АСТРОФИЗИКА

ТОМ 46 АВГУСТ, 2003 ВЫПУСК 3

УДК: 524.8:531.51

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА БРАН-МОДЕЛЕЙ И ВАКУУМНЫЕ ЭФФЕКТЫ

А.А.ЕРАНЯН, А.А.СААРЯН

Поступила 24 января 2003
Принята к печати 16 апреля 2003

Наложение граничных условий на фоновые поля модели бран-миров приводит к отличным от нуля вакуумным средним соответствующего тензора энергии-импульса. В данной работе методами качественной теории динамических систем исследована генерируемая этим тензором космологическая эволюция. Для моделей с однородными и изотропными подпространствами на бранах рассмотрены все возможные типы космологической динамики и исследовано поведение соответствующих решений в ранние и поздние стадии эволюции.

1. *Введение*. Многие фундаментальные теории, объединяющие различные физические взаимодействия, естественно и самосогласованно формулируются в пространстве-времени с числом измерений больше четырех. Одной из основных проблем этих теорий является механизм, благодаря которому дополнительные измерения скрыты, так что при изучении обычных физических явлений пространство-время выглядит как эффективно четырехмерное. До недавнего времени в основном рассматривались теории типа моделей Калуцы-Клейна, в которых дополнительные измерения компактны и по существу однородны. Именно компактность дополнительных измерений обеспечивает в таких моделях эффективную четырехмерность пространства-времени на расстояниях, превышающих масштаб компактификации. Однако в последнее время особое внимание стало уделяться представлению о бран-мирах, в котором подразумевается локализация обычного вещества на трехмерном многообразии-бране, вложенном в объемлющее многомерное пространство, а дополнительные измерения доступны только гравитонам и, возможно, другим гипотетическим частицам, слабо взаимодействующим с веществом. В моделях бран-миров дополнительные измерения могут иметь большой или даже бесконечно большой размер и могут приводить к экспериментально наблюдаемым эффектам. Наличие больших дополнительных измерений позволяет редуцировать фундаментальный многомерный гравитационный масштаб к энергиям порядка 1 ТэВ [1] и тем самим разрешить проблему иерархии между планковским и электрослабым масштабами. Одним из наиболее популярных сценариев бран-миров является модель, предложенная Рандалл и Сундрумом [2]. Она основана на нефакторизуемой геометрии

и содержит одно дополнительное измерение, являющееся S_1/Z_2 орбифолдом. Две браны с тремя пространственными измерениями и с противоположными натяжениями находятся в неподвижных точках орбифолда и вместе с отрицательной фоновой космологической постоянной являются источником пятимерной гравитации. Соответствующая пространственно-временная метрика содержит фактор, который экспоненциально зависит от радиуса дополнительной размерности. В сценарии, предложенном в [2], расстояние между бранами связано с вакуумным ожиданием безмассового четырехмерного скалярного поля (поле радиона). Это модулярное поле имеет нулевой потенциал и, следовательно, расстояние не определяется динамикой модели. Для успешной реализации сценария необходим механизм генерации потенциала для стабилизации расстояния между бранами. Один из возможных механизмов стабилизации основан на силах Казимира, генерированных квантовыми вакуумными флуктуациями фоновых полей. Для конформно-связанного скалярного поля этот эффект сначала был рассмотрен в [3] в контексте М-теории и далее в работах [4-17] для фоновой геометрии Рандалл-Сундрума и некоторых ее обобщений.

В данной работе рассмотрена гравитационная динамика бран-моделей, управляемая вакуумными средними тензора энергии-импульса фоновых полей. В следующем разделе выявлена форма вакуумного тензора энергии-импульса и выписаны соответствующие космологические уравнения. Показано, что их можно представить в виде автономной динамической системы второго порядка. В разделе 3 проведен качественный анализ моделей с плоскими подпространствами на бранах и описана соответствующая космологическая эволюция. Раздел 4 посвящен анализу моделей с подпространствами отрицательной и положительной кривизны на бранах. Основные результаты работы подытожены в Заключении.

2. *Космологические уравнения и динамическая система.* Рассмотрим D-мерное пространство-время с двумя параллельными $D-1$-мерными бранами. Для выявления формы вакуумного тензора энергии-импульса фоновых конформных полей предположим сначала, что фоновая геометрия является плоской (многообразие $R\times R^{D-2}\times S^1/Z_2$). Соответствующий интервал можно записать в виде

$$ds_o^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = \eta_{ik}\, dx^i dx^k - L^2 dz^2 , \qquad (1)$$

где греческие и латинские индексы принимают значения 0, 1, ..., $D-1$ и 0, 1, ..., $D-2$, соответственно, $\eta_{\mu\nu}$ - метрика Минковского, и мы ввели перемасштабированную координату z вдоль размерности S_1/Z_2. Будем полагать, что браны расположены в точках $z=0$ и $z=1$, а расстояние между ними равно L. Общую форму вакуумного тензора энергии-импульса можно определить из соображений симметрии и уравнения непрерывности.

Во-первых, из симметрии задачи и условия нулевого следа следует, что вакуумный тензор энергии-импульса должен иметь вид

$$\langle 0|T_\mu^{(0)\nu}|0\rangle = \varepsilon_0 \mathrm{diag}(1, 1, ..., 1, -(D-1)), \tag{2}$$

где $|0\rangle$ - амплитуда соответствующего вакуумного состояния, ε_0 - плотность энергии, которая может быть функцией только от z. Из уравнения непрерывности следует, что ε_0 является постоянным, зависящим от расстояния между бранами. Для конформных полей эта зависимость имеет вид $\varepsilon_0 = J/L^D$, где числовая постоянная J зависит от конкретного поля. При $J<0$ вакуумные силы, действующие на браны, имеют характер притяжения, а при $J>0$ - отталкивания. Ниже мы не будем конкретизировать значение этой постоянной.

Для исследования гравитационного воздействия вакуумных эффектов на фоновую геометрию соответствующий интервал представим в виде

$$ds^2 = N(t)dt^2 - a^2(t)g_{ik}dx^i dx^k - L^2(t)dz^2, \tag{3}$$

где функция $N(t)$ определяется выбором временной координаты, g_{ik}, $i, k=1, ..., n$ является метрикой $n=D-2$-мерного пространства постоянной кривизны, описывающей геометрию бран, $a(t)$ - соответствующий масштабный фактор. В адиабатическом приближении вакуумный тензор энергии-импульса на искривленном фоне (3) представится в виде

$$\langle 0|T_\mu^\nu|0\rangle = \varepsilon \mathrm{diag}(1, 1, ..., 1, -(D-1)), \quad \varepsilon = \frac{J}{L^D(t)}. \tag{4}$$

Заметим, что такой тензор энергии-импульса удовлетворяет уравнению непрерывности на фоне метрики, определяемой интервалом (3).

Для метрики (3) и тензора энергии-импульса (4) уравнения гравитационного поля (здесь и ниже принята система единиц $c=1$, $\hbar=1$, а G_D - D-мерная гравитационная постоянная)

$$R_\mu^\nu = 8\pi G_D \langle 0|T_\mu^\nu|0\rangle, \tag{5}$$

могут быть записаны в следующем виде,

$$\begin{aligned}
&n\frac{\ddot a}{a} - n\frac{\dot a}{a}\frac{\dot N}{N} + \frac{\ddot L}{L} - \frac{\dot L}{L}\frac{\dot N}{N} = -8\pi G_D \frac{JN^2}{L^D},\\
&\frac{\ddot a}{a} - \frac{\dot a}{a}\frac{\dot N}{N} + \frac{\dot a}{a}\frac{\dot L}{L} + (n-1)\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{k(n-1)N^2}{a^2} = -8\pi G_D \frac{JN^2}{L^D},\\
&\frac{\ddot L}{L} + n\frac{\dot a}{a}\frac{\dot L}{L} - \frac{\dot L}{L}\frac{\dot N}{N} = 8\pi(n+1)G_D \frac{JN^2}{L^D},
\end{aligned} \tag{6}$$

где $n=D-2$ - пространственная размерность бран, точка означает производную по времени, $k=0$, 1, -1 для бран с нулевой, положительной и отрицательной пространственной кривизной.

Выбирая конформную временную координату $N=a$ и введя обозначения

$H \equiv \dot{a}/a$, $y \equiv \dot{L}/L$, система (6) может быть записана в виде двумерной автономной динамической системы

$$\dot{H} = -(n+1)Hy - \frac{(n+2)(n-1)}{2}\left(H^2+k\right),$$
$$\dot{y} = -y^2 + \left(n^2+1\right)Hy + \frac{n\left(n^2-1\right)}{2}\left(H^2+k\right). \tag{7}$$

Плотность энергии выражается через решения этой системы с помощью соотношения

$$8\pi G_D a^2 \varepsilon = nHy + \frac{n(n-1)}{2}\left(H^2+k\right). \tag{8}$$

Заметим, что динамическая система (7) инвариантна относительно преобразований

$$t \to -t, \quad H \to -H, \quad y \to -y, \tag{9}$$

связывающих модели расширения и сжатия.

Исследуем качественную структуру фазовой картины системы уравнений (7). Качественная картина фазовых траекторий динамической системы определяется расположением и характером ее особых точек, являющихся корнями уравнений

$$P(H,y) = Q(H,y) = 0, \tag{10}$$

где

$$P(H,y) = -(n+1)Hy - \frac{(n+2)(n-1)}{2}\left(H^2+k\right),$$
$$Q(H,y) = -y^2 + \left(n^2+1\right)Hy + \frac{n\left(n^2-1\right)}{2}\left(H^2+k\right). \tag{11}$$

Отдельно рассмотрим случаи, когда $k=0$, $k=1$ и $k=-1$.

3. *Модели с плоским подпространством на бране.* При $k=0$ и при любом $n>1$, единственной особой точкой системы (7) в конечной части фазовой плоскости (H, y) является начало координат $H=y=0$. Так как в этой точке $P_i' = Q_i' = 0$, $i = H, y$, то соответствующие собственные числа равны нулю, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, и особая точка является вырожденной. Согласно обычному методу исследования таких точек (см., например, [18,19]) преобразуем систему (7) (при $k=0$) в полярные координаты

$$r = \sqrt{H^2+y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(y/H) \tag{12}$$

и произведем замену временной координаты согласно $dt_1/dt = r$. При этом вместо точки (0, 0) вклеивается окружность $S^1 = \{r=0, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ (см. рис.1). В полярных координатах система (7) примет вид

$$\frac{dr}{dt_1} = rZ(\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt_1} = N(\varphi), \tag{13}$$

где

$$Z(\varphi) = -\cos^3\varphi\left[\operatorname{tg}^3\varphi - \left(n^2+1\right)\operatorname{tg}^2\varphi - \frac{(n+1)\left(n^2-n-2\right)}{2}\operatorname{tg}\varphi + \frac{(n-1)(n+2)}{2}\right],$$
$$N(\varphi) = n\cos^3\varphi\left[\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{(3n+1)}{2}\operatorname{tg}\varphi + \frac{\left(n^2-1\right)}{2}\right]. \tag{14}$$

Прежде всего заметим, что решениями системы (13) являются лучи $\varphi = \varphi_m$, где φ_m - корни уравнения

$$N(\varphi) = 0. \tag{15}$$

Это уравнение имеет три действительных корня υ_1, υ_2, υ_3 относительно $\upsilon = \cot\varphi$:

$$\upsilon_1 = -\frac{2}{n-1}, \quad \upsilon_2 = -\frac{1}{n+1}, \quad \upsilon_3 = 0, \tag{16}$$

причем, как это следует из соотношения (8) для плотности энергии, корни υ_1 и υ_3 соответствуют решениям с нулевой плотностью энергии, $\varepsilon = 0$, а корень υ_2 решениям с отрицательной плотностью энергии. В соответствующих космологических решениях относительная скорость изменения расстояния между пластинами пропорциональна параметру Хаббла:

$$\frac{\dot a}{a} = \upsilon_i \frac{\dot L}{L}. \tag{17}$$

Интегрирование системы уравнений (13) с учетом (17) приводит к следующим особым решениям:

$$a = a_0|t|^{\frac{2}{n-1}}, \quad L = \frac{L_0}{|t|}, \quad \varepsilon = 0, \tag{18}$$

$$a = a_0|t|^{\frac{2}{n^2+3n+4}}, \quad L = L_0|t|^{\frac{2(n+1)}{n^2+3n+4}}, \quad 8\pi G_D a^2 \varepsilon = -\frac{2n(n+3)}{(n^2+3n+4)^2}\frac{1}{t^2}, \tag{19}$$

$$a = a_0 = \text{const}, \quad L = L_0|t|, \quad \varepsilon = 0, \tag{20}$$

для первого, второго и третьего корней соответственно, a_0, L_0 - постоянные интегрирования. Заметим, что для решения (19) эти постоянные связаны с коэффициентом J в выражении (4) для плотности энергии соотношением

$$\frac{Ja_0^2}{L_0^D} = -\frac{2n(n+3)}{\left(n^2+3n+4\right)^2}.$$

Особые решения (18) - (20) можно также записать в терминах собственного времени τ, которое связано с конформным временем соотношением $adt = d\tau$:

$$a = a_1|\tau|^{\frac{2}{n+1}}, \quad L = L_1|\tau|^{\frac{n-1}{n+1}}, \quad \varepsilon = 0,$$
$$a = a_1|\tau|^{\frac{2}{n^2+3n+2}}, \quad L = L_1|\tau|^{\frac{2}{n+2}}, \quad 8\pi G_D \varepsilon = -\frac{2n(n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2}\frac{1}{\tau^2}, \tag{21}$$
$$a = a_1 = \text{const}, \quad L = L_1|\tau|, \quad \varepsilon = 0,$$

где a_1, L_1 - постоянные интегрирования. Для второго решения (21) они связаны с коэффициентом J соотношением

$$\frac{J}{L_0^D} = -\frac{2n(n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2}.$$

Вернемся теперь к динамической системе (13). При исследовании фазовой картины этой системы можно ограничиться случаем $y \geq 0$. Фазовые траектории в области $y < 0$ получаются отсюда заменой $(H, y) \to (-H, -y)$ и изменением направления стрелок фазовых траекторий, что является следствием инвариантности динамической системы относительно отражения (9). Особыми точками системы (13) в конечной части фазовой плоскости являются следующие точки окружности S^1:

$$A_m(r = 0, \varphi = \varphi_m), \quad m = 1, \ldots, 6 \tag{22}$$

где корни $\varphi = \varphi_m$ определяются из соотношений

$$\varphi_m = \operatorname{arccot} w_m, \quad \varphi_{m+3} = \varphi_m + \pi, \quad m = 1, 2, 3. \tag{23}$$

Поведение фазовых траекторий в окрестности этих точек определяется собственными числами $\lambda_1^{(m)}$, $\lambda_2^{(m)}$, которые, согласно (13), равны

$$\lambda_1^{(m)} = Z(\varphi_m), \quad \lambda_2^{(m)} = N'(\varphi_m). \tag{24}$$

Вычисления по формуле (14) приводят к следующим выражениям:

$$\begin{gathered}
\lambda_1^{(1)} = \frac{n-1}{\sqrt{n^2-2n+5}}, \quad \lambda_2^{(1)} = -\frac{n(n+3)}{\sqrt{n^2-2n+5}}, \\
\lambda_1^{(2)} = -\frac{n^2+3n+4}{2\sqrt{n^2+2n+2}}, \quad \lambda_2^{(2)} = \frac{n(n+3)}{2\sqrt{n^2+2n+2}}, \\
\lambda_1^{(3)} = -1, \quad \lambda_2^{(3)} = -n, \quad \lambda_i^{(m)} = -\lambda_i^{(m+3)}, \quad i = 1, 2; \quad m = 1, 2, 3.
\end{gathered} \tag{25}$$

Отсюда следует невырожденность особых точек. Поскольку все собственные числа действительны, то особые точки являются или узлами, или седловыми точками в зависимости от знаков собственных чисел. Собственные векторы $\vec{n}_i$, соответствующие собственным числам λ_i, в полярных координатах имеют компоненты $\vec{n}_1(1, 0)$ и $\vec{n}_2(0, 1)$, т.е. совпадают с ортами координатной системы.

Для исследования поведения динамической системы на бесконечности перейдем к новым координатам (ρ, φ), где $\rho = 1/r$. При таком отображении бесконечно удаленные точки переходят в точки окружности $\overline{S}^1 = \{\rho = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Система (13) принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt_1} = -\rho Z(\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt_1} = N(\varphi). \tag{26}$$

Здесь особыми являются точки

$$B_m(\rho = 0, \varphi = \varphi_m), \quad m = 1, \ldots, 6, \tag{27}$$

с собственными числами

$$\bar{\lambda}_1^{(m)} = -Z(\varphi_m), \quad \bar{\lambda}_2^{(m)} = N'(\varphi_m), \tag{28}$$

отличающиеся от собственных чисел точек A_m знаком перед $\lambda_1^{(m)}$.

Таким образом, динамическая система (13) имеет двенадцать особых точек A_m и B_m, $m = 1-6$ с действительными собственными числами $\lambda_i^{(m)}$ и $\bar{\lambda}_i^{(m)}$, соответственно задаваемых выражениями (24) и (28), причем

$$\bar{\lambda}_1^{(m)} = -\lambda_1^{(m)}, \quad \bar{\lambda}_2^{(m)} = -\lambda_2^{(m)}. \tag{29}$$

Согласно стандартной схеме классификации невырожденных особых точек (см., например, [18]), отсюда следует, что точки $A_3(A_6)$, $B_1(B_4)$ являются устойчивыми (неустойчивыми) узлами, причем поскольку $\left|\lambda_1^{(1,3)}\right| < \left|\lambda_2^{(1,3)}\right|$, все траектории, кроме двух особых, касаются траекторий $\varphi = \varphi_3$ и $\varphi = \varphi_1$, соответственно. Точка $B_2(B_5)$ является неустойчивым (устойчивым) узлом. В ее окрестности все траектории, кроме особой $\varphi = \varphi_2$, касаются окружности $r = \infty$. Точки A_1, A_2, A_4, A_5, B_3, B_6, являются седлами. На основе проведенного анализа на рис.1 изображена фазовая картина динамической системы (7) для моделей с $k = 0$. Фазовая плоскость (H, y) предварительно отображена на кольцеобразную область между окружностями S^1 и $\bar{S}^1$. Отрезки $B_3A_3(A_6B_6)$, $B_2A_2(A_5B_5)$ и $A_1B_1(B_4A_4)$ соответствуют особым решениям (18), (19) и (20) соответственно. Фазовые траектории в областях $B_1A_1A_6B_6$ и $B_3A_3A_4B_4$ ($B_1A_1A_3B_3$ и $B_6A_6A_4B_4$) соответствуют моделям с $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 0$). Точкам $B_m(A_m)$ соответствуют конечные (бесконечные) значения конформной и синхронной временных координат.

Перейдем теперь к качественному описанию динамики моделей с плоским пространством на бране. Рассмотрим отдельно качественно-различные области фазовой картины рис.1.

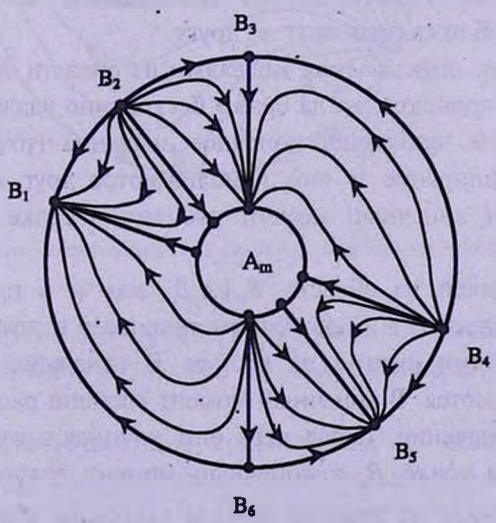

Рис.1. Фазовая картина космологической модели с плоским подпространством на бране.

a) Для траекторий из области $B_2A_2A_3B_3$ эволюция начинается в точке B_2 в конечный момент времени. Этой точке соответствуют значения $a=\infty$, $L=0$. Поскольку в рассматриваемой области $\dot{a}<0$, то соответствующие траектории описывают модели сжатия на бране. Браны же удаляются друг от друга. Соответствующие решения стремятся к особому решению (18) (траектория B_3A_3) при $t\to+\infty$. Таким образом, в этом пределе имеем бесконечно удаленные браны, с геометрией D-1-мерного пространства-времени Минковского на них.

b) Модели из области $B_2A_2A_1B_1$ также начинают эволюцию в точке B_2 в конечный момент времени. Соответствующие решения описывают модели сжатия на бранах с монотонным удалением бран друг от друга. Эволюция заканчивается в сингулярной точке B_1 в другой конечный момент времени. В этой точке $a=0$, $L=\infty$, т.е. браны бесконечно удалены друг от друга.

c) Модели, описываемые траекториями из области $B_4A_4A_3B_3$, начинают эволюцию в сингулярной точке B_4 в конечный момент времени. В этой точке $a=0$, $L=\infty$, и браны бесконечно удалены друг от друга. В начальной стадии эволюции браны расширяются и приближаются. В некоторый момент времени расстояние между бранами принимает зависящее от начальных данных минимальное значение (на рис.1 этому моменту соответствуют точки пересечения траекторий с осью $y=0$). После этого браны начинают удаляться друг от друга. В пределе $t\to+\infty$ решения стремятся к моделям, описываемым отрезком B_3A_3.

d) Модели из области $B_4A_4A_5B_5$ являются моделями расширения на бранах. Они начинают свою эволюцию в конечный момент времени в точке B_4 со значений $a=0$, $L=\infty$ и заканчивают ее в другой конечный момент времени в точке B_5 со значениями $a=\infty$, $L=0$. Браны монотонно приближаются друг к другу.

e) Эволюция, описываемая моделями из области $B_5A_5A_6B_6$, начинается в бесконечном прошлом, когда браны бесконечно удалены, а масштабный фактор на бране принимает конечное значение (точка B_6). На бранах происходит расширение и они приближаются друг к другу. Эволюция заканчивается в конечный момент времени в точке B_5 со значениями $a=\infty$, $L=0$.

f) Для моделей из области $B_1A_1A_6B_6$, как и в предыдущем пункте, эволюция начинается в бесконечном прошлом в точке B_6. Эти модели являются моделями сжатия на бранах. В начальной стадии эволюции браны приближаются. В конечный момент времени расстояние принимает минимальное значение, после чего они начинают удаляться. Эволюция заканчивается в точке B_1 в конечный момент времени со значениями $a=0$, $L=\infty$.

4. *Эволюция моделей с искривленным подпространством на бранах.* Для моделей с однородным и изотропным искривленным подпространством на бранах ($k \neq 0$) особые точки на бесконечности фазовой плоскости (H, y) те же, что и в рассмотренном в предыдущем разделе случае $k = 0$, т.е. таковыми являются точки B_m, определяемые согласно (27). Это обстоятельство обусловлено тем, что в уравнениях поля члены, содержащие k (вне зависимости от его знака), не играют роли на бесконечности. В этом легко убедиться преобразованием системы (7) в полярные координаты и заменой переменной $r = 1/\rho$. Нетрудно видеть, что при ρ, равном нулю (точки бесконечности), члены с k исчезают. Рассмотрим отдельно модели с пространствами на бранах положительной и отрицательной кривизны.

4.1. *Модели с $k = 1$.* В этом случае, при любом $n > 1$, динамическая система (7) не имеет особых точек для конечных значений H и y, а особые точки на бесконечности фазовой плоскости, как уже отмечалось выше, совпадают с особыми точками B_m, характер которых был исследован в предыдущем разделе. Соответствующая фазовая картина, отображенная на единичный круг, изображена на рис.2.

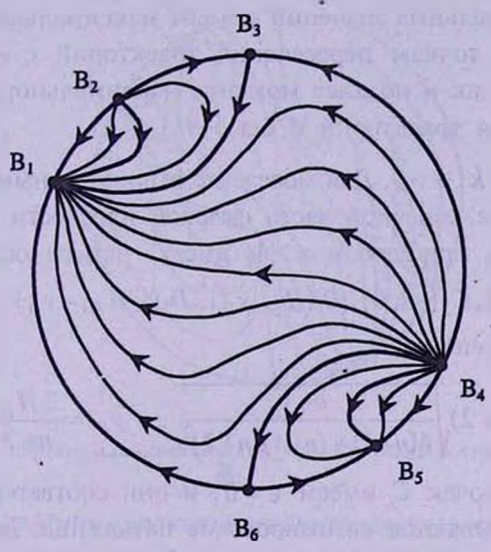

Рис.2. Фазовая картина космологической модели с подпространством положительной кривизны на бране.

Особые траектории B_3B_1 и B_4B_6 соответствуют моделям с $\varepsilon = 0$. Рассмотрим качественно различные случаи эволюций, описываемые системой (7).

а) Модели, соответствующие траекториям из области $B_1B_2B_3B_1$, представляют решения с отрицательной плотностью энергии и начинают эволюцию в точке B_2 в конечный момент времени со значениями $a = \infty$,

$L=0$. Для этих моделей браны сжимаются и удаляются. Эволюция заканчивается в другой конечный момент времени в сингулярной точке B_1 со значениями $a=0$, $L=\infty$.

b) Другой класс моделей с отрицательной плотностью энергии представлен траекториями из области $B_4B_5B_6B_4$. Они описывают расширение бран с монотонным уменьшением расстояния между ними. Соответствующая эволюция начинается в конечный момент времени в точке B_4 со значениями $a=0$, $L=\infty$. Эволюция заканчивается в другой конечный момент времени в точке B_5 со значениями $a=\infty$, $L=0$.

c) Модели из области $B_1B_3B_4B_6B_1$ соответствуют положительным значениям постоянной J в формуле (4) и описывают начальное расширение на бранах с последующим сжатием. Эволюция этих моделей начинается в конечный момент времени в точке B_4 со значениями $a=0$, $L=\infty$. Вначале браны расширяются и приближаются. Далее, после достижения минимального расстояния, они начинают удаляться, и $L\to\infty$ в другой конечный момент времени, соответствующий точке B_1. После максимального расширения браны начинают сжиматься до точки с нулевым значением масштабного фактора (точка B_1). В зависимости от начальных значений момент максимального расширения (соответствующий точкам пересечения траекторий с осью y) может быть как раньше, так и позднее момента максимального приближения (точки пересечения траекторий с осью H).

4.2. *Модели с $k=-1$.* Для моделей с отрицательным пространством на бранах ($k=-1$) в конечной части фазовой плоскости (H, y) динамическая система (7), при любом $n>1$, имеет четыре особые точки:

$$C_1(1,0),\, C_2(-1,0),\, D_1(H_D, y_D),\, D_2(-H_D, -y_D), \tag{30}$$

где введены обозначения

$$H_D=(n+2)\sqrt{\frac{n-1}{4(n+1)+(n-1)(n+2)^2}}, \quad y_D=\frac{2H_D}{n+2}. \tag{31}$$

Заметим, что для точек C_i имеем $\varepsilon=0$, и они соответствуют моделям, в которых не учитываются казимировские натяжения. Для моделей же, описываемых точками D_i, плотность энергии положительна, $\varepsilon>0$. Решение, соответствующее точке C_1, имеет вид

$$a=\text{const}\, e^{t}, \quad L=\text{const} \tag{32}$$

в терминах конформного времени, и

$$a=\tau, \quad L=\text{const} \tag{33}$$

в терминах синхронного времени и описывает плоское пространство-время. Для точек же D_i имеем

$$8\pi G_D a^2 \varepsilon = \frac{2n(n-1)}{4(n+1)+(n-1)(n+2)^2}. \tag{34}$$

Решение для точки D_1 имеет вид

$$a = \text{const}\, e^{H_D t}, \quad L = \text{const}\, e^{y_D t} \quad . \tag{35}$$

в терминах конформного времени и

$$a = H_D \tau, \quad L = \text{const}\tau^{y_D/H_D} \tag{36}$$

в терминах синхронного времени.

Вследствие свойств инвариантности динамической системы достаточно исследовать характер особых точек C_1 и D_1. Для точки C_1 собственные числа равны $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -(n-1)$, и эта точка является седлом. Собственные числа для точки D_1 являются комплексно-сопряженными:

$$\lambda_{1,2} = -n\frac{n+1}{4} \pm i\beta, \quad \beta = \sqrt{(n+1)(16+n(n+1)(-8+n(7+4n(n+3))))}, \tag{37}$$

и точка является устойчивым фокусом. Фазовая картина, построенная на основе проведенного анализа, изображена на рис.3.

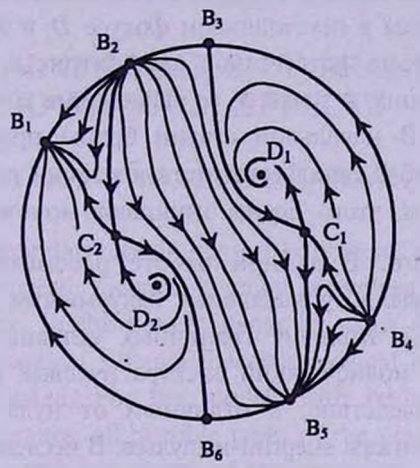

Рис.3. Фазовая картина космологической модели с подпространством отрицательной кривизны на бране.

Рассмотрим картину эволюции рассматриваемых моделей в отдельных качественно различных областях фазовой плоскости.

a) Модели из области $B_4C_1B_5B_4$ соответствуют решениям с отрицательной плотностью энергии и начинают эволюцию в конечный момент времени в точке B_4 со значенями $a=0$, $L=\infty$. Эволюция заканчивается в другой конечный момент времени в точке B_5 со значениями $a=\infty$, $L=0$. Браны монотонно расширяются и монотонно приближаются.

b) Траектории из области $B_4C_1B_3B_4$ описывают модели расширения на бранах с положительной плотностью энергии. Эволюция начинается в точке B_4 в конечный момент времени. В начальной стадии браны

приближаются. Моменту максимального приближения соответствуют точки пересечения траекторий с осью $y=0$. После этого браны начинают монотонно удаляться и траектории стремятся к точке D_1, а соответствующие решения - к решению (36) при $\tau \to +\infty$.

c) Траектории из области $B_2C_2B_6B_5C_1B_3$ описывают смешанные модели расширения - сжатия на бранах и представляют решения с отрицательной плотностью энергии. Эти модели начинают эволюцию в конечный момент времени в точке B_2 со значениями $a=\infty$, $L=0$. В начальной стадии браны сжимаются и удаляются. В некоторый конечный момент времени сжатие переходит в расширение. Удаление также сменяется на приближение. Эволюция заканчивается в конечный момент времени в точке B_2 со значениями $a=\infty$, $L=0$.

d) Модели из области $B_2C_2B_1B_2$ начинают эволюцию в конечный момент времени в точке B_2 со значениями $a=\infty$, $L=0$. Эволюция заканчивается в другой конечный момент времени в точке B_1 со значениями $a=0$, $L=\infty$. Браны монотонно сжимаются и монотонно удаляются.

e) Траектории из области $B_1C_2B_6B_1$ описывают модели сжатия на бранах. Эволюция начинается в неустойчивом фокусе D_2 в бесконечном прошлом. Все решения, кроме устойчивой сепаратрисы седловой точки C_2, заканчивают эволюцию в точке B_1 со значениями $a=0$, $L=\infty$ в конечный момент времени. В начальной стадии браны приближаются. Моменту максимального приближения соответствуют точки пересечения траекторий с осью $y=0$. После этого браны начинают монотонно удаляться.

5. *Заключение*. В данной работе рассмотрена гравитационная динамика бран-модели, управляемая вакуумными эффектами фоновых конформных полей. Наличие граничных условий на бранах для этих полей приводит к модификации спектра нулевых колебаний квантового вакуума и, как следствие, к отличным от нуля вакуумным средним соответствующего тензора энергии-импульса. В исследованной выше простой модели такой тензор энергии-импульса является единственным источником гравитации в правой части многомерных уравнений Эйнштейна. Для моделей с максимально симметричным пространством на бранах описаны все возможные качественно различные варианты динамики космологической эволюции. Для решений с плоским пространством на бранах $k=0$ соответствующий им масштабный фактор является монотонной функцией времени и отсутствуют смешанные модели расширения $\leftrightarrow$ сжатия на бранах, причем в зависимости от начальных данных они могут как приближаться, так и удаляться. Для моделей с положительно - искривленным пространством на бранах $k=1$ смешанные модели расширения $\to$ сжатия реализуются на решениях с положительной плотностью энергии, соответствующих положительному значению постоянной J в формуле (4). Для моделей $k=1$

с $J<0$ браны, монотонно расширяясь, приближаются или, монотонно сжимаясь, удаляются. В случае моделей с отрицательно-искривленным пространством на бранах $k=-1$ реализуются смешанные модели сжатия → расширения бран и они соответствуют решениям с отрицательной плотностью энергии. Существуют также классы решений с отрицательной плотностью энергии, описывающие монотонное расширение или сжатие бран. Решения с $k=-1$ и с положительной плотностью энергии представляют модели с монотонным расширением или сжатием бран. Для них браны в начальной стадии приближаются и далее удаляются друг от друга.

Работа выполнена в рамках гранта 0887 Министерства образования и науки Республики Армения.

Ереванский государственный университет, Армения,
e-mail: ayeran@server.physdep.r.am, saharyan@server.physdep.r.am

COSMOLOGICAL DYNAMICS OF BRANE-MODELS AND VACUUM EFFECTS

A.H.YERANYAN, A.A.SAHARYAN

The imposition of boundary conditions on bulk fields of the brane-world models leads to the nonzero vacuum expectation values for corresponding energy-momentum tensor. In the present paper by using the methods of the qualitative theory of dynamical systems the cosmological evolution generated by this tensor is investigated. For the models with homogeneous and isotropic subspaces on the branes, all possible types of the cosmological solutions are investigated at early and late stages of the evolution.

Key words: *cosmology:theory - cosmology - dynamics*

ЛИТЕРАТУРА

1. *N.Arkani-Hamed, S.Dimopoulos, G.Dvali*, Phys. Lett., **B429**, 263, 1998; Phys. Rev., **D59**, 086004, 1999; *I.Antoniadis, N.Arkani-Hamed, S.Dimopoulos, G.Dvali*, Phys. Lett., **B436**, 257, 1998.
2. *L.Randall, R.Sundrum*, Phys. Rev. Lett., **83**, 3370, 1999.

3. *M.Fabinger*, *P.Horava*, Nucl. Phys., **B580**, 243, 2000.
4. *S.Nojiri*, *S.Odintsov*, Phys. Lett., **B484**, 119, 2000.
5. *S.Nojiri*, *O.Obregon*, *S.Odintsov*, Phys. Rev., **D62**, 104003, 2000.
6. *S.Nojiri*, *S.Odintsov*, *S.Zerbini*, Phys. Rev., **D62**, 064006, 2000.
7. *S.Nojiri*, *S.Odintsov*, *S.Zerbini*, Class. Quantum Grav., **17**, 4855, 2000.
8. *D.J.Toms*, Phys. Lett., **B484**, 149, 2000.
9. *W.Goldberger*, *I.Rothstein*, Phys. Lett., **B491**, 339, 2000.
10. *S.Nojiri*, *S.Odintsov*, JHEP, 049, 2000.
11. *J.Garriga*, *O.Pujolas*, *T.Tanaka*, Nucl. Phys., **B605**, 192, 2001.
12. *I.Brevik*, *K.A.Milton*, *S.Nojiri*, *S.D.Odintsov*, Nucl. Phys., **B599**, 305, 2001.
13. *A.Flachi*, *D.J.Toms*, Nucl. Phys., **B599**, 305, 2001.
14. *W.Naylor*, *M.Sasaki*, Phys. Lett., **B542**, 289, 2002.
15. *A.A.Saharian*, *M.R.Setare*, Phys. Lett., **B552**, 119, 2002.
16. *А.А.Саарян*, Астрофизика, **46**, 133, 2003.
17. *E.Elizalde*, *S.Nojiri*, *S.D.Odintsov*, *S.Ogushi*, hep-th/0209242.
18. *Н.Н.Баутин*, *Е.А.Леонтович*, Методы приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, Наука, М., 1976.
19. *О.И.Богоявленский*, Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике, Наука, М., 1980.