АСТРОФИЗИКА

ТОМ 46 ФЕВРАЛЬ, 2003 ВЫПУСК 1

УДК: 524.8:531.51

ВАКУУМНЫЕ ЭФФЕКТЫ В КОНФОРМНО-ПЛОСКОЙ БРАН-КОСМОЛОГИИ И СТАБИЛИЗАЦИЯ РАДИОНА

А.А.СААРЯН

Поступила 31 июля 2002
Принята к печати 6 ноября 2002

Исследованы вакуумные квантовые эффекты конформно-связанного скалярного поля на фоне конформно-плоской геометрии бран-миров. На основе соответствующих результатов для пространства-времени Минковского в общем случае смешанных граничных условий на бранах выведены формулы для вакуумных средних тензора энергии-импульса и для вакуумных сил, действующих на границы. Рассмотрен важный частный случай AdS-фона и обсуждаются приложения к модели Рандалл-Сундрума. Показана возможность стабилизации радиона вакуумными силами.

1. *Введение*. В последние годы у физиков вызывают большой интерес модели с дополнительными пространственными размерностями. Основной стимул для рассмотрения пространства как многомерного дают теории, которые наиболее адекватным образом включают в себя гравитацию: теория струн и М-теория. Почти все варианты этих теорий естественно и самосогласованно формулируются в пространстве-времени с числом измерений больше четырех. Одной из основных проблем многомерных теорий является механизм, благодаря которому дополнительные измерения скрыты, так что при изучении обычных физических явлений пространство-время выглядит как эффективно четырехмерное. До последнего времени в основном рассматривались теории типа модели Калуцы-Клейна, в которых дополнительные измерения компактны и по существу однородны. Именно компактность дополнительных измерений обеспечивает в таких моделях эффективную четырехмерность пространства-времени на расстояниях, превышающих масштаб компактификации. Однако недавно особое внимание стало уделяться представлению о бран-мирах, в котором подразумевается локализация обычного вещества на трехмерном многообразии - бране, вложенном в объемлющее многомерное пространство, а дополнительные измерения доступны только гравитонам и, возможно, другим гипотетическим частицам, слабо взаимодействующим с веществом. В моделях бран-миров дополнительные измерения могут иметь большой или даже бесконечно большой размер и могут приводить к экспериментально наблюдаемым эффектам. Наличие больших дополнительных измерений позволяет редуцировать фундаментальный многомерный гравитационный масштаб к энергиям порядка 1 ТэВ [1] и тем самым разрешить проблему иерархии

между планковским и электрослабым масштабами. Одним из наиболее популярных сценариев бран-миров является модель, предложенная Рандалл и Сундрумом [2]. Она основана на нефакторизуемой геометрии и содержит одно дополнительное измерение, являющееся S_1/Z_2 орбифолдом. Две браны с тремя пространственными измерениями и с противоположными натяжениями находятся в неподвижных точках орбифолда и вместе с отрицательной фоновой космологической постоянной являются источником пятимерной гравитации. Соответствующая пространственно-временная метрика содержит фактор, который экспоненциально зависит от радиуса дополнительной размерности. В сценарии, предложенном в [2], расстояние между бранами связано с вакуумным ожиданием безмассового четырехмерного скалярного поля (поле радиона). Это модулярное поле имеет нулевой потенциал и, следовательно, расстояние не определяется динамикой модели. Для успешной реализации сценария необходим механизм генерации потенциала для стабилизации расстояния между бранами. Классические стабилизирующие силы вследствие наличия нетривиальных фоновых конфигураций скалярного поля были рассмотрены в работах [3-5]. Однако, как показано в [6,7], классическое скалярное взаимодействие не может стабилизировать расстояние между двумя бранами с положительным натяжением. Другой механизм стабилизации основан на силах Казимира, генерированных квантовыми вакуумными флуктуациями фоновых полей. Для конформно-связанного скалярного поля этот эффект сначала был рассмотрен в [8] в контексте М-теории и далее в [9] для фоновой геометрии Рандалл-Сундрума. Тот же эффект был в дальнейшем исследован в работах [10]. Недавно был предложен вариант модели бран-миров с компактным гиперболическим многообразием в качестве нетривиального внутреннего пространства [11,12]. Как показано в работах [13,14], космология в этих пространствах обладает интересными свойствами для физики ранней Вселенной. Проблема стабилизации радиона в гиперболическом сценарии бран-миров рассмотрена в [15].

В данной работе исследованы вакуумные средние тензора энергии-импульса конформно-связанного скалярного поля на фоне конформно-плоской геометрии бран-миров. Рассмотрены общие плоско-симметричные решения уравнений гравитационного поля и граничные условия Робина на бранах. Последние включают, как частный случай, граничные условия Дирихле и Неймана. В этих геометриях казимировский тензор энергии-импульса может быть генерирован из соответствующих результатов для случая плоского пространства-времени с использованием стандартного закона преобразования. Ранее этот метод был использован для вывода вакуумных характеристик конфигурации Казимира вблизи статической доменной стенки в случае скалярного поля с граничными условиями Дирихле на пластинах. Для граничных условий Неймана или более общих смешанных граничных условий необходимо иметь казимировский тензор энергии-импульса в пространстве-времени Минковского в случае граничных условий Робина с коэффициентами, связанными с компонентами метрики геометрии бран-мира и с граничными массовыми членами. Эффект Казимира для скалярного поля с общей конформной связью и с граничными условиями Робина на фоне пространства-временни Минковского исследован в работе [16] для плоских границ и в работах [17,18] для сферически и цилиндрически симметричных границ. В данной работе мы воспользуемся результатами работы [16] для генерации вакуумного тензора энергии-импульса на фоне конформно-плоских многообразий. Статья организована следующим образом. В следующем разделе исследованы вакуумные средние тензора энергии-импульса конформно-связанного скалярного поля и действующие на браны вакуумные силы для общего случая конформно-плоского плоско-симметричного фонового многообразия. В разделе 3 соответствующие результаты конкретизированы для анти-де-ситтеровского фона. Основные результаты работы подытожены в Заключении.

2. *Вакуумные средние тензора энергии-импульса*. Рассмотрим безмассовое скалярное поле $\varphi(x)$, конформно-связанное со скаляром Риччи R $D+1$ - мерной фоновой метрики $g_{\mu\nu}$. Соответствующее уравнение поля имеет вид

$$\left(\nabla_\mu \nabla^\mu + \zeta R\right)\varphi(x) = 0, \quad \zeta = \frac{D-1}{4D}, \tag{1}$$

где ∇_μ - оператор ковариантного дифференцирования, ζ - параметр связи с кривизной. Пусть фоновое пространство-временное многообразие является конформно-плоским с метрикой

$$g_{\mu\nu} = e^{-2\sigma(z)}\eta_{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 0,1,\ldots,D, \tag{2}$$

где $\sigma(z)$ - произвольная функция координаты $x^D \equiv z$, $\eta_{\mu\nu}$ - метрический тензор пространства-времени Минковского. Соответствующий скаляр Риччи имеет вид

$$R = De^{2\sigma}\left[2\sigma''(z) - (D-1)\sigma'^2(z)\right], \tag{3}$$

а штрих означает производную по z. Ниже будем полагать, что на фоне метрики (2) имеются две параллельные браны с координатами $z = z_1$ и $z = z_2$, на которых поле $\varphi(x)$ удовлетворяет смешанным граничным условиям (условия Робина),

$$\left(a_j + b_j n^\mu \nabla_\mu\right)\varphi(x) = 0, \quad z = z_j, \quad j = 1,2, \tag{4}$$

где n^μ - вектор нормали соответствующих гиперповерхностей, $n_\mu n^\mu = -1$, а a_j, b_j являются постоянными. Введя новую координату y согласно

$$dy = e^{-\sigma(z)}dz, \tag{5}$$

условия (4) запишутся в виде

$$\left(a_j+(-1)^{j-1}b_j e^{\sigma(z_j)}\partial_z\right)\varphi(x)=\left(a_j+(-1)^{j-1}b_j\partial_y\right)\varphi(x)=0,\ \ y=y_j,\ \ j=1,2\,, \tag{6}$$

Заметим, что собственное (физическое) расстояние между бранами определяется координатой y:

$$\Delta y \equiv y_2-y_1=\int_{z_1}^{z_2} e^{-\sigma(z)}\,dz\,. \tag{7}$$

Граничные условия Дирихле и Неймана являются частными случаями условий (4), соответствующими наборам постоянных $(a_j,b_j)=(1,0)$ и $(a_j,b_j)=(0,1)$, соответственно. Дальнейшие результаты будут зависеть только от отношения b_j/a_j, $j=1$, 2. Однако с точки зрения предельных переходов к случаям условий Дирихле и Неймана удобно записать граничные условия в виде (4).

Целью данной работы является исследование вакуумных средних тензора энергии-импульса поля $\varphi(x)$ в области $z_1<z<z_2$. Вследствие наличия граничных условий, спектр нулевых колебаний скалярного поля меняется по сравнению с ситуацией без границ. Это приводит к изменениям в вакуумных средних физических величин, таких, как вакуумная плотность энергии и вакуумные натяжения. В результате появляются силы, действующие на браны. Это является проявлением хорошо известного эффекта Казимира (см., например, [19-22] и приведенные там ссылки).

Для конформно-связанного скалярного поля, воспользовавшись уравнением (1), выражение для метрического тензора энергии-импульса можно представить в виде

$$T_{\mu\nu}=\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi-\zeta\left(\frac{g_{\mu\nu}}{D-1}\nabla_\rho\nabla^\rho+\nabla_\mu\nabla_\nu+R_{\mu\nu}\right)\varphi^2\,, \tag{8}$$

где $R_{\mu\nu}$ - тензор Риччи метрики $g_{\mu\nu}$. Квантование скалярного поля на фоне метрики (2) и с граничными условиями (4) проводится стандартным образом. Пусть $\{\varphi_\alpha(x),\varphi_\alpha^*(x)\}$ - полный набор положительно и отрицательно частотных решений уравнения поля (1), удовлетворяющих граничным условиям (4). Разлагая оператор поля по этим собственным функциям и воспользовавшись соответствующими коммутационными соотношениями и определением вакуума, для вакуумных ожиданий тензора энергии-импульса получим

$$<0\,|\,T_{\mu\nu}(x)\,|\,0>=\sum_\alpha T_{\mu\nu}\{\varphi_\alpha(x),\varphi_\alpha^*(x)\}, \tag{9}$$

где $|0>$ - амплитуда соответствующего вакуумного состояния, а билинейная форма $T_{\mu\nu}\{\varphi,\psi\}$ в правой части определяется видом классического тензора энергии-импульса (7). В рассматриваемой здесь задаче мы имеем конформно-тривиальную ситуацию: конформно-инвариантное поле на фоне конформно-плоского пространства-времени. В результате соответствующие вакуумные ожидания могут быть получены из результатов для скалярного поля $\overline{\varphi}$ на фоне плоского пространства-времени с метрикой $\eta_{\mu\nu}$ на основе конформных свойств задачи. При конформном преобразовании метрики $g_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}$ поле $\overline{\varphi}$ преобразуется по закону

$$\varphi(x) = \Omega^{(1-D)/2}\overline{\varphi}(x), \tag{10}$$

где конформный фактор для метрики (2) равен $\Omega = e^{-\sigma(z)}$. Запишем граничные условия для поля $\overline{\varphi}(x)$ в виде, аналогичном (6):

$$\left(\overline{a}_j + (-1)^{j-1}\overline{b}_j \partial_z\right)\overline{\varphi}(x) = 0, \quad z = z_j, \quad j = 1, 2, \tag{11}$$

с новыми постоянными $\overline{a}_j$, $\overline{b}_j$. Сравнивая с граничными условиями (4), с учетом закона преобразования (10) получим следующее соотношение между соответствующими коэффициентами Робина:

$$\overline{a}_j = a_j + (-1)^{j-1}\frac{D-1}{2}\sigma'(z_j)e^{\sigma(z_j)}b_j, \quad \overline{b}_j = b_j e^{\sigma(z_j)}. \tag{12}$$

Заметим, что, поскольку граничное условие Дирихле конформно инвариантно, скаляр Дирихле на искривленном фоне соответствует скаляру Дирихле на фоне плоского пространства-времени. Однако для скалярного поля с граничным условием Неймана соответствующий скаляр на фоне плоского пространства-времени удовлетворяет граничному условию Робина с коэффициентами $\overline{a}_j = (-1)^{j-1}(D-1)\sigma'(z_j)/2$ и $\overline{b}_j = 1$. Эффект Казимира для скалярного поля с произвольным параметром конформной связи ζ и с граничными условиями (11) на двух параллельных пластинах в пространстве-времени Минковского исследован в работе [16]. В частном случае поля с конформной связью соответствующие регуляризованные вакуумные средние тензора энергии-импульса постоянны в области между пластинами и имеют вид

$$<\overline{T}_\nu^\mu[\eta_{\alpha\beta}]>_{\text{ren}} = -\frac{J_D(B_1, B_2)}{2^D\pi^{D/2}a^{D+1}\Gamma(D/2+1)}\operatorname{diag}(1, 1, \ldots, -D), \quad z_1 < z < z_2, \tag{13}$$

где $\Gamma(x)$ - гамма функция,

$$J_D(B_1, B_2) = \text{p.v.}\int_0^\infty \frac{t^D dt}{\frac{(B_1t-1)(B_2t-1)}{(B_1t+1)(B_2t+1)}e^{2t}-1}, \tag{14}$$

и введены обозначения

$$B_j = \frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_j a}, \quad j = 1, 2, \quad a = z_2 - z_1. \tag{15}$$

Подынтегральная функция в (14) в зависимости от значений коэффициентов B_j может иметь простые полюсы. Символ p.v. означает, что в этих полюсах интеграл определяется в смысле главного значения по Коши. Для скалярного поля с граничными условиями Дирихле имеем $B_1 = B_2 = 0$ и функция (14) равна $J_D(0,0) = 2^{-D-1}\Gamma(D+1)\zeta_R(D+1)$, где $\zeta_R(x)$ - дзета функция Римана. Заметим, что в областях $z < z_1$ и $z > z_2$ казимировские плотности равны нулю:

$$< \bar{T}_\nu^\mu [\eta_{\alpha\beta}] >_{\rm ren} = 0, \quad z < z_1, \ z > z_2 . \tag{16}$$

Это непосредственно следует также из формулы (13) предельным переходом $z_1 \to -\infty$ или $z_2 \to +\infty$. Области значений коэффициентов B_1, B_2, в которых знаменатель подынтегрального выражения в формуле (14) имеет нули относительно t, указаны в работе [16]. В частности, знаменатель

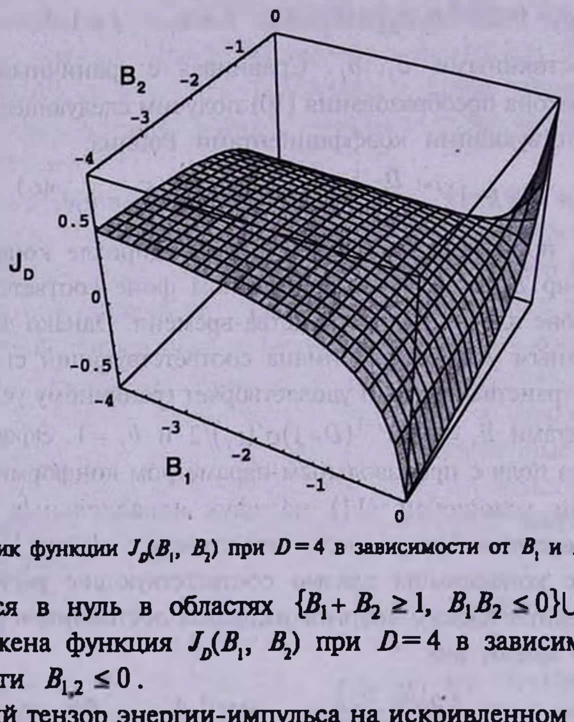

Рис.1. График функции $J_D(B_1, B_2)$ при $D = 4$ в зависимости от B_1 и B_2.

не обращается в нуль в областях $\{B_1 + B_2 \geq 1, \ B_1 B_2 \leq 0\} \cup \{B_{1,2} \leq 0\}$. На рис.1 изображена функция $J_D(B_1, B_2)$ при $D = 4$ в зависимости от B_1 и B_2 и в области $B_{1,2} \leq 0$.

Вакуумный тензор энергии-импульса на искривленном фоне, определяемом метрикой (2), можно найти с помощью стандартного закона преобразования между конформно-связанными задачами (см., например, [23]) и имеет вид

$$< T_\nu^\mu [g_{\alpha\beta}] >_{\rm ren} = < T_\nu^\mu [g_{\alpha\beta}] >_{\rm ren}^{(0)} + < T_\nu^\mu [g_{\alpha\beta}] >_{\rm ren}^{(b)} . \tag{17}$$

Здесь первое слагаемое в правой части соответствует тензору энергии-импульса для искривленного фона без границ (чисто гравитационная часть), а второе слагаемое обусловлено наличием границ, в роли которых выступают браны. Для рассматриваемого здесь случая конформно-связанного поля на фоне конформно-плоского пространства-времени чисто гравитационная часть тензора энергии-импульса полностью определяется аномалией следа и связана с расходящейся частью соответствующего эффективного действия соотношением [23]

$$< T_\nu^\mu [g_{\alpha\beta}] >_{\rm ren}^{(0)} = 2 g^{\mu\sigma}(x) \frac{\delta}{\delta g^{\nu\sigma}(x)} W_{\rm div} [g_{\alpha\beta}] . \tag{18}$$

Заметим, что в пространстве-времени нечетной размерности конформная аномалия отсутствует и соответствующая гравитационная часть равна нулю:

$$< T_{\nu}^{\mu}\left[g_{\alpha\beta}\right] >_{\mathrm{ren}}^{(0)} = 0, \quad \text{для четных } D. \tag{19}$$

Часть вакуумного тензора энергии-импульса, обусловленная наличием границ, связана с соответствующими величинами (13) и (16) для плоского пространственно-временного фона соотношением [23]

$$< T_{\nu}^{\mu}\left[g_{\alpha\beta}\right] >_{\mathrm{ren}}^{(b)} = \frac{< \overline{T}_{\nu}^{\mu}\left[\eta_{\alpha\beta}\right] >_{\mathrm{ren}}}{\sqrt{\left|\det\left(g_{\alpha\beta}\right)\right|}}. \tag{20}$$

С учетом формулы (13) отсюда получим

$$< T_{\nu}^{\mu}\left[g_{\alpha\beta}\right] >_{\mathrm{ren}}^{(b)} = -\frac{e^{(D+1)\sigma(z)} J_D(B_1, B_2)}{2^D \pi^{D/2} a^{D+1} \Gamma(D/2+1)} \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, -D), \tag{21}$$

при $z_1 < z < z_2$, и

$$< T_{\nu}^{\mu}\left[g_{\alpha\beta}\right] >_{\mathrm{ren}}^{(b)} = 0, \quad \text{при} \quad z < z_1, \quad z > z_2. \tag{22}$$

В формуле (21) постоянные B_j связаны с коэффициентами в граничных условиях (4) соотношениями (15), (12) и являются функциями от z_j. В частности, для граничных условий Неймана имеем $B_j^{(N)} = = 2(-1)^{j-1} / \left[a(D-1)\sigma'(z_j)\right]$.

Граничная часть полной энергии вакуума на единицу площади браны $z = z_j$ получается интегрированием по области между пластинами:

$$E_j^{(b)} = e^{D\sigma(z_j)} \int_{z_1}^{z_2} < T_0^0 >_{\mathrm{ren}}^{(b)} e^{-(D+1)\sigma(z)} dz = -\frac{e^{D\sigma(z_j)} J_D(B_1, B_2)}{2^D \pi^{D/2} \Gamma(D/2+1) a^D}. \tag{23}$$

Вакуумная сила, действующая на единицу поверхности границы с $z = z_j$, определяется разностью

$$< T_D^D\left[g_{\alpha\beta}\right] >_{\mathrm{ren}|z=z_j+0} - < T_D^D\left[g_{\alpha\beta}\right] >_{\mathrm{ren}|z=z_j-0}. \tag{24}$$

Поскольку гравитационная часть является непрерывной функцией от z, то отсюда следует, что она не дает вклада в вакуумные силы, действующие на браны. Эти силы, действующие на единицу поверхности браны $z = z_j$, определяются граничной частью вакуумного давления, $p_D = -< T_D^D\left[g_{\alpha\beta}\right] >_{\mathrm{ren}}^{(b)}$, в точке $z = z_j$:

$$p_{Dj}(z_1, z_2) = -\frac{e^{(D+1)\sigma(z_j)} J_D(B_1, B_2)}{2^{D-1} \pi^{D/2} \Gamma(D/2) a^{D+1}}. \tag{25}$$

Поскольку собственная площадь элемента гиперповерхности $z = z_j$ с координатами $0 \le x^i \le \Delta x^i$, $i = 1, 2, \ldots, D-1$ равна $e^{-D\sigma(z_j)} \Delta x^1 \ldots \Delta x^{D-1}$, то сила, действующая на этот элемент, определяется формулой $p_{Dj}(z_1, z_2) e^{-D\sigma(z_j)} \Delta x^1 \ldots \Delta x^{D-1}$. Выражение (25) соответствует силам отталкивания между границами при $p_{Dj} > 0$ и силам притяжения - при $p_{Dj} < 0$.

Равновесные положения бран соответствуют нулям выражения в правой части (25): $p_D(z_1, z_2) = 0$. Эти точки являются нулями функции $J_D(B_1, B_2)$, задаваемой выражением (14), и одни и те же для обеих бран. Заметим, что в этих точках вакуумные средние граничной части тензора энергии-импульса (21) и полная граничная энергия вакуума между бранами (23) также обращаются в нуль. Расположение указанных нулей при $D = 4$ в квадранте $B_{1,2} \leq 0$ плоскости (B_1, B_2) изображено на рис.2. Функция $J_D(B_1, B_2)$ положительна в области между кривыми (область, включающая точку (0, 0)), равна нулю на этих кривых и отрицательна вне указанной области. Когда $B_1 = 0$, нуль функции $J_D(B_1, B_2)$ получается при значении $B_2 \approx -0.447$. В пределе $B_1 \to \infty$ для соответствующего нуля имеем $B_2 \approx -0.438$.

3. ***Казимировские плотности и вакуумные силы на*** AdS_{D+1} ***фоне***. В качестве приложения полученных выше общих результатов рассмотрим важный частный случай анти-де-ситтеровского фона AdS_{D+1}. Пространство анти-де-Ситтера является максимально-симметричным решением (максимальное число векторов Киллинга) уравнений Эйнштейна с отрицательной космологической постоянной. В современной гравитационной физике интерес к этому пространству обусловлен несколькими причинами. Во-первых, вблизи горизонтов различных бран-решений теории струн и супергравитации геометрия описывается AdS-метрикой. Дуальность между физикой на AdS-фоне и конформной теорией поля на границе (AdS/CFT соответствие) устанавливает связь между супергравитацией в пространсвте анти-де-Ситтера и суперсимметричной теорией Янга-Миллса

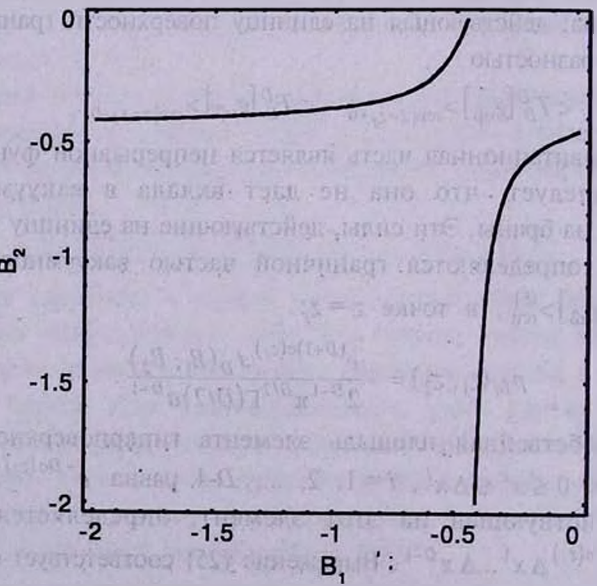

Рис.2. Расположение нулей функции $J_D(B_1, B_2)$ на квадранте $B_{1,2} \leq 0$ плоскости (B_1, B_2) при $D = 4$.

[24] (см. также обзор [25]). Во-вторых, пространство анти-де-Ситтера является точным максимально суперсимметричным вакуумным состоянием теорий струн и супергравитации. И, наконец, это пространство является фоновой геометрией большинства моделей бран-миров.

Для фоновой геометрии AdS_{D+1} определяющая конформный фактор функция $\sigma(z)$ в выражении (2) для метрики имеет вид

$$\sigma(z) = \ln(k_D z) = k_D y\,, \tag{26}$$

где постоянная k_D определяет соответствующий радиус кривизны пространства анти-де-Ситтера и связана со скаляром Риччи соотношением $R = -D(D+1)k_D^2$. Теперь выражения для коэффициентов B_j, $j = 1,\ 2$ принимают вид

$$B_j = \frac{b_j k_D z_j}{(z_2 - z_1)\left[a_j + (-1)^{j-1}(D-1)k_D b_j/2\right]}. \tag{27}$$

Заметим, что, согласно (7), теперь отношение z_2/z_1 связано с собственным расстоянием между бранами соотношением

$$z_2/z_1 = e^{k_D \Delta y}. \tag{28}$$

Для вакуумного тензора энергии-импульса, индуцированном бранами, имеем

$$< T_\nu^\mu[g_{\alpha\beta}] >_{\mathrm{ren}}^{(b)} = -\left(\frac{k_D z}{z_2 - z_1}\right)^{D+1} \frac{J_D(B_1, B_2)}{2^D \pi^{D/2}\Gamma(D/2+1)}\,\mathrm{diag}(1, 1, ..., 1, -D). \tag{29}$$

где B_j являются функциями собственного расстояния между бранами. Объемная вакуумная энергия на единицу гиперповерхности на бране $z = z_j$ получается из формулы (23):

$$E_j^{(b)} = -\left(\frac{k_D z_j}{z_2 - z_1}\right)^D \frac{J_D(B_1, B_2)}{2^D \pi^{D/2}\Gamma(D/2+1)}. \tag{30}$$

Вакуумные силы на единицу поверхности являются функциями собственного расстояния Δy и отношения коэффициентов Робина a_j/b_j:

$$p_{Dj} = -\left(\frac{k_D z_j}{z_2 - z_1}\right)^{D+1} \frac{J_D(B_1, B_2)}{2^{D-1}\pi^{D/2}\Gamma(D/2)}, \quad j = 1, 2. \tag{31}$$

Рассмотрим предельные случаи формулы (31). Пусть сначала собственное расстояние между бранами намного больше радиуса кривизны анти-де-ситтеровского пространства: $k_D \Delta y >> 1$. В этом случае, согласно формуле (28), имеем $z_2 >> z_1$, и поэтому $|B_1| << 1$. В ведущем порядке по отношению z_1/z_2 для вакуумных сил получим

$$p_{Dj} \approx -e^{(D+1)(j-2)k_D \Delta y} \frac{k_D^{D+1} J_D(0, B_2)}{2^{D-1}\pi^{D/2}\Gamma(D/2)},\ B_2 \approx \frac{b_2 k_D}{a_2 - (D-1)k_D b_2/2},\ j = 1, 2. \tag{32}$$

В частности, величина p_{D2} стремится к постоянному, отличному от нуля, пределу. Из рис.2 следует, что $J_D(0, B_2) > 0$ при $-0.447 < B_2 < 0$ и

$J_D(0, B_2) < 0$ при $B_2 < -0.447$. В результате, на больших расстояниях вакуумные силы являются силами притяжения в первом случае и силами отталкивания - во втором.

Рассмотрим теперь предел малых расстояний, $k_D \Delta y \ll 1$. Теперь, согласно (28), $z_2/z_1 - 1 \approx k_D \Delta y$ и следует различать два случая. При $k_D |b_j| \ll 1$ из (31) в ведущем порядке имеем

$$p_{Dj} \approx -\frac{J_D(B_1, B_2)}{2^D \pi^{D/2} \Gamma(D/2)(\Delta y)^{D+1}}, \quad B_j \approx \frac{b_j}{\Delta y a_j}, \quad \Delta y, \quad |b_j| \ll k_D^{-1}, \tag{33}$$

что совпадает с соответствующим результатом на фоне плоского пространства-времени [16]. При значениях же $k_D |b_j| \not\ll 1$ имеем $|B_j| \gg 1$ и из общей формулы (31) получаем

$$p_{Dj} \approx -\frac{D\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\zeta_R(D+1)}{(4\pi)^{(D+1)/2}(\Delta y)^{D+1}}, \quad k_D \Delta y \ll 1, \quad k_D |b_j| \not\ll 1. \tag{34}$$

Это выражение совпадает с результатом на фоне плоского пространства-времени для случая граничных условий Дирихле или Неймана. Соответствующие вакуумные силы являются силами притяжения. Если же $b_1 = 0$ (граничное условие Дирихле на бране $z = z_1$) и $k_D |b_2| \not\ll 1$, то $B_1 = 0$, $|B_2| \gg 1$ и в пределе малых расстояний соответствующие вакуумные силы определяются формулой

$$p_{Dj} \approx \left(1 - 2^{-D}\right)\frac{D\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\zeta_R(D+1)}{(4\pi)^{(D+1)/2}(\Delta y)^{D+1}} \tag{35}$$

и являются отталкивающими. В этом случае появляется возможность стабилизации расстояния между бранами с помощью вакуумных сил. В качестве иллюстрации на рис.3 приведены графики вакуумных сил,

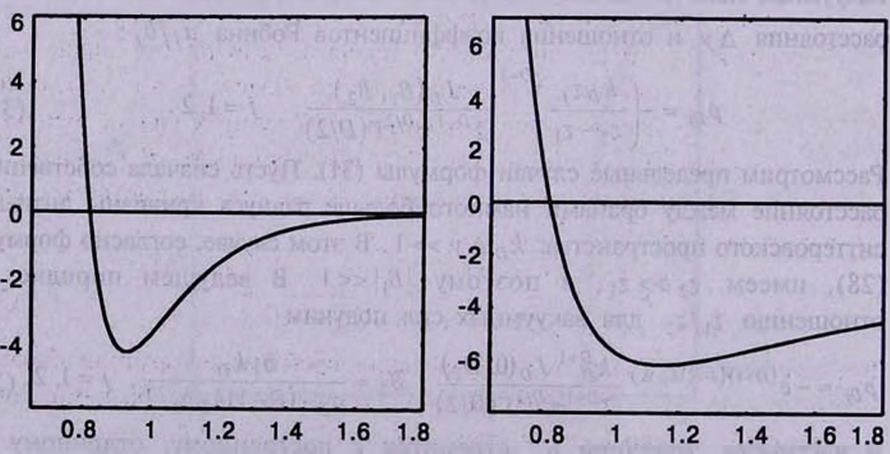

Рис.3. Вакуумные силы, действующие на единицу поверхности бран на AdS_5-фоне, $10^5 p_{D1}/k_D^{D+1}$ (левый график) и $10^3 p_{D2}/k_D^{D+1}$ (правый график) в зависимости от $k_D \Delta y$ при $D = 4$.

действующих на единицу поверхности бран как функции от $k_D y$ для значений параметров $b_1 = 0$, $a_2/k_D b_2 = -2.5$ и $D = 4$. Из этих графиков видно, что имеется точка равновесия при $\Delta y_0 \approx 0.82/k_D$, где вакуумные силы обращаются в нуль. Они являются силами отталкивания при $\Delta y < \Delta y_0$ ($p_{Dj} > 0$) и силами притяжения при $\Delta y > \Delta y_0$ ($p_{Dj} < 0$). В результате точка равновесия является устойчивой. Таким образом, мы имеем пример стабилизации расстояния между бранами с помощью вакуумных сил.

Рассмотрим теперь модель бран-миров Рандалл-Сундрума [2], основанную на AdS-геометрии с одним дополнительным измерением. Пятая размерность y компактифицирована на орбифолде S^1/Z_2 длины Δy с $-\Delta y \le y \le \Delta y$ с отождествленными точками $(x^\mu,\ y)$ и $(x^\mu,\ -y)$, где x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ обычные четырехмерные пространственно-временные координаты. В фиксированных точках орбифолда $y = 0$ и $y = \Delta y$ расположены две 3-браны с противоположными натяжениями. Для конформного фактора в этой модели имеем $\sigma = k_D |y|$. Интересным свойством модели Рандалл-Сундрума является возможность генерации масштаба энергии порядка ТэВ из планковского масштаба многомерной теории. Поле массы m_0 на бране $y = \Delta y$ будет иметь физическую массу $m = m_0\, e^{-k_D \Delta y}$. Для значений $k_D\, \Delta y \approx 37$ и $m_0 \approx 10^{19}$ ГэВ получаем $m \approx 1$ ТэВ. Граничные условия на бранах для соответствующего конформно-связанного скаляра имеют вид (6) с коэффициентами Робина $a_j/b_j = -c_j k_D$, где постоянные c_j являются коэффициентами в выражении для граничного массового члена [5]:

$$m_\varphi^{(b)2} = 2\, k_D [c_1\, \delta(y) + c_2\, \delta(y - \Delta y)]. \tag{36}$$

Заметим, что мы рассматриваем общий случай, когда граничные массы различны для отдельных бран. Дополнительное требование суперсимметрии налагает условие $c_2 = -c_1$. Вакуумные средние тензора энергии-импульса, индуцированные бранами на фоне геометрии Рандалла-Сундрума, определяются выражением (29) с дополнительным множителем 1/2. Этот множитель обусловлен тем, что теперь в условии нормировки для собственных функций интегрирование идет по области $(-\Delta y, \Delta y)$, вместо $(0, \Delta y)$. Выражения для полной энергии и вакуумных сил не меняются и определяются выражениями (30), (31). Коэффициенты B_j в выражении для $J_D(B_1,\ B_2)$ определяются формулами (ниже мы рассмотрим общий случай размерности D)

$$B_j = -\frac{e^{(j-1) k_D \Delta y}}{e^{k_D \Delta y} - 1} \frac{1}{c_j + (-1)^j (D-1)/2}. \tag{37}$$

В модели Рандалл-Сундрума для разрешения проблемы иерархии необходимо иметь $k_D\, \Delta y \approx 37$. Для этих значений расстояния между бранами имеем $|B_1| << |B_2|$ в предположении, что $c_1 \approx c_2$.

Выражение (30) представляет собой полную объемную энергию

Казимира, индуцированную бранами. Вообще говоря, полная энергия вакуума содержит также дополнительный вклад, обусловленный наличием локализованной на бранах поверхностной энергии. В пространстве-времени Минковского расщепление вакуумной энергии на поверхностную и объемную части для общих смешанных граничных условий представлено в работе [16]. Соответствующие результаты для конформно-связанного скаляра на AdS-фоне можно получить методом, аналогичным описанным выше. Для полной энергии вакуума на единицу поверхности браны $z=z_j$ получаем

$$E_j^{(b)tot}=-\left(\frac{k_D z_j}{z_2-z_1}\right)^D\frac{2^{-D-1}\pi^{-D/2}}{\Gamma(D/2+1)}\,\mathrm{p.v.}\int_0^\infty dt\,t^D\frac{d}{dt}\ln\left[1-\frac{(B_1t+1)(B_2t+1)}{(B_1-1)(B_2-1)}e^{-2t}\right]. \quad (38)$$

Энергия вакуума на единицу гиперповерхности на бране $z=z_j$ может содержать дополнительные члены в виде $k_D^D\sum_{l=1}^2\alpha_l(z_j/z_l)^D$ с постоянными коэффициентами α_1 и α_2. Они соответствуют вкладу одной браны при отсутствии другой. Добавление этих членов к вакуумной энергии соответствует перенормировкам натяжений обеих бран (более подробное обсуждение см. в работах [9,10]).

4. *Заключение*. В данной работе исследован эффект Казимира для конформно-связанного скалярного поля в области между двумя параллельными бранами на фоне конформно-плоских плоско-симметричных многообразий. Рассмотрен общий случай смешанных граничных условий на бранах. Вакуумные средние тензора энергии-импульса получены из соответствующих результатов для пространства-времени Минковского с использованием конформных свойств проблемы. Чисто гравитационная часть обусловлена конформной аномалией и равна нулю для четного числа пространственных измерений. В области между бранами индуцированный границами вакуумный тензор энергии-импульса определяется формулой (21), а соответствующие вакуумные силы, действующие на единицу поверхности браны, - формулой (25). Эти силы равны нулю в нулях функции $J_D(B_1, B_2)$, определяемой выражением (14). Для значений $B_{1,2}$ соответствующее подынтегральное выражение не имеет полюсов на действительной оси, и расположение этих нулей при $D=4$ изображено на рис.2. Далее рассмотрен частный случай анти-де-ситтеровского фона с индуцированным бранами вакуумным тензором энергии-импульса, задаваемым выражением (29). На конкретном примере демонстрирована возможность наличия устойчивых точек равновесия бран, в которых вакуумные силы исчезают и поле радиона стабилизировано. Обсуждается приложение полученных результатов к модели Рандалл-Сундрума. В этой модели коэффициенты в граничных условиях Робина на бранах связаны с граничными массовыми членами рассматриваемого скалярного поля.

Работа выполнена в рамках гранта 0887 Министерства образования и науки Республики Армения.

Ереванский государственный университет,
Армения, e-mail: saharyan@server.physdep.r.am

VACUUM EFFECTS IN CONFORMALLY-FLAT BRANE-COSMOLOGY AND RADION STABILIZATION

A.A.SAHARIAN

The quantum vacuum effects for a conformally-coupled scalar field are investigated on background of conformally-flat brane-world geometries. In the case of general mixed boundary conditions on the base of the corresponding flat space-time results formulae are derived for the vacuum expectation values of the energy-momentum tensor and vacuum forces acting on branes. An important special case of the AdS bulk is considered and applications to the Randall-Sundrum model are discussed. The possibility for the radion stabilization by vacuum forces is demonstrated.

Key words: *Cosmology:brane - world - Cosmology:Casimir effect*

ЛИТЕРАТУРА

1. *N.Arkani-Hamed*, *S.Dimopoulos*, *G.Dvali*, Phys. Lett., **B429**, 263, 1998; Phys. Rev., **D59**, 086004, 1999; *I.Antoniadis*, *N.Arkani-Hamed*, *S.Dimopoulos*, *G.Dvali*, Phys. Lett., **B436**, 257, 1998.
2. *L.Randall*, *R.Sundrum*, Phys. Rev. Lett., **83**, 3370, 1999.
3. *M.Gell-Mann*, *B.Zwiebach*, Phys. Lett., **B141**, 333, 1984; Nucl. Phys., **B260**, 569, 1985.
4. *W.D.Goldberger*, *M.B.Wise*, Phys. Rev. Lett., **83**, 4922, 1999; Phys. Rev., **D60**, 107505, 1999; *C.Csaki*, *J.Erlich*, *T.Hollowood*, *Y.Shirman*, Nucl. Phys., **B581**, 309, 2000; *K.Maeda*, *D.Wands*, Phys. Rev., **D62**, 124009, 2000; *C.Barcelo*, *M.Visser*, Phys. Rev., **D63**, 024004, 2001.
5. *T.Gherghetta*, *A.Pomarol*, Nucl. Phys., **B586**, 141, 2000.
6. *P.Kanti*, *K.A.Olive*, *M.Pospelov*, Phys. Lett., **B481**, 386, 2000.
7. *V.Barger*, *T.Han*, *T.Li*, *J.D.Lykken*, *D.Marfatia*, Phys. Lett., **B488**, 97, 2000.

8. *M.Fabinger*, *P.Horava*, Nucl. Phys., **B580**, 243, 2000.
9. *J.Garriga*, *O.Pujolas*, *T.Tanaka*, Nucl. Phys., **B605**, 192, 2001.
10. *S.Nojiri*, *S.Odintsov*, Phys. Lett., **B484**, 119, 2000; *S.Nojiri*, *O.Obregon*, *S.Odintsov*, Phys. Rev., **D62**, 104003, 2000; *S.Nojiri*, *S.Odintsov*, *S.Zerbini*, Phys. Rev., **D62**, 064006, 2000; *S.Nojiri*, *S.Odintsov*, *S.Zerbini*, Class. Quantum Grav., **17**, 4855, 2000; *D.J.Toms*, Phys. Lett., **B484**, 149, 2000; *W.Goldberger*, *I.Rothstein*, Phys. Lett., **B491**, 339, 2000; *S.Nojiri*, *S.D.Odintsov*, JHEP, 049, 2000; *I.Brevik*, *K.A.Milton*, *S.Nojiri*, *S.D.Odintsov*, Nucl. Phys., **B599**, 305, 2001; *A.Flachi*, *D.J.Toms*, Nucl. Phys., **B599**, 305, 2001.
11. *N.Kaloper*, *J.March-Russel*, *G.D.Starkman*, *M.Trodden*, Phys. Rev. Lett., **85**, 928, 2000.
12. *M.Trodden*, Diluting Gravity with Compact Hyperboloids, hep-th/0010032.
13. *G.D.Starkman*, *D.Stojkovic*, *M.Trodden*, Phys. Rev. Lett., **87**, 231303, 2001.
14. *G.D.Starkman*, *D.Stojkovic*, *M.Trodden*, Phys. Rev., **D63**, 103511, 2001.
15. *S.Nasri*, *P.J.Silva*, *G.D.Starkman*, *M.Trodden*, Radion Stabilization in Compact Hyperbolic Extra Dimensions, hep-th/0201063.
16. *A.Romeo*, *A.A.Saharian*, J. Phys. A: Math. Gen., **35**, 1297, 2002.
17. *A.A.Saharian*, Phys. Rev., **D63**, 125007, 2001.
18. *A.Romeo*, *A.A.Saharian*, Phys. Rev., **D63**, 105019, 2001.
19. *V.M.Mostepanenko*, *N.N.Trunov*, The Casimir Effect and its Applications, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997.
20. *G.Plunien*, *B.Muller*, *W.Greiner*, Phys. Rep., **134**, 87, 1986.
21. *K.A.Milton*, The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero--Point Energy, World Scientific, Singapore, 2002.
22. *M.Bordag*, *U.Mohidden*, *V.M.Mostepanenko*, Phys. Rep., **353**, 1, 2001.
23. *Н.Биррелл*, *П.Девис*, Квантованные поля в искривленном пространстве-времени, Мир, М., 1984.
24. *J.Maldacena*, Adv. Theor. Math. Phys., **2**, 231, 1988.
25. *O.Aharony*, *S.S.Gubser*, *J.Maldacena*, *H.Ooguri*, *Y.Oz*, Phys. Rep., **323**, 183, 2000.