной реализации сценария необходим механизм стабилизации расстояния между бранами. Один из возможных механизмов, основанный на силах Казимира, генерированных квантовыми вакуумными флуктуациями фоновых полей, исследован в работах [7-15] для фоновой геометрии Рандалл-Сундрума и некоторых ее обобщений. Во второй модели Рандалл-Сундрума [6] имеется только один бран с положительным натяжением и одно бесконечное дополнительное измерение. Благодаря наличию экспоненциального фактора в метрике вклад последнего в пятимерный объем является конечным.

В предыдущей нашей работе [16] исследованы функция Вайтмана и вакуумные средние объемного тензора энергии-импульса для массивного скалярного поля с произвольным параметром связи с кривизной, удовлетворяющим граничным условиям Робина на двух параллельных бранах на $(D+1)$-мерном AdS-фоне. В частности, вычислены вакуумные силы, действующие на браны. Предельным переходом получены также соответствующие результаты для одного брана и рассмотрены приложения к первой модели Рандалл-Сундрума. В работах [17-19] на примерах плоских, сферических и цилиндрических границ на фоне пространства-времени Минковского показано, что вакумные средние тензора энергии-импульса скалярного поля на многообразиях с границами, наряду с объемной частью, содержат также поверхностный вклад, локализованный на границе многообразия. Формула для поверхностного тензора энергии-импульса скалярного поля для искривленного фона с произвольной гладкой границей выведена в [20]. Соответствующие вакуумные средние для равноускоренной плоской пластины исследованы в работе [21]. В настоящей работе вычислены вакуумные средние поверхностного тензора энергии-импульса скалярного поля, генерированные на бране в AdS пространстве-времени. Статья организована следующим образом. Во втором разделе сформулирована задача и приводятся основные формулы, использованные в дальнейших вычислениях. В разделе 3 методом обобщенной дзета-функции исследованы вакуумные средние поверхностного тензора энергии-импульса для L-области. Аналогичные результаты для R-области приведены в разделе 4. Раздел 5 посвящен приложению полученных результатов ко второй модели Рандалл-Сундрума. В заключении подытожены основные результаты.

2. *Поверхностный тензор энергии-импульса.* Рассмотрим скалярное поле $\varphi(x)$ на фоне $(D+1)$-мерного AdS пространства-времени с радиусом кривизны $1/k_D$ и линейным элементом

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = e^{-2k_D y}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2\,, \tag{1}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ - метрика D-мерного пространства-времени Минковского. Здесь и в дальнейшем латинские и греческие индексы пробегают значения $0, 1, ..., D$ и $0, 1, ..., D-1$, соответственно, и $x^D = y$. В случае произвольного параметра связи ζ с кривизной уравнение поля имеет вид

$$\left(g^{ik}\nabla_i\nabla_k + m^2 + \zeta R\right)\varphi(x) = 0\,. \tag{2}$$

Здесь ∇_i - оператор ковариантной производной, соответствующей метрике (1), m - масса кванта поля, $R = -D(D+1)k_D^2$ - скаляр Риччи AdS пространства-времени. Значения параметра связи $\zeta = 0$ и $\zeta = \zeta_c \equiv (D-1)/4D$ соответствуют минимально- и конформно- связанным скалярным полям, соответственно. Заметим, что преобразованием координат

$$z = e^{k_D y}/k_D\,. \tag{3}$$

метрика (1) приводится к конформно-плоскому виду.

Ниже будем предполагать, что поле удовлетворяет граничному условию смешанного типа (условие Робина) на бране, локализованном при $y=a$:

$$\left(\tilde{A} + \tilde{B}\,\partial_y\right)\varphi(x) = 0, \quad y = a\,, \tag{4}$$

с постоянными коэффициентами $\tilde{A}$, $\tilde{B}$. Это условие обобщает граничные условия Дирихле и Неймана и естественно возникает в моделях бран-миров. Наложение граничных условий приводит к модификации спектра нулевых колебаний рассматриваемого скалярного поля и в результате к изменению вакуумных средних физических величин по сравнению со случаем AdS-фона без границ. Вакуумные средние объемного тензора энергии-импульса, генерированные одним и двумя параллельными бранами, исследованы в нашей предыдущей работе [16]. Как показано в работе [20], тензор энергии-импульса скалярного поля на многообразиях с границами, наряду с объемной частью, содержит также поверхностный вклад, локализованный на границе многообразия. Для произвольной гладкой границы ∂M поверхностная часть тензора энергии-импульса представляется в виде

$$T_{ik}^{(surf)} = \delta(x; \partial M)\tau_{ik} , \tag{5}$$

где "односторонняя" дельта-функция $\delta(x; \partial M)$ локализует этот тензор на границе ∂M и

$$\tau_{ik} = \zeta\varphi^2 K_{ik} - (2\zeta - 1/2)h_{ik}\, \varphi n^l \nabla_l \varphi . \tag{6}$$

В формуле (6) n^l - внутренняя нормаль к границе, $h_{ik} = g_{ik} + n_i n_k$ - индуцированная на границе метрика, $K_{ik} = h_i^l h_k^m \nabla_l n_m$ - соответствующий тензор внешней кривизны. Для конформно связанного безмассового скалярного поля тензор (6) является безследовым. Целью настоящей работы является исследование вакуумных средних тензора (6), индуцированных на бране вакуумными флуктуациями фонового скалярного поля.

Пусть $\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\alpha^*(x)\}$ - полная система положительно- и отрицательно-частотных решений уравнения поля (2), удовлетворяющих граничному условию (4). Здесь коллективный индекс α соответствует набору квантовых чисел, определяющих решение. Разлагая оператор поля по собственным функциям $\varphi_\alpha(x)$, воспользовавшись стандартными коммутационными соотношениями и определением вакуумного состояния, для вакуумных средних поверхностного тензора энергии-импульса получим формулу

$$\langle 0|T_{ik}^{(surf)}|0\rangle = \delta(x; \partial M)\langle 0|\tau_{ik}|0\rangle, \quad \langle 0|\tau_{ik}|0\rangle = \sum_\alpha \tau_{ik}\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\alpha^*(x)\}, \tag{7}$$

где $|0\rangle$ - амплитуда соответствующего вакуумного состояния, и вид билинейной формы $\tau_{ik}\{\varphi, \psi\}$ определяется классическим тензором энергии-импульса (6).

Бран, локализованный при $y = a$, разделяет AdS-пространство на две области с координатами $-\infty < y < a$ (L-область) и $a < y < \infty$ (R-область). Свойства вакуума в этих областях разные, и мы рассмотрим их по отдельности. Соответствующие величины будем указывать индексами L и R, соответственно. Для компонент вектора нормали и тензора внешней кривизны имеем

$$n^{(j)l} = n^{(j)}\delta^l_D, \quad j = L, R, \quad n^{(L)} = -1, \quad n^{(R)} = 1,$$
$$K^{(j)}_{\mu\nu} = -n^{(j)}k_D g_{\mu\nu}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, D-1, \quad K^{(j)}_{DD} = 0. \tag{8}$$

С помощью этих соотношений и граничного условия (4) вакуумные средние поверхностного тензора энергии-импульса в областях $j=$ L, R выражаются через соответствующие средние квадрата поля, вычисленные на поверхности брана:

$$\langle 0|\tau^{(j)}_{\mu\nu}|0\rangle = -n^{(j)}g_{\mu\nu}\left[\zeta k_D - (2\zeta - 1/2)\tilde{A}/\tilde{B}\right]\langle 0|\varphi^2|0\rangle^{(j)}_{y=a}, \quad \langle 0|\tau^{(j)}_{DD}|0\rangle = 0. \tag{9}$$

Этот тензор пропорционален метрике на бране и поэтому является гравитационным источником типа космологической постоянной, локализованной на бране:

$$\langle 0|\tau^{(j)k}_l|0\rangle = \mathrm{diag}\left(\varepsilon^{(j)}, -p^{(j)}, \ldots, -p^{(j)}, 0\right), \tag{10}$$

с плотностью энергии $\varepsilon^{(j)}$, эффективным давлением $p^{(j)}$ и уравнением состояния $p^{(j)} = -\varepsilon^{(j)}$, $j=$ L, R.

3. ***Вакуумные средние поверхностного тензора энергии-импульса в L-области.*** Из симметрии рассматриваемой задачи следует, что в выражении для собственных функций переменные разделяются и часть, соответствующая координатам на бране, имеет стандартную плосковолновую структуру:

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{f_u(y)}{\sqrt{2\omega(2\pi)^{D-1}}}e^{-i\eta_{\mu\nu}k^\mu x^\nu}, \quad k^\mu = \left(\omega, \vec{k}\right), \quad \omega = \sqrt{k^2+u^2}, \quad k = \left|\vec{k}\right|, \tag{11}$$

где возможные значения постоянных разделения u определяются граничным условием и приводятся ниже. Уравнение для функции $f_u(y)$ получается подстановкой выражения (11) в уравнение поля (2) и имеет вид

$$-e^{Dk_D y}\frac{d}{dy}\left(e^{-Dk_D y}\frac{df_u}{dy}\right) + \left(m^2 + \zeta R\right)f_u = u^2 e^{2k_D y}f_u. \tag{12}$$

В L-области регулярное в пределе $y \to -\infty$ решение этого уравнения определяется выражением

$$f_u(y) = C_u e^{Dk_D y/2}J_\nu(uz), \tag{13}$$

где переменная z определена согласно (3), $J_\nu(x)$ - функция Бесселя и

$$\nu = \sqrt{(D/2)^2 - D(D+1)\zeta + m^2/k_D^2}. \tag{14}$$

Ниже мы будем рассматривать значения ζ, при которых ν является действительным. Для мнимых значений ν основное состояние становится неустойчивым [22]. Заметим, что для конформно-инвариантного безмассового скалярного поля $\nu = 1/2$ и функция Бесселя в (13) выражается через элементарные функции. Из граничного условия при $y=a$ следует, что возможные значения u являются решениями уравнения

$$\bar{J}_\nu(uz_a) = 0, \quad z_a \equiv e^{k_D a}/k_D , \tag{15}$$

где и в дальнейшем используется обозначение

$$\bar{F}(x) \equiv AF(x) + BxF'(x), \quad A = \tilde{A} + \tilde{B}k_D D/2 , \quad B = \tilde{B}k_D \tag{16}$$

для заданной функции $F(x)$. Обозначим через $u = u_{\nu,n}$, $n = 1, 2, ...$, положительные решения уравнения (15), расположенные в порядке возрастания, $u_{\nu,n} < u_{\nu,n+1}$. Постоянная C_u в формуле (13) определяется из условия ортонормировки собственных функций:

$$\int_{-\infty}^{a} dy e^{(2-D)k_D y} f_{u_{\nu,n}}(y) f_{u_{\nu,n'}}(y) = \delta_{nn'} . \tag{17}$$

Воспользовавшись стандартной формулой для интегралов, содержащих произведение функций Бесселя, получим

$$C_u^2 = -\frac{2uB}{k_D J_\nu(uz_a)\partial \bar{J}_\nu(uz_a)/\partial u}, \quad u = u_{\nu,n} . \tag{18}$$

Подставляя собственные функции (11) в соответствующую сумму по модам, после интегрирования по направлениям вектора $\bar{k}$ для вакуумной средней квадрата поля на поверхности брана в L-области получим

$$\langle 0|\varphi^2|0\rangle_{y=a}^{(L)} = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x)\varphi_\alpha^*(x) =$$

$$= -\frac{2k_D^{D-1}Bz_a^D}{(4\pi)^{(D-1)/2}\Gamma((D-1)/2)} \int_0^\infty dk k^{D-2} \sum_{n=1}^\infty \frac{u}{\sqrt{u^2+k^2}} \left. \frac{J_\nu(uz_a)}{\partial \bar{J}_\nu(uz_a)/\partial u} \right|_{u=u_{\nu,n}} , \tag{19}$$

где $\Gamma(x)$ - гамма-функция Эйлера. Эта величина расходится, и необходима некоторая регуляризационная процедура с последующей перенормировкой. В квантовой теории поля используются различные процедуры регуляризации расходящихся величин. Для выделения конечной части расходящегося выражения в формуле (19) мы воспользуемся методом, являющимся обобщением метода дзета-функции. Ранее метод дзета-функции широко использовался для вычисления энергии Казимира в различных геометриях границ (см., например, [23-33] и приведенные там ссылки).

Итак, вместо выражения в правой части (19) мы рассмотрим функцию

$$F_L(s) = -\frac{2k_D^{D-1}Bz_a^D \mu^{-1-s}}{(4\pi)^{(D-1)/2}\Gamma((D-1)/2)} \int_0^\infty dk k^{D-2} \sum_{n=1}^\infty \left(u^2+k^2\right)^{s/2} \left. \frac{uJ_\nu(uz_a)}{\partial \bar{J}_\nu(uz_a)/\partial u} \right|_{u=u_{\nu,n}} , \tag{20}$$

от комплексной переменной s, где, как обычно это делается в методе дзета-функции, для сохранения размерности выражения введен параметр μ размерности массы. Вычисляя интеграл по k с помощью стандартной формулы, получим

$$F_L(s) = -\frac{k_D^{D-1} B z_a^D \mu^{-1-s}}{(4\pi)^{(D-1)/2}\Gamma((D-1)/2)} B\left(\frac{D-1}{2}, -\frac{D-1+s}{2}\right)\zeta_L(s), \tag{21}$$

где $B(x, y)$ - бета функция Эйлера, и мы ввели обобщенную дзета-функцию

$$\zeta_L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{D+s} J_\nu(uz_a)}{\partial \bar{J}_\nu(uz_a)/\partial u}\bigg|_{u=u_{\nu,n}}. \tag{22}$$

Для вычисления вакуумных средних поверхностного тензора энергии-импульса необходимо найти аналитическое продолжение функции $F_L(s)$ для значения $s=-1$:

$$\langle 0|\varphi^2|0\rangle_{y=a}^{(L)} = F_L(s)|_{s=-1}. \tag{23}$$

Для аналитического продолжения представим функцию (22) в виде контурного интеграла в комплексной плоскости u:

$$\zeta_L(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_C du\, u^{D+s} \frac{J_\nu(uz_a)}{\bar{J}_\nu(uz_a)}, \tag{24}$$

где контур интегрирования C обходится в положительном направлении и состоит из полуокружности C_R большого радиуса R в правой полуплоскости с центром в точке $u=0$ и отрезка мнимой оси $(-iR, iR)$. Будем также предполагать, что точка $u=0$ обходится малой полуокружностью C_ρ радиуса ρ в правой полуплоскости. В пределе $R\to\infty$ внутри контура C содержатся все точки $u=u_{\nu,n}$, являющиеся простыми полюсами подинтегрального выражения в формуле (24). При достаточно малых s интеграл по полуокружности C_R стремится к нулю в пределе $R\to\infty$ и интеграл в правой части (24) представится в виде

$$\zeta_L(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} du\, u^{D+s} \frac{J_\nu(uz_a)}{\bar{J}_\nu(uz_a)} - \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}(D+1+s)\int_\rho^\infty du\, u^{D+s}\frac{I_\nu(uz_a)}{\bar{I}_\nu(uz_a)}, \tag{25}$$

где введена модифицированная функция Бесселя $I_\nu(x)$. Ниже мы рассмотрим предел $\rho\to 0$. В этом пределе первый интеграл в правой части формулы (25) стремится к нулю при $s=-1$ и не дает вклад в аналитическое продолжение функции $\zeta_L(s)$ в этой точке. Поэтому в дальнейшем мы опустим этот интеграл. Подставляя теперь соответствующее выражение для функции $\zeta_L(s)$ в формулу (21) и воспользовавшись соотношением

$$B\left(\frac{D-1}{2}, -\frac{D-1+s}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}(D+1+s) = \frac{\Gamma((D-1)/2)}{\Gamma(-s/2)\Gamma((D+1+s)/2)}, \tag{26}$$

для функции $F_L(s)$ получим

$$F_L(s)=\frac{(4\pi)^{(1-D)/2}k_D^{D-1}B(\mu z_a)^{-1-s}}{\Gamma(-s/2)\Gamma((D+1+s)/2)}\int_0^\infty du u^{D+s}\frac{I_\nu(u)}{\bar{I}_\nu(u)}. \qquad (27)$$

Это интегральное представление справедливо при $-(D+1)<\mathrm{Re}\,s<-D$. Заметим, что коэффициент перед интегралом в этой формуле является конечным при $s=-1$. Для аналитического продолжения выражения в правой части в точку $s=-1$, запишем интеграл в виде суммы интегралов по интервалам $(0,1)$ и $(1,\infty)$. Первый интеграл является конечным при $s=-1$. Для аналитического же продолжения второго интеграла мы воспользуемся асимптотическими разложениями модифицированной функции Бесселя и ее производной при больших значениях аргумента (см., например, [34]). Из этих разложений при $B\neq 0$ имеем

$$\frac{I_\nu(u)}{\bar{I}_\nu(u)}\sim\frac{1}{B}\sum_{l=0}^\infty\frac{w_l(\nu)}{u^{l+1}}, \qquad (28)$$

где коэффициенты $w_l(\nu)$ выражаются через соответствующие коэффициенты в разложениях функций $I_\nu(u)$ и $I'_\nu(u)$. Первые четыре коэффициента определяются выражениями

$$w_0(\nu)=1,\quad w_1(\nu)=\frac{1}{2}-\frac{A}{B},\quad w_2(\nu)=\frac{3}{8}-\frac{A}{B}+\left(\frac{A}{B}\right)^2-\frac{\nu^2}{2},$$
$$w_3(\nu)=\frac{3}{8}+\frac{3}{2}\left(\frac{A}{B}\right)^2-\left(\frac{A}{B}\right)^3+\frac{A}{B}\left(\nu^2-1\right)-\nu^2. \qquad (29)$$

Теперь, вычитая и добавляя к подинтегральному выражению в интеграле по $(1,\infty)$ первые N члены соответствующего асимптотического разложения, можно точно интегрировать асимптотическую часть. После этого формула (27) запишется в виде

$$F_L(s)=\frac{(4\pi)^{(1-D)/2}k_D^{D-1}(\mu z_a)^{-1-s}}{\Gamma(-s/2)\Gamma((D+1+s)/2)}\left\{B\int_0^1 du u^{D+s}\frac{I_\nu(u)}{\bar{I}_\nu(u)}+\right.$$
$$\left.+\int_1^\infty du u^{D+s}\left[B\frac{I_\nu(u)}{\bar{I}_\nu(u)}-\sum_{l=0}^N\frac{w_l(\nu)}{u^{l+1}}\right]-\sum_{l=0}^N\frac{w_l(\nu)}{D+s-l}\right\}. \qquad (30)$$

При $N\geq D-1$ оба интеграла в правой части конечны при $s=-1$, и функция $F_L(s)$ имеет простой полюс, соответствующий слагаемому $l=D-1$ в последней сумме правой части. В результате, среднее значение квадрата поля и, через формулу (10), вакуумное среднее поверхностного тензора энергии-импульса содержат полюсные и конечные части:

$$\langle 0|\varphi^2|0\rangle_{y=a}^{(L)}=\left\langle\varphi^2\right\rangle_{\mathrm{p}}^{(L)}+\left\langle\varphi^2\right\rangle_{\mathrm{f}}^{(L)}. \qquad (31)$$

Из разложения Лорана правой части (30) для полюсного и конечного вкладов получим

$$\langle\varphi^2\rangle_{\rm p}^{(L)} = -\frac{k_D^{D-1} w_{D-1}(\nu)}{2^{D-1}\pi^{D/2}\Gamma(D/2)(s+1)},$$

$$\langle\varphi^2\rangle_{\rm f}^{(L)} = \frac{k_D^{D-1}}{2^{D-1}\pi^{D/2}\Gamma(D/2)}\left\{B\int_0^1 du\,u^{D-1}\frac{I_\nu(u)}{\bar{I}_\nu(u)} + \int_1^\infty du\,u^{D-1}\left[B\frac{I_\nu(u)}{\bar{I}_\nu(u)} - \sum_{l=0}^{N}\frac{w_l(\nu)}{u^{l+1}}\right] - \right. \tag{32}$$
$$\left. - \sum_{l=0,l\neq D-1}^{N}\frac{w_l(\nu)}{D-l-1} + w_{D-1}(\nu)\left[\ln(\mu z_a) + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{D}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}.$$

где $\psi(x)$ - диагамма-функция. Исходя из (10) и (31), аналогичное расщепление на полюсные и конечные части можно написать для поверхностной плотности энергии в L-области:

$$\varepsilon^{(L)} = \varepsilon_{\rm p}^{(L)} + \varepsilon_{\rm f}^{(L)}, \quad \varepsilon_{\rm s}^{(L)} = \left[\zeta k_D - (2\zeta - 1/2)\tilde{A}/\tilde{B}\right]\langle\varphi^2\rangle_{\rm s}^{(L)}, \quad {\rm s} = {\rm p}, {\rm f}\,, \tag{33}$$

а также для вакуумных натяжений с помощью уравнения состояния $p^{(L)} = -\varepsilon^{(L)}$. Заметим, что полюсные части не зависят от координаты брана z_a, а в конечную часть эта зависимость входит только в логарифмическом члене, в комбинации с нормировочным масштабом μ. Появление в конечной части плотности энергии логарифмического члена, содержащего нормировочный масштаб μ, является следствием перенормировочной процедуры. Обсуждение роли этого параметра в вычислениях энергии Казимира можно найти в работе [23]. Наличие полюсного слагаемого в выражении для поверхностной плотности энергии является характерной чертой регуляризации методом дзета-функции. В вычислениях энергии Казимира оно найдено во многих геометриях границ на фоне пространства-времени Минковского. В схеме минимального вычитания за значение рассматриваемой физической величины берется главная часть соответствующего лорановского разложения, т.е. полюсная часть отбрасывается (см., например, [23]).

4. *Поверхностная плотность энергии и натяжения в R-области.* Рассмотрим теперь вакуум скалярного поля в области $a < y < \infty$ (R-область). Как и в предыдущем разделе, будем предполагать, что поле удовлетворяет граничному условию (4) на поверхности брана, локализованного в точке $y = a$. Чтобы иметь дело с дискретным набором мод для переменной u, можно ввести второй бран в точке $y = b > a$, на котором поле также удовлетворяет граничному условию. После построения дзета-функции для области $a < y < b$ соответствующая функция для R-области получается в пределе $b \to \infty$. После такой процедуры для вакуумной средней квадрата поля на бране получим

$$\langle 0|\varphi^2|0\rangle_{y=a}^{(R)} = F_R(s)|_{s=-1}\,, \tag{34}$$

где теперь

$$F_R(s) = -\frac{(4\pi)^{(1-D)/2}\, k_D^{D-1} B(\mu z_a)^{-1-s}}{\Gamma(-s/2)\Gamma((D+1+s)/2)} \int_0^\infty du u^{D+s} \frac{K_\nu(u)}{\bar{K}_\nu(u)}, \qquad (35)$$

а $K_\nu(u)$ - функция Макдональда. Эта формула отличается от соответствующей формулы для L-области заменой $I_\nu \to K_\nu$. Аналитическое продолжение функции $F_R(s)$ в точке $s=-1$ можно найти методом, аналогичным использованному в предыдущем разделе для L-области, с использованием асимптотических разложений для функции Макдональда и ее производной (см. [34]). Из этих разложений имеем

$$\frac{K_\nu(u)}{\bar{K}_\nu(u)} \sim -\frac{1}{B}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{w_l(\nu)}{u^{l+1}}, \qquad (36)$$

с теми же коэффициентами $w_l(\nu)$, что и в (28). Теперь, вычитая и добавляя к подинтегральному выражению первые N члены соответствующего асимптотического разложения, аналогично (30) получим

$$F_R(s) = -\frac{(4\pi)^{(1-D)/2}\, k_D^{D-1} (\mu z_a)^{-1-s}}{\Gamma(-s/2)\Gamma((D+1+s)/2)} \left\{ B\int_0^1 du u^{D+s} \frac{K_\nu(u)}{\bar{K}_\nu(u)} + \right.$$
$$\left. + \int_1^\infty du u^{D+s}\left[B\frac{K_\nu(u)}{\bar{K}_\nu(u)} + \sum_{l=0}^{N}(-1)^l \frac{w_l(\nu)}{u^{l+1}}\right] + \sum_{l=0}^{N}\frac{(-1)^l w_l(\nu)}{D+s-l}\right\}. \qquad (37)$$

При $N \geq D-1$ оба интеграла в этом выражении конечны при $s=-1$, и функция $F_R(s)$ имеет простой полюс в этой точке, представленный слагаемым $l=D-1$ последней суммы в правой части формулы (37). Теперь вакуумное среднее квадрата поля в R-области представится в виде суммы полюсного и конечного слагаемых:

$$\langle 0|\varphi^2|0\rangle_{y=a}^{(R)} = \langle \varphi^2\rangle_{\rm p}^{(R)} + \langle \varphi^2\rangle_{\rm f}^{(R)}, \qquad (38)$$

где для отдельных частей имеем

$$\langle \varphi^2\rangle_{\rm p}^{(R)} = \frac{(-1)^D k_D^{D-1} w_{D-1}(\nu)}{2^{D-1}\pi^{D/2}\Gamma(D/2)(s+1)},$$

$$\langle \varphi^2\rangle_{\rm f}^{(R)} = -\frac{k_D^{D-1}}{2^{D-1}\pi^{D/2}\Gamma(D/2)}\left\{ B\int_0^1 du u^{D-1}\frac{K_\nu(u)}{\bar{K}_\nu(u)} + \int_1^\infty du u^{D-1}\left[B\frac{K_\nu(u)}{\bar{K}_\nu(u)} - \sum_{l=0}^{N}\frac{w_l(\nu)}{(-u)^{l+1}}\right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{l=0, l\neq D-1}^{N}\frac{(-1)^l w_l(\nu)}{D-l-1} + (-1)^D w_{D-1}(\nu)\left[\ln(\mu z_a) + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{D}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}. \qquad (39)$$

С помощью этих формул получим аналогичное расщепление для поверхностной плотности энергии в R-области:

$$\varepsilon^{(R)} = \varepsilon_{\rm p}^{(R)} + \varepsilon_{\rm f}^{(R)}, \quad \varepsilon_{\rm s}^{(R)} = -\left[\zeta k_D - (2\zeta - 1/2)\tilde{A}/\tilde{B}\right]\langle\varphi^2\rangle_{\rm s}^{\bar{B}}, \quad {\rm s} = {\rm p}, {\rm f}, \qquad (40)$$

и через уравнение состояния для вакуумных натяжений.

Полная поверхностная энергия на бране получается суммированием найденных выше вкладов от L- и R-областей:

$$\varepsilon = \varepsilon^{(L)} + \varepsilon^{(R)}. \tag{41}$$

Теперь, сопоставляя формулы для полюсных частей, заключаем, что при вычислении полной поверхностной энергии в нечетных пространственных размерностях (D - нечетное число) эти части сокращаются. В частности, выбирая $N = D - 1$, для полной поверхностной энергии получим формулу

$$\varepsilon = \frac{k_D^D\left[2\zeta - (4\zeta - 1)\tilde{A}/B\right]}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(D/2)}\left\{B\int_0^1 du u^{D-1}\left[\frac{I_\nu(u)}{\bar{I}_\nu(u)} + \frac{K_\nu(u)}{\bar{K}_\nu(u)}\right] + \right.$$

$$\left. + \int_1^\infty du u^{D-1}\left[B\left(\frac{I_\nu(u)}{\bar{I}_\nu(u)} + \frac{K_\nu(u)}{\bar{K}_\nu(u)}\right) - 2\sum_{l=0}^{(D-3)/2}\frac{w_{2l+1}(\nu)}{u^{2l+2}}\right] - 2\sum_{l=0}^{(D-3)/2}\frac{w_{2l+1}(\nu)}{D-2l-2}\right\}, \tag{42}$$

где коэффициенты $w_l(\nu)$ определяются соотношением (28). Заметим, что эта величина не зависит от нормировочного масштаба μ. Конкретные численные расчеты, проведенные нами по этой формуле для случая $D = 3$, показывают, что, в зависимости от отношения коэффициентов в граничном условии (4), генерированная вакуумными флуктуациями космологическая постоянная может быть как положительной, так и отрицательной.

5. *Приложение ко второй модели Рандалл-Сундрума.* Во второй модели Рандалл-Сундрума имеется один бран на фоне 5-мерного AdS пространства-времени с Z_2-симметрией (симметрия относительно отражения $y \to -y$). Здесь мы рассмотрим случай произвольной размерности. Для брана, локализованного при $y = 0$, соответствующая метрика определяется линейным элементом

$$ds^2 = e^{-2k_D|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2, \tag{43}$$

а скаляр Риччи имеет вид

$$R = -D(D+1)k_D^2 + 4Dk_D\,\delta(y). \tag{44}$$

Рассмотрим фоновое скалярное поле с функционалом действия

$$S = \frac{1}{2}\int d^D x dy\sqrt{|g|}\left\{g^{ik}\partial_i\varphi\partial_k\varphi - \left[m^2 + c\,\delta(y) + \zeta R\right]\varphi^2\right\}, \tag{45}$$

где постоянная c определяет поверхностный массовый член. Вытекающее отсюда уравнение поля имеет вид

$$\nabla_l\nabla^l\varphi + \left[m^2 + c\,\delta(y) + \zeta R\right]\varphi = 0. \tag{46}$$

Соответствующие собственные функции теперь можно представить в виде (11), где функции $f_u(y)$ являются решениями уравнения

$$-e^{Dk_D|y|}\frac{d}{dy}\left(e^{-Dk_D|y|}\frac{df_u}{dy}\right) + \left[m^2 + (c + 4D\zeta k_D)\delta(y) - D(D+1)\zeta k_D^2\right]f_u = u^2 e^{2k_D|y|}f_u. \tag{47}$$

Наличие δ-функции в этом уравнении приводит к граничному условию для $f_u(y)$. Это условие получается интегрированием (47) по бесконечно малой окрестности точки $y=0$. В предположении, что функция $f_u(y)$ является непрерывной в этой точке, получим

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{df_u(y)}{dy}\bigg|_{y=-\beta}^{y=\beta}=(c+4D\zeta k_D)f_u(0),\tag{48}$$

где $\beta>0$. Из Z_2-симметрии модели следует, что $f_u(-y)=f_u(y)$. С учетом этого, соотношение (48) приводит к граничному условию при $y=0$, соответствующему (4) с отношением коэффициентов

$$\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}=-\frac{1}{2}(c+4D\zeta k_D).\tag{49}$$

Таким образом, поверхностные вакуумные средние квадрата поля и тензора энергии-импульса в модели Рандалл-Сундрума даются формулами раздела 4 для R-области с $a=0$ и отношением коэффициентов (49).

6. *Заключение.* В данной работе исследованы поверхностная плотность энергии и натяжения, индуцированные на бране вакуумными флуктуациями массивного скалярного поля на фоне AdS пространства-времени. Рассмотрен случай скалярного поля с произвольным значением параметра связи с кривизной и удовлетворяющего граничному условию Робина на поверхности брана. Поверхностный вакуумный тензор энергии-импульса пропорционален метрике на бране и соответствует гравитационному источнику типа космологической постоянной. В квантовой теории поля на многообразиях с границами хорошо известно, что вакуумные средние физических величин, квадратичных по оператору поля, расходятся на границе и для выделения соответствующих конечных частей необходима некоторая регуляризационная процедура с последующей перенормировкой. В качестве такого метода здесь использован метод дзета-функции, который ранее широко применялся в вычислениях энергии Казимира для различных геометрий границ. С помощью теоремы Коши о вычетах построены интегральные представления для дзета функций L- и R-областей. Для аналитического продолжения соответствующих интегралов мы вычитаем и добавляем к подинтегральному выражению соответствующее асимптотическое разложение при больших значениях переменной интегрирования. В результате, дзета-функция представляется в виде суммы двух слагаемых. Первое из них конечно в физической точке и легко вычисляется численно. Во втором же интеграле аналитическое продолжение реализуется элементарным интегрированием. Поверхностная плотность энергии и натяжения для отдельных L- и R-областей содержат полюсные и конечные вклады. Наличие полюсных слагаемых является характерной чертой дзета-регуляризации. В минимальной схеме перенормировки эти слагаемые отбрасываются. При вычислении суммарной поверхностной энергии,

включающей вклады от L- и R-областей, в нечетных размерностях фонового пространства полюсные части сокращаются. В этом случае суммарную поверхностную энергию можно вычислить непосредственно по формуле (42). В зависимости от значений постоянных в граничном условии (4), индуцированная вакуумными флуктуациями космологическая постоянная может быть как положительной, так и отрицательной. В полной энергии Казимира сокращение полюсных частей от разных сторон гладкой границы обнаружено во многих рассмотренных в литературе ситуациях. В разделе 5 рассмотрены приложения полученных результатов к модели Рандалл-Сундрума. Здесь смешанные граничные условия для фонового скалярного поля являются естественным следствием Z_2-симметрии модели. Отношение коэффициентов в граничном условии выражается через коэффициент поверхностного массового члена в действии поля.

Работа выполнена в рамках гранта 0887 Министерства образования и науки Республики Армения.

Ереванский государственный университет,
Армения, e-mail: saharyan@server.physdep.r.am

SURFACE VACUUM ENERGY AND STRESSES ON A BRANE IN AdS SPACE WITH AN APPLICATION TO THE BRANE-WORLD MODEL

A.A.SAHARIAN

The vacuum expectation values of the surface energy-momentum tensor generated on a brane in AdS bulk by the quantum fluctuations of a scalar field with an arbitrary curvature coupling parameter are investigated. It is assumed that the field obeys the mixed boundary condition on the brane. As a regularization procedure the generalized zeta function method is used. Both regions on the left (L-region) and on the right (R-region) of the brane are considered. It is shown that the surface energies for these regions contain pole and finite contributions. Analytic expressions for both these parts are derived. In calculations of the total surface energy including the contributions from L- and R-regions in odd spatial dimensions the pole parts cancel. The surface energy-momentum tensor induced by vacuum quantum effects corresponds to the generation of the cosmological constant on the brane. The application of the results to the second Randall-Sundrum brane-world model is given.

Key words: *Cosmology:brane-world - Cosmology:Casimir effect*

ЛИТЕРАТУРА

1. *O.Aharony*, *S.S.Gubser*, *J.Maldacena*, *H.Ooguri*, *Y.Oz*, Phys. Rep., **323**, 183, 2000.
2. *N.Arkani-Hamed*, *S.Dimopoulos*, *G.Dvali*, Phys. Lett., **B429**, 263, 1998.
3. *N.Arkani-Hamed*, *S.Dimopoulos*, *G.Dvali*, Phys. Rev., **59**, 086004, 1999.
4. *I.Antoniadis*, *N.Arkani-Hamed*, *S.Dimopoulos*, *G.Dvali*, Phys. Lett., **B436**, 257, 1998.
5. *L.Randall*, *R.Sundrum*, Phys. Rev. Lett., **83**, 3370, 1999.
6. *L.Randall*, *R.Sundrum*, Phys. Rev. Lett., **83**, 4690, 1999.
7. *S.Nojiri*, *S.Odintsov*, *S.Zerbini*, Phys. Rev., **D62**, 064006, 2000.
8. *W.Goldberger*, *I.Rothstein*, Phys. Lett., **B491**, 339, 2000.
9. *A.Flachi*, *D.J.Toms*, Nucl. Phys., **B599**, 305, 2001; Nucl. Phys., **B610**, 144, 2001.
10. *J.Garriga*, *O.Pujolas*, *T.Tanaka*, Nucl. Phys., **B605**, 192, 2001.
11. *A.Flachi*, *I.G.Moss*, *D.J.Toms*, Phys. Rev., **D64**, 105029, 2001.
12. *А.А.Саарян*, Астрофизика, **46**, 133, 2003.
13. *A.A.Saharian*, *M.R.Setare*, Phys. Lett., **B552**, 119, 2003.
14. *E.Elizalde*, *S.Nojiri*, *S.D.Odintsov*, *S.Ogushi*, Phys. Rev., **D67**, 063515, 2003.
15. *W.Naylor*, *M.Sasaki*, Phys. Lett., **B542**, 289, 2002.
16. *A.A.Saharian*, hep-th/0312092.
17. *A.Romeo*, *A.A.Saharian*, J. Phys., **A35**, 1297, 2002.
18. *A.A.Saharian*, Phys. Rev., **D63**, 125007, 2001.
19. *A.Romeo*, *A.A.Saharian*, Phys. Rev., **D63**, 105019, 2001.
20. *A.A.Saharian*, Phys. Rev., **D69**, 085005, 2004.
21. *A.A.Saharian*, *M.R.Setare*, Class. Quantum Grav., **21**, 5261, 2004.
22. *P.Breitenlohner*, *D.Z.Freedman*, Ann. Phys. (N.Y.), **144**, 249, 1982.
23. *S.K.Blau*, *M.Visser*, *A.Wipf*, Nucl. Phys., **B 310**, 1631, 1988.
24. *E.Elizalde*, *S.D.Odintsov*, *A.Romeo*, *A.A.Bytsenko*, *S.Zerbini*, Zeta Regularization Techniques with Applications, World Scientific, Singapore, 1994.
25. *E.Elizalde*, *S.Leseduarte*, *A.Romeo*, J. Phys., **A26**, 2409, 1993.
26. *S.Leseduarte*, *A.Romeo*, J. Phys., **A27**, 2483, 1994.
27. *M.Bordag*, *E.Elizalde*, *K.Kirsten*, J. Math. Phys., **37**, 895, 1996.
28. *S.Leseduarte*, *A.Romeo*, Ann. Phys. (N.Y.), **250**, 448, 1996.
29. *M.Bordag*, *K.Kirsten*, *J.S.Dowker*, Commun. Math. Phys., **182**, 371, 1996.
30. *M.Bordag*, *E.Elizalde*, *K.Kirsten*, *S.Leseduarte*, Phys. Rev., **D56**, 4896, 1997.
31. *G.Lambiase*, *V.V.Nesterenko*, *M.Bordag*, J. Math. Phys., **40**, 6254, 1999.
32. *G.Cognola*, *E.Elizalde*, *K.Kirsten*, J. Phys., **A34**, 7311, 2001.
33. *A.A.Saharian*, *R.S.Davtyan*, *A.H.Yeranyan*, Phys. Rev., **D69**, 085002, 2004.
34. *М.Абрамовиц*, *И.Стиган*, Справочник по специальным функциям, Наука, М., 1979.