АСТРОФИЗИКА

ТОМ 46 МАЙ, 2003 ВЫПУСК 2

УДК: 524.3

ЭВОЛЮЦИЯ ШИРОКОЙ ЗВЕЗДНОЙ ПАРЫ ЗА СЧЕТ ИРРЕГУЛЯРНЫХ СИЛ

А.С.БАРАНОВ

Поступила 8 апреля 2002
Принята к печати 10 января 2003

Теоретически изучена динамическая эволюция широкой звездной пары (с расстоянием в типичных условиях Галактики $\sim 10^4$ а.е.) под влиянием случайных воздействий со стороны звезд фона во время прохождений. Рассматривается прохождение, дающее в некоторый момент приблизительно равносторонний треугольник. Суммарный эффект многих прохождений можно разделить на систематическое "нагревание" пары и случайную диффузию по кеплеровским элементам *a* и *e*. Выведено соответствующее уравнение Фоккера-Планка и указаны границы его применимости. Получено стационарное распределение по величинам *a* и *e*.

1. *Введение*. Широкие звездные пары с полуосями порядка $\sim 10^4$ а.е. в отличие от более тесных пар постоянно подвержены случайным воздействиям от проходящих мимо звезд поля. Из-за многочисленности таких прохождений их эффекты складываются, так что основную роль играет именно постепенное накопление возмущений, а не отдельные близкие прохождения. Поэтому эволюцию широкой пары в общем звездном поле можно теоретически прослеживать статистическими методами, в основном при помощи уравнения Фоккера-Планка. В частности, представляет большой интерес определение направленности эволюции. В принципе такая двойная может перейти либо в категорию тесных пар, либо, наоборот, утратить внутреннюю гравитационную связь и сохранить как следствие общего происхождения только сходство движений.

В отличие от собственно релаксации звездных скоростей в галактическом поле, идущей крайне медленно [1], эволюция широкой пары вследствие таких же звездных прохождений приводит к эффективным последствиям уже за космогонически приемлемые сроки, поскольку сравнительно мала энергия, необходимая для разрушения или существенного изменения орбиты пары.

Подчеркнем, что соответствующие выводы по необходимости носят существенно вероятностный характер, предсказать же точную эволюцию данной пары, в отличие от классических проблем небесной механики, невозможно. В этой связи неоднократно ставились численные эксперименты (см., например, [2-7]).

2. *Общая задача.* Рационально начать с некоторой более общей схемы гравитационных возмущений в движении двойной системы. Результаты могут прилагаться не только к звездным парам, но также к двойным галактикам [8] и вообще к гравитационно связанным парам объектов. Считаем, что внешние возмущения имеют произвольный вид и подчинены лишь требованиям малости: эффект дополнительной силы остается все время существенно меньше взаимного тяготения членов пары. Используем следующие обозначения: G - гравитационная постоянная, t - время, m_1, m_2 - массы членов пары, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ - их радиусы-векторы, в частности $\bar{\rho}_1 = \bar{r}_1(0)$, $\bar{\rho}_2 = \bar{r}_2(0)$; $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ - их скорости при $t=0$, $\Phi(x,y,z)$ - потенциал возмущения. Кроме того, $r = |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|$, $\rho = |\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2|$.

Подобные задачи рассматривались в литературе [9-11], но мы обращаем внимание на ряд тонкостей, от правильности которых зависит, в частности, определение пределов применимости результатов.

Систему координат (x, y, z) в начальный момент связываем с центром тяжести пары. Тогда уравнения возмущенного движения записываются в обычном виде

$$\frac{d^2\bar{r}_{1,2}}{dt^2} = \pm \frac{Gm_{2,1}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}{r^3} - \operatorname{grad}\Phi . \tag{1}$$

Предполагаем, что отдельное возмущение в его конкретном виде действует на интервале времени $0 < t < \delta t$, δt мало в сравнении с периодом обращения. Разлагаем $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ по степеням времени сначала в невозмущенном случае с точностью до членов третьего порядка:

$$\bar{r}_{1,2} = \bar{\rho}_{1,2} + t\bar{v}_{1,2} \pm \frac{t^2}{2}\frac{Gm_{2,1}(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)}{\rho^3} +$$
$$+ \frac{Gm_{2,1}t^3}{6}\left[\pm\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{\rho^3} + \frac{3(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)}{\rho^5}[\pm(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)]\right] + \ldots \tag{2}$$

Приняв решение (2) невозмущенных уравнений за основное приближение для полных уравнений (1), строим решение системы (1)при тех же начальных условиях методом последовательных приближений Пикара. Точнее, пользуемся тем известным фактом, что уравнение $d^2x/dt^2 = \xi(x,t)$ с заданными начальными $x(0)$ и $x'(0)$ имеет решение

$$x(t) = x(0) + tx'(0) + \int_0^t (t-\tau)\xi(x,\tau)d\tau . \tag{3}$$

Подставив невозмущенное решение (2) в правую часть (1), находим:

$$\frac{d^2\bar{r}_{1,2}}{dt^2} = \pm \frac{Gm_{2,1}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}{r^3} - (\operatorname{grad}\Phi)_{\rho_{1,2}} - t(A)_{\rho_{1,2}}\bar{v}_{1,2} , \tag{4}$$

где нижние индексы ρ_1 и ρ_2 указывают, что в функции $\partial\Phi/\partial x$ и так далее в качестве аргументов x, y, z подставляются компоненты соответствующих векторов $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$, а матрица A - гессиан

$$A = \begin{pmatrix} \partial^2\Phi/\partial x^2 & \partial^2\Phi/\partial x\partial y & \partial^2\Phi/\partial x\partial z \\ \partial^2\Phi/\partial x\partial y & \partial^2\Phi/\partial y^2 & \partial^2\Phi/\partial y\partial z \\ \partial^2\Phi/\partial x\partial z & \partial^2\Phi/\partial y\partial z & \partial^2\Phi/\partial z^2 \end{pmatrix}$$

Дополнительные члены правых частей (4) далее используем по образцу (3), причем выясняется, что продолжать разложение в формулах (4) нет надобности, если мы хотим получить точность $O(t^3)$. Таким образом, первым приближением является

$$\bar{r}_1(t) = [\bar{r}_1(t)] - \int_0^t (t-\tau)\left[(\operatorname{grad}\Phi(r,\tau))_{\rho_1} + \tau(A(r,\tau))_{\rho_1}\bar{v}_1\right]d\tau, \tag{5}$$

где заключение в квадратных скобках означает, что берется невозмущенное решение (2). Поскольку поправки к нему в формуле (5) имеют уже порядок $O(t^2)$, продолжать процесс последовательных приближений нет надобности.

Аналогичное соотношение имеет место для второй частицы.

Не совсем удобно оперировать с векторами $\bar{r}_1(\delta t)$, $\bar{r}_2(\delta t)$, поскольку эффекты возмущения и естественного орбитального движения накладываются друг на друга. Вместо этого предпочтительно пойти от возмущенных значений $\bar{r}_1(\delta t)$, $\bar{r}_2(\delta t)$ назад к моменту $t=0$, но уже по формулам невозмущенного движения. Таким образом, мы как бы вносим поправку в начальные условия, учитывающую возмущение так, чтобы в орбитальных элементах оно сказывалось правильно. Этот закон обратного движения получается просто заменой t на $-t$ в формуле (2). Несложные вычисления дают "исправленные" значения $\bar{r}_i(0)$ и $\dot{\bar{r}}_i(0)$ $(i=1,\ 2)$ с точностью $O(t^2)$ (в промежуточных выкладках нужна была точность до t^3, поскольку при дифференцировании одна степень t теряется). Эти исправленные значения отмечаем знаком "тильда" сверху:

$$\begin{gathered} \tilde{\bar{\rho}}_1 = \bar{\rho}_1 + \int_0^{\delta t} \tau(\operatorname{grad}\Phi(r,\tau))_{\rho_1}\, d\tau, \\ \tilde{\bar{v}} = \bar{v}_1 - \int_0^{\delta t}\left[(\operatorname{grad}\Phi(r,\tau))_{\rho_1} + \tau(A(r,\tau))_{\rho_1}\bar{v}_1\right]d\tau \end{gathered} \tag{6}$$

и аналогично для другой частицы. Проверка с помощью производящих функций подтверждает, что переход от $\bar{\rho}_i$, $\bar{v}_i$ к $\tilde{\bar{\rho}}_i$, $\tilde{\bar{v}}_i$ описывается симплектическим преобразованием и, следовательно, сохраняет фазовую плотность.

При вычислении возмущений орбитальных элементов удобно в качестве промежуточных параметров использовать полную энергию пары H и полный момент $\bar{K}$. В прежней системе координат

$$H = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2} - \frac{G m_1 m_2}{r}, \tag{7}$$

а после перехода к возмущенным характеристикам (6) получается приращение δH энергии:

$$\delta H = -\sum_{l=1,2} m_l \int_0^{\delta t} \bar{v}_l (\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_l} d\tau - \sum_l m_l \int \tau v_l (A)_{\rho_l} \bar{v}_l d\tau +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_l m_l \left[\int_0^{\delta t} (\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_l} d\tau\right]^2 + \frac{Gm_1m_2}{\rho^3}(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)\int_0^{\delta t} \tau\left[(\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_1} + (\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_2}\right] d\tau . \tag{8}$$

В правой части (8) первый член имеет первый порядок относительно δt, а остальные - второй. Однако возмущение изменяет также движение центра масс. Именно, в первом порядке, у него появляется скорость

$$\delta\bar{v} = \frac{m_1\,\delta\bar{v}_1 + m_2\,\delta\bar{v}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{1}{m_1 + m_2}\sum_l m_l \int_0^{\delta t} (\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_l} d\tau .$$

Поскольку мы хотим найти приращение $\delta H'$ энергии пары самой по себе, необходимо из (8) вычесть кинетическую энергию общего поступательного движения $[(m_1 + m_2)/2](\delta\bar{v})^2$. В результате

$$\delta H' = -\sum_{l=1,2} m_l \int_0^{\delta t} \bar{v}_l (\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_l} d\tau - \sum_l m_l \int_0^{\delta t} \tau v_l (A)_{\rho_l} \bar{v}_l d\tau +$$
$$+\frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}\left\{\int_0^{\delta t}\left[(\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_1} - (\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_2}\right] d\tau\right\}^2 + \tag{9}$$
$$+\frac{Gm_1m_2}{\rho^3}(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)\int_0^{\delta t} \tau\left[(\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_1} + (\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_2}\right] d\tau .$$

Аналогично вводим момент

$$\bar{K} = m_1(\bar{r}_1 \times \bar{v}_1) + m_2(\bar{r}_2 \times \bar{v}_2) \tag{10}$$

и определяем его приращение

$$\delta\bar{K} = -\sum_l m_l \bar{r}_l \times \int_0^{\delta t} (\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_l} d\tau - \sum_l m_l \bar{r}_l \times \int_0^{\delta t} \tau (A)_{\rho_l} \bar{v}_l d\tau +$$
$$+\sum_l m_l \int_0^{\delta t} \tau (\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_l} d\tau \times \bar{v}_l . \tag{11}$$

В правой части (11) только первый член порядка δt, остальные второго порядка. Вычитать вклад, получающийся от совместного движения пары, то есть величину $(m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2)(m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2)/(m_1 + m_2)$ не нужно, так как он третьего порядка малости.

Собственно говоря, обычно нас интересует только модуль момента. Несложные выкладки с точностью до членов второго порядка дают:

$$\delta K = \frac{\bar{K}\,\delta\bar{K}}{K} + \frac{(\bar{K} \times \delta\bar{K})^2}{2K^3} . \tag{12}$$

До сих пор речь шла об эффекте отдельного возмущения. Но более естественной является статистическая постановка задачи, когда возмущения в последовательных соседних интервалах длины δt оказываются случайными и независимыми друг от друга. Эффект возмущений тогда накапливается на некотором интервале движения $\Delta t >> \delta t$, который все же мал в сравнении с периодом орбитального движения. Малые независимые возмущения дают некоторый систематический дрейф и случайную диффузию в пространстве параметров. Систематический дрейф в определенном смысле аналогичен известному динамическому трению [12-14].

Мы ограничиваемся стационарным и изотропным случаем. То есть индивидуальные черты возмущения меняются от одного интервала к другому, но статистические характеристики остаются постоянными и безразличными к ориентации орбиты.

Нам понадобится двоякого рода осреднение. Во-первых, это осреднение по различным возможным реализациям возмущения. Во-вторых, осреднение эффекта вдоль орбиты. Уже при первом виде осреднения выпадают члены первого порядка в формулах (9) и (10), поскольку значения $\mathrm{grad}\Phi$, отличающиеся только заменой направления на противоположное, взаимно компенсируются уже в силу предположенной изотропии статистических характеристик возмущений. В $\delta H'$ некоторые члены даже второго порядка при первом осреднении обращаются в нуль. Действительно, в последнем члене правой части (9) мы опять видим $\mathrm{grad}\Phi$, а матрица A тоже имеет нулевое среднее по отношению к произвольным вращениям. Аналогично среднее от правой части (11) равно нулю.

Следовательно, если чертой обозначать осреднение по реализациям возмущения, то с точностью до членов второго порядка

$$\overline{\delta H'} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} \overline{\left\{\int_0^{\delta t}\left[(\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_1} - (\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_2}\right] d\tau\right\}^2}, \tag{13}$$

$$\overline{(\delta H')^2} = \overline{\left\{m_1 \upsilon_1 \int_0^{\delta t}\left[(\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_1} - (\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_2}\right] d\tau\right\}^2}, \tag{14}$$

причем мы воспользовались сохранением центра тяжести:

$$\bar{\rho}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\bar{\rho}_1, \quad \bar{\upsilon}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\bar{\upsilon}_1. \tag{15}$$

Из формул (15) следует также:

$$\bar{K} = \frac{m_1(m_1+m_2)}{m_2}\bar{\rho}_1 \times \bar{\upsilon}_1 = -m_1(\bar{\rho} \times \bar{\upsilon}_1). \tag{16}$$

Согласно формулам векторной алгебры,

$$(\bar{\rho}_1 \times \bar{\xi}) \cdot (\bar{\rho}_1 \times \bar{\upsilon}_1) = \rho_1^2(\bar{\xi}\bar{\upsilon}_1) - (\bar{\rho}_1\bar{\upsilon}_1)(\bar{\rho}_1\bar{\xi}) \tag{17}$$

для произвольного вектора $\bar{\xi}$. Используя формулы (11), (12), (16) и (17), после несложных преобразований находим

$$\overline{\delta K} = \frac{m_1^2 r_1^2}{2K^3} \overline{\left\{\bar{K}\int_0^{\delta t}\left[(\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_1} - (\mathrm{grad}\Phi)_{\rho_2}\right] d\tau\right\}^2} \tag{18}$$

и

$$\overline{\delta K^2} = m_1^2 \overline{\left\{\vec{r}_1 \times \int\limits_0^{\delta t} \left[(\text{grad}\Phi)_{\rho_1} - (\text{grad}\Phi)_{\rho_2}\right] d\tau\right\}^2}. \tag{19}$$

По отношению к вектору $\vec{\rho} = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2$ относительного положения членов пары, в векторе, характеризующем возмущение,

$$\vec{\chi} = \int\limits_0^{\delta t} \left[(\text{grad}\Phi)_{\rho_1} - (\text{grad}\Phi)_{\rho_2}\right] d\tau,$$

можно различать продольную $\vec{\chi}_\parallel$ и поперечную $\vec{\chi}_\perp$ составляющие. Точнее говоря, можно было бы различать две поперечные составляющие, но ввиду изотропии статистические свойства их совершенно одинаковы. Напротив, $\vec{\chi}_\parallel$ и $\vec{\chi}_\perp$ в этом отношении неравноправны. Вводим моменты второго порядка

$$\overline{\chi_\parallel^2} = L(\rho)\delta t, \quad \overline{\chi_\perp^2} = L_1(\rho)\delta t, \quad \overline{\vec{\chi}_\parallel \vec{\chi}_\perp} = 0. \tag{20}$$

(зависимость собственно моментов только от ρ и обращение в нуль собственного момента вытекают опять-таки из изотропии). Из формул (20) сразу следует:

$$\overline{\chi^2} = [L(\rho) + L_1(\rho)]\delta t, \quad \overline{(\vec{\rho}\vec{\chi})^2} = \rho^2 L(\rho)\delta t. \tag{21}$$

Для вектора же $\vec{K}$, по определению ортогонального к $\vec{\rho}$, имеем: $\vec{K}\vec{\chi} = \vec{K}\vec{\chi}'$, где $\vec{\chi}'$ - одна из поперечных компонент вектора $\vec{\chi}$. Тогда

$$\overline{\chi'^2} = \frac{1}{2} L_1(\rho)\delta t, \quad \overline{(\vec{K}\vec{\chi})^2} = \frac{1}{2} K^2 L_1(\rho)\delta t. \tag{22}$$

Совершенно аналогично для векторного произведения $\vec{\rho}_1 \times \vec{\chi}$ используется только одна из поперечных компонент $\vec{\chi}$, поэтому

$$\overline{(\vec{\rho}_1 \times \vec{\chi})^2} = \frac{1}{2} \rho_1^2 L_1(\rho)\delta t. \tag{23}$$

Используя формулы (22) и (23), находим:

$$\overline{\delta K} = \frac{m_1^2 \rho_1^2}{4K} L_1(\rho)\delta t, \quad \overline{(\delta K)^2} = \frac{m_1^2 \rho_1^2}{2} L_1(\rho)\delta t. \tag{24}$$

Из формулы (13), очевидно, следует:

$$\overline{\delta H'} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} [L(\rho) + L_1(\rho)]\delta t. \tag{25}$$

Несколько сложнее обстоит дело с формулой (14). Из формулы (17) вытекает:

$$\vec{v}_1 \vec{\chi} = \rho^{-2} \cdot [(\vec{\rho} \times \vec{\chi}) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{\rho}) - (\vec{\chi}\vec{\rho})(\vec{v}_1 \vec{\rho})]. \tag{26}$$

В правой части (26) в первом члене используется одна из поперечных компонент $\vec{\chi}$, а во втором члене продольная. Из-за их некоррелированности среднее от квадрата всего выражения (26) сводится к сумме средних от квадратов отдельных членов. Аналогично прежнему из формул (21) и (22) находим:

$$\overline{(\bar{v}_1\bar{\chi})^2} = \frac{(\bar{v}_1 \times \bar{\rho})^2}{2\rho^2} L_1(\rho)\delta t + \frac{(\bar{v}_1\bar{\rho})^2}{\rho^2} L(\rho)\delta t .$$

Но поскольку $(\bar{v}_1\bar{\rho})^2 = v_1^2\rho^2 - (\bar{v}_1 \times \bar{\rho})^2$, а произведение $\bar{v}_1 \times \bar{\rho}$ согласно формуле (16) связывается с $\bar{K}$, получаем:

$$\overline{(\delta H')^2} = \frac{K^2}{2\rho^2} L_1(\rho)\delta t + \left(m_1^2 v_1^2 - \frac{K^2}{\rho^2} \right) L(\rho)\delta t . \tag{27}$$

В дальнейшем нам понадобится также смешанный момент. Из формул (9), (11) и (12) с той же точностью второго порядка

$$\delta H' \delta K = \frac{m_1^2}{K} \left\{ (\bar{K} \times \bar{\rho}_1) \int_0^{\delta t} \left[(\operatorname{grad}\Phi)_{\rho_1} - (\operatorname{grad}\Phi)_{\rho_2} \right] d\tau \right\} \times$$
$$\times \left\{ \bar{v}_1 \int_0^{\delta t} \left[(\operatorname{grad}\Phi)_{\rho_1} - (\operatorname{grad}\Phi)_{\rho_2} \right] d\tau \right\} . \tag{28}$$

Первая фигурная скобка в правой части (28) содержит только поперечную, по отношению к $\bar{\rho}$, компоненту $\bar{\chi}$, поэтому и во второй скобке продольную компоненту при усреднении можно сразу отбросить из-за некоррелированности с поперечной, то есть в этой второй скобке мы имеем право оставить только первый член правой части (26). Но из равенств (16) следует

$$\bar{v}_1 = \rho_1^{-2} \cdot \left[\frac{m_2}{m_1(m_1 + m_2)} (\bar{K} \times \bar{\rho}_1) + \bar{\rho}_1 (\bar{\rho}_1 \bar{v}_1) \right],$$

что представляет собой просто другую форму разложения на продольную и поперечную компоненты. Следовательно,

$$\overline{\delta H' \delta K} = \frac{m_1 m_2 (\bar{K} \times \bar{\rho}_1)^2}{2K(m_1 + m_2)\rho_1^2} L_1(\rho)\delta t$$

или, ввиду ортогональности $\bar{K}$ и $\bar{\rho}_1$,

$$\overline{\delta H' \delta K} = \frac{K}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) L_1(\rho)\delta t . \tag{29}$$

Найденные статистические характеристики, как упоминалось, предстоит еще осреднить по всей орбите. Это полное осреднение будем отмечать угловыми скобками. В результате получаются параметры диффузии и систематического дрейфа в пространстве (H, K), именно:

$$\alpha = \left\langle \frac{\Delta K}{\Delta t} \right\rangle, \quad \beta = \left\langle \frac{\Delta H'}{\Delta t} \right\rangle, \quad \gamma = \left\langle \frac{(\Delta H')^2}{\Delta t} \right\rangle, \quad \delta = \left\langle \frac{\Delta H' \Delta K}{\Delta t} \right\rangle \tag{30}$$

(напомним, что под H' понимается внутренняя энергия пары, без ее общего поступательного перемещения, а Δt - некоторый промежуточный интервал $\gg \delta t$, ему соответствуют приращения ΔK, $\Delta H'$). Непосредственно величины, фигурирующие в формулах (30), выражаются интегралом по времени, но нам удобнее сразу перейти к интегрированию по эксцентрической аномалии E с помощью известного дифференциального соотношения

$$dt = \frac{P}{2\pi a}\rho\, dE\,, \tag{31}$$

причем через a и e мы обозначаем большую полуось и эксцентриситет относительной орбиты, а $P = 2\pi\sqrt{a^3/[G(m_1+m_2)]}$ - период. С учетом формулы (31) из предыдущих формул (24), (25), (27) и (29) получаем:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{4K}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\rho^3 L_1(\rho)dE\,, \\
\beta &= \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\cdot\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\rho[L(\rho)+L_1(\rho)]dE\,, \\
\gamma &= \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{K^2}{2\rho}L_1(\rho)+\left[\frac{Gm_1^2m_2^2}{m_1+m_2}\left(2-\frac{\rho}{a}\right)-\frac{K^2}{\rho}\right]L(\rho)\right\}dE\,, \\
\delta &= \frac{K}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)\cdot\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\rho L_1(\rho)dE\,.
\end{aligned} \tag{32}$$

При преобразовании формулы для γ нами также был учтен интеграл энергии

$$H = -\frac{Gm_1m_2}{2a} = m_1m_2\left[\frac{v^2}{2(m_1+m_2)}-\frac{G}{\rho}\right]. \tag{33}$$

В дальнейшем также понадобится известная формула для момента

$$K = \sqrt{Ga\left(1-e^2\right)}\frac{m_1m_2}{\sqrt{m_1+m_2}}\,. \tag{34}$$

Теперь можно проанализировать соответствующее уравнение Фоккера-Планка двумерной диффузии, которое для дальнейшего удобно записать в дивергентной форме:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial K}\left[-\alpha F+\frac{\partial}{\partial K}(\alpha KF)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial H}(\partial F)\right]+ \\
&+\frac{\partial}{\partial H}\left[-\beta F+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial H}(\gamma F)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial K}(\delta F)\right],
\end{aligned} \tag{35}$$

где F - плотность распределения в пространстве параметров H и K. При составлении уравнения (35) мы сразу учли зависимость между диффузией и систематическим дрейфом по переменной K, следующую из сравнения обеих формул (24). Подставляя физически правдоподобные выражения $L(\rho)$ и $L_1(\rho)$, мы всегда в состоянии численно проследить эволюцию распределения. Но уже аналитически можно проверить существование стационарного распределения

$$F_0 = \mathrm{const}\cdot K|H|^{-3/2}, \tag{36}$$

которое, как мы увидим позже, соответствует статистическому равновесию. Формальная же проверка проводится следующим образом.

Коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ у нас были выражены через величины a и e, но для дифференцирования по H и K надо использовать функциональные связи (33) и (34), согласно которым производные по обеим парам переменных связаны между собой соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial K} = -\frac{1}{em_1m_2}\sqrt{\frac{(1-e^2)(m_1+m_2)}{Ga}}\frac{\partial}{\partial e}, \quad \frac{\partial}{\partial H} = \frac{2a^2}{Gm_1m_2}\left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1-e^2}{2ea}\frac{\partial}{\partial e}\right). \quad (37)$$

После этого непосредственной, хотя и несколько кропотливой, проверкой, включающей использование иавестной формулы

$$\rho = a(1 - e\cos E)$$

и в отдельных случаях интегрирование по частям, убеждаемся в равенстве нулю каждой из квадратных скобок в уравнении Фоккера-Планка (35). Физически это означает, что с распределением (36) состояние пар не просто равновесное, но отсутствуют и потоки по каждой из переменных H и K (так называемое детальное равновесие).

Объясним теперь связь распределения (36) с категориями статистической механики. Воздействие случайных внешних полей на звездную пару представляет собой в сущности пребывание этой пары в термостате бесконечной температуры (поскольку обратным воздействием на окружающий фон мы пренебрегаем). В таких случаях стационарное распределение описывается просто постоянной фазовой плотностью. Из числа фазовых переменных сразу исключаем характеризующие общее движение и положение пары, оставляем только относящиеся к внутренним степеням свободы. Но одному и тому же набору H, K могут соответствовать разные фазовые координаты относительного положения x, y, z, v_x, v_y, v_z и надо вычислить величину фазового объема, приходящегося на определенный интервал изменения H и K. Представим себе сначала фазовый объем, внутри которого H и K удовлетворяют неравенствам

$$H < H_0, \quad K < K_0 \quad (38)$$

с некоторыми заданными постоянными H_0 и K_0 (причем $K_0 > 0$). При фиксированных координатах x, y, z первое из неравенств (38) задает сферу в пространстве скоростей

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 < \frac{2(m_1+m_2)}{m_1m_2}\left(H_0 + \frac{Gm_1m_2}{\rho}\right), \quad (39)$$

а второе - бесконечный круговой цилиндр

$$\rho v_\perp < \frac{m_1+m_2}{m_1m_2}K. \quad (40)$$

Определяя фазовый объем, соответствующий неравенствам (38), (39) и дифференцируя по переменным H_0, K_0, действительно получаем плотность (36). В терминах a, e имеем стационарную плотность

$$q(a,e) \sim e\sqrt{a}\,. \tag{41}$$

В сущности, таким же образом она определялась в [9].

3. *Конкретная модель звездного фона.* Сделаем некоторые конкретные предположения. Мы отвлекаемся от регулярного поля Галактики. Эффекты окружающего фона исходят, таким образом, только от взаимно независимых прохождений отдельных звезд, распределенных в пространстве с однородной плотностью ν. Примем для всех этих звезд поля одну и ту же массу m и одинаковую абсолютную величину скорости v_0. Напомним, что распределение направлений скорости считаем изотропным. Тогда, если выделить только те звезды, вектор скорости которых лежит в телесном угле $d\Omega$, среднее число их прохождений за время dt на единицу сечения, перпендикулярного оси этого телесного угла, составляет

$$d\omega = \frac{v_0 \nu\, d\Omega\, dt}{4\pi}\,.$$

Относительно изучаемой пары опять предполагаем, что ее центр тяжести покоится в системе координат, в которой только что задавалось движение звезд фона. Вообще говоря, массы членов пары отличны друг от друга и от величины m. Можно даже утверждать, что в типичных ситуациях m_1 и m_2 больше m, так как в процессе коллективного звездообразования относительно массивные звезды имеют больше шансов удержаться вместе. Отношения m/m_1 и m/m_2 мы все же не считаем пренебрежимо малыми. Однако мы продолжаем пользоваться малостью эффекта отдельного прохождения, то есть приращения невозмущенных скоростей орбитального движения $\delta\bar{v}_1$ и $\delta\bar{v}_2$ в результате прохождения малы в сравнении с самими этими скоростями, и в основных формулах мы применяем разложение относительных приращений параметров по степеням интенсивности возмущения $\delta v_1/v_1$ и $\delta v_2/v_2$. Чтобы правильно описать систематический дрейф и диффузию, мы должны оставлять члены до второго порядка малости в указанном смысле. Исключение составляют редкие очень тесные прохождения, когда индивидуальные δv_1 или δv_2 сравнимы с самими v_1 и v_2. Для исключения таких редких событий мы вводим некоторое минимально допустимое прицельное расстояние ε. Некоторые выкладки с "выключением" взаимодействия на расстояниях, меньших ε, дают:

$$L = \overline{\chi_{\|}^2} = \frac{16\pi}{3v_0}(Gm)^2\nu\left(\ln\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{7}{6}\right), \quad L_1 = \overline{\chi_{\perp}^2} = \frac{32\pi}{3v_0}(Gm)^2\nu\left(\ln\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{5}{6}\right). \tag{42}$$

Другие приемы вычислений, основанные на прямом подсчете изменения H и K, дают результаты, практически совпадающие с формулами (42).

Точное значение ε не играет заметной роли для очень широких пар, о которых мы в дальнейшем и будем говорить. Действительно, одиночный импульс от звезды, проходящей на расстоянии ε, достаточен для отрыва, начиная с

$$\frac{Gm}{v_0\varepsilon} \sim \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a}}\,, \quad \varepsilon \sim \frac{m}{v_0}\sqrt{\frac{Ga}{m_1+m_2}}$$

и отношение ε больше как раз у широких пар, чем у тесных. Поэтому в дальнейшем принимаем приближенно

$$\frac{L_1}{2} = L = D = \frac{16\pi}{3v_0}(Gm)^2 \nu \ln\frac{a}{\varepsilon}\,. \tag{43}$$

Для сравнительно тесных пар, конечно, потребуется несколько бóльшая точность, и этот вопрос требует специального исследования. Формулы (42) дают только грубую ориентировку, и, видимо, окажется более полезным какой-то другой способ обрезания совместно со специальным учетом отдельных больших уклонений. Для широких же пар достаточно диффузионного приближения. Подставляя формулы (43) в формулу (32) и перейдя к переменным h, η, находим искомое уравнение Фоккера-Планка для плотности $f(h,\eta)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Q\left\{\frac{5}{2h}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\eta(1-\eta)\frac{\partial f}{\partial\eta}\right] + \frac{3}{2}\frac{\partial f}{\partial h} + \frac{\partial^2}{\partial h^2}(hf)\right\}, \tag{44}$$

где

$$Q = \frac{Dm_1m_2}{m_1+m_2}, \qquad \eta = 1 - e^2$$

и для удобства изменен знак, то есть h - энергия связи, $h = -H$.

Само по себе диффузионное уравнение встречается в литературе, например, в [15], выкладки остаются в конце концов в численной форме, а аналитический вид (44), по-видимому, раньше никем не приводился.

4. *Характерное решение диффузионного уравнения.* В условиях реальных галактик фазовая плотность фона много меньше фазовой плотности внутри множества звездных пар (поскольку плотность числа пар в пространственном распределении сравнима с плотностью одиночных звезд, а для широких пар $v_0 \gg v_{1,2}$). Поэтому диффузия на границе $h = 0$ идет как бы в пустоту. Несколько точнее, можно сказать, что фазовая плотность поддерживается на нулевом уровне при некотором малом $h = h_\varepsilon$, соответствующем той энергии, при которой уже почти каждая проходящая звезда разрывает пару. Тогда стационарное состояние вблизи этой границы, как легко видеть из формулы (44), описывается функцией

$$f \sim \text{const}\cdot\left[1 - \left(\frac{h_\varepsilon}{h}\right)^{5/2}\right]$$

и после перехода $h_\varepsilon \to 0$ получаем, что на границе фазовая плотность поддерживается на постоянном, по отношению к h, уровне, а не следует закону $h^{-5/2}$, который соблюдался бы при наличии некоей отражающей оболочки. При больших же энергиях связи закон $h^{-5/2}$, во всяком случае, правдоподобен: внешние возмущения на тесные пары почти не влияют.

С учетом сказанного о граничных условиях, можно подобрать подходящее решение (44), именно

$$f_0 = \mathrm{const} \cdot h^{-5/2} \int_0^{h/t} u^{3/2} e^{-u/Q} du . \qquad (45)$$

Заметим, что интегрирование (45) по всем h дает конечный результат, но не постоянный по t:

$$\int_0^{\infty} f_0 dh = \mathrm{const} \cdot t^{-3/2} . \qquad (46)$$

Итак, опустошение фазового пространства двойных звезд происходит по степенному закону (46). Его легко объяснить физически: в уравнении (44) присутствует единственная характерная компонента Q размерности h/t, дающая темп исчезновения объектов периферии до $h \sim Qt$, оставшиеся же пары с законом распределения $\sim h^{-5/2}$ тогда как раз и дают после интегрирования формулу (46).

Компоненты плотности, зависящие от η, дают при длительной эволюции существенно меньший вклад. Обычный прием разделения переменных позволяет получить решение $f_n = P_n(2\eta - 1) \cdot B(\eta, t)$, где P_n - полиномы Лежандра, а для функции B получаем уравнение

$$\frac{\partial B}{\partial t} = Q\left[\frac{3}{2}\frac{\partial B}{\partial h} + \frac{\partial^2}{\partial h^2}(hB) - \frac{5n(n+1)}{2h}B\right]. \qquad (47)$$

Такой же, как раньше, прием с учетом граничных условий дает

$$B = \mathrm{const} \cdot h^{-5/2-\mu} \int_0^{h/t} u^{3/2+2\mu} e^{-u/Q} du , \qquad (48)$$

где

$$\mu = \frac{\sqrt{5\left(8n^2 + 8n + 5\right)} - 5}{4} ,$$

а в результате интегрирования (48) находим

$$\int_0^{\infty} B dh \sim t^{-(3/2+\mu)},$$

то есть неоднородности по η затухают существенно быстрее, чем общая фазовая плотность. Поэтому распределение пар по эксцентриситету должно в хорошем приближении следовать закону $\sim e$, несмотря на прогрессирующее опустошение области малых h.

5. *Заключение*. Широкие звездные пары до сих пор мало привлекали внимание теоретиков. Это связано, во-первых, с трудностью их обнаружения на фоне случайных оптических пар, во-вторых, как показывают расчеты в

данной статье, сама эволюция широких пар должна быть достаточно сложной из-за невозможности пренебречь гравитационным воздействием постоянно проходящих звезд. В какой-то мере оба фактора взаимосвязаны: расстояние внутри пары примерно такое же, как между звездами фона. Тем не менее, вся система пара + звезда фона может считаться тройной лишь геометрически, но не кинематически, так как члены пары, вообще говоря, остаются гравитационно связанными после ухода звезды поля за счет своей малой относительной скорости. Однако в большинстве космогонических моделей образование какого-то количества широких пар, по-видимому, неизбежно: либо непосредственно, либо в результате эволюции первоначально тесных пар. Фактический поиск широких пар представлял бы интерес для проверки различных космогонических представлений. Некоторые работы в этом направлении имеются [16].

Оценка значений $a=a^*$, до которых пары еще не успевают существенно разрушиться за время T существования Галактики, получается сравнением энергии связи пары $h^* = G m_1 m_2/(2a^*)$ с произведением QT. Это дает в условиях Галактики при обычных массах звезд $a^* \approx 3\cdot 10^3 - 10^4$ а.е.

Возможны и другие варианты постановки задачи о связанных парах на фоне случайных воздействий, в частности, свою специфику имеет вариант $m_{1,2} >> m$ [17,18].

Далее, проблема широких пар имеет некоторое родство с проблемами кометного облака вокруг Солнца и тех потоков молодых звезд, которые образуются в результате разрушения рыхлых скоплений и ассоциаций. Относительно длительное существование широких пар, как и вообще рыхлых звездных агрегатов, должно служить препятствием свободному перемешиванию звездных населений. Это надо принимать во внимание в схемах химической эволюции Галактики.

Что касается более тесных пар, то, кроме уже отмеченных, для них необходимо принимать во внимание такие существенные факторы, как приливные явления [11] в каждой компоненте и связанное с этим взаимное перераспределение орбитального и внутреннего момента [19]. Для пар близких галактик и других объектов эти факторы опять-таки проявляются несколько по-другому, в отличие от сравнительно единообразных задач с широкими парами гравитирующих тел.

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
Россия, e-mail: baranov@gao.spb.ru

THE EVOLUTION OF A WIDE STAR PAIR AT THE EXPENSE OF IRREGULAR FORCES

A.S.BARANOV

The dynamical evolution of a wide star pair (with the distance in the typical conditions of the Galaxy ~10^4 AU) under the influence of random actions from stars of the background during passages has been theoretically studied. The passage giving at a certain instant an approximately equilateral triangle has been considered. The summary effect of many passages can be divided into systematic "heating" of the pair and into random diffusion according to the Keplerian elements *a* and *e*. The corresponding Fokker-Planck equation has been derived and the boundaries of its applicability have been indicated. The steady state distribution according to the quantities *a* and *e* has been obtained.

Key words: *(stars:)wide pairs - stars:evolution:irregular forces*

ЛИТЕРАТУРА

1. *К.Ф.Огородников*, Динамика звездных систем, Физматгиз, М., 1958.
2. *Т.А.Агекян, Ж.П.Аносова*, Астрофизика, **4**, 469, 1968.
3. *D.Heggie*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **173**, 729, 1975.
4. *J.Hills*, Astron. J., **80**, 809, 1975.
5. *D.Heggie, P.Hut*, Astrophys. J. Suppl. Ser., **85**, 347, 1993.
6. *S.Sigurdsson, E.S.Phinney*, Astrophys. J., **415**, Pt.1, 631, 1993.
7. *M.Valtonen*, Celest. Mech. Dyn. Astron., **68**, 27, 1997.
8. *F.Leeuwin, F.Combes*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **284**, 45, 1997.
9. *В.А.Амбарцумян*, Астрон. ж., **14**, 207, 1937.
10. *Л.Э.Гуревич, Б.Ю.Левин*, Астрон. ж., **27**, 273, 1950.
11. *В.И.Докучаев*, Успехи физ. наук, **161**, 1, 1991.
12. *S.Chandrasekhar*, Astrophys. J., **97**, 225 (Part I, II); **98**, 54 (Part III), 1943.
13. *А.С.Баранов, Ю.В.Батраков*, Астрон. ж., **51**, 310, 1974.
14. *В.А.Антонов, А.С.Баранов*, Бюлл. Ин-та теор. астрон., **13**, 52, 1974.
15. *T.S. van Albada*, Bull. Astron. Inst. Nethl., **20**, 57, 1968.
16. *С.В.Верещагин, З.Т.Крайчева, Е.И.Попова и др.*, Письма в Астрон. ж., **13**, 62, 1987.
17. *А.С.Баранов*, Астрон. ж., **61**, 1098, 1984.
18. *А.С.Баранов*, Астрон. ж., **63**, 220, 1986.
19. *P.Brosche*, Astron. Nachr., **286**, 241, 1962.