

УДК: 524.354.6

ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В КОРЕ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ

Д.М.СЕДРАКЯН¹, А.Г.БАГДОЕВ²

Поступила 5 июня 2002

Исследовано распространение осесимметричных волновых пучков вблизи экваториальной плоскости коры нейтронной звезды, находящейся в поперечном магнитном поле. Эти волны возбуждаются пространственно - ограниченным возмущением в форме поперечного магнитного поля, приложенного к внутренней границе коры звезды. Учитывая малость отношений возмущенных магнитных полей к невозмущенным, получается условие применимости линейной теории к решению эволюционного уравнения. Показано, что это условие выполняется для плазмы коры нейтронной звезды при типичных значениях радиосветимости пульсаров. Полученное простое точное решение в форме линейных гауссовских пучков имеет место без дополнительных условий на диссипацию, дисперсию и узость пучков, если скорость этих волн c_s постоянна. Последнее требование хорошо выполняется для плазмы в коре нейтронной звезды. Показано, что ширина гауссовского пучка также слабо зависит от координат.

1. Введение. В работе [1] изучены линейные волны в плазме коры нейтронной звезды в предположении, что фронт волны - бесконечная площадь. Ряд работ [2-5] посвящены изучению волн с конечным фронтом в слое вязкой упругой среды или электропроводящей жидкости с учетом неоднородностей, конечной теплопроводности и химической активности этих сред. В работах [6,7] рассматривалось распространение поперечно ограниченных радиальных магнитогидродинамических волн вблизи экваториальной плоскости коры нейтронной звезды, находящейся в поперечном магнитном поле. В настоящей статье мы будем обобщать результаты работы [7] с учетом малости возбуждения по сравнению с заданным поперечным магнитным полем с целью получения простых решений для применения их в теории радиоизлучения пульсаров. Полученные решения в форме гауссовских пучков имеют место без дополнительных условий на диссипацию, дисперсию и узость пучков и верны для плазмы, неоднородной по плотности и однородной по скорости распространяющейся в ней волны.

2. Эволюционные уравнения и их линеаризация. Рассмотрим распространение квазимонохроматических волн модуляции в ионизированной плазме, занимающей слой $0 \leq x \leq l$ в перпендикулярном магнитном поле H_x , $H_z = 0$ и $H_y = H_0$, где ось x направлена по нормали к невозмущенной волне в противоположном к движению волны направлению, y - поперечная компонента в основной плоскости

движения, нормальная к экваториальной плоскости звезды. Уравнения движения релаксирующей плазмы приведены в работах [6,7]. Их решения в форме двух волн, распространяющихся в слое навстречу друг другу, можно, как показано в [2,6,7], искать в виде:

$$u = u_1(\tau_1, y, z, t) + u_2(\tau_2, y, z, t), \quad (1)$$

где в качестве u выберем v_x - нормальную к волне скорость частиц, которая с возмущенной компонентой магнитного поля h_y для каждой из двух волн связана соотношением [6,7]:

$$h_y = \mp \frac{H_y}{c_n} v_x, \quad (2)$$

где верхний знак соответствует волне 1, а нижний - волне 2. $\tau_{1,2}$ есть эйконы невозмущенных следующих слева и справа волн в неоднородной среде:

$$\tau_{1,2} = \tau'_{1,2} - t = \int_{\pm x} \frac{dx}{c_n} - t, \quad (3)$$

$c_n = c_n(x)$ - нормальная скорость линейной волны. Для дифракционных задач о стационарных пучках в квазимонохроматических волнах можно показать, что эволюционные уравнения для $u_{1,2}$ имеют вид [2-7]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \tau'_{1,2} \partial \tau_{1,2}} - \frac{1}{2} \hat{L} u_{1,2} - \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}} \frac{d \ln \Phi}{d \tau'_{1,2}} = \\ & = - \frac{1}{c_n} \frac{\partial}{\partial \tau_{1,2}} \left[\Gamma u_{1,2} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \tau'_{1,2}} + D \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^2} + E \frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^3} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\hat{L} = -c_n^2 \left\{ \left(1 + \frac{c_s^2 c_A^2}{c_n^4} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}, \quad c_A^2 = \frac{H_y^2}{4\pi\rho},$$

а c_s - скорость звука в плазме. Здесь Γ, D, E есть коэффициенты нелинейности, диссипации и дисперсии, которые для релаксирующей плазмы имеют вид [6,7]:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\gamma+1}{2} \frac{c_s^2}{c_n^2} + \frac{3}{2} \frac{c_A^2}{c_n^2}, \\ D &= -\frac{1}{2c_n} \left\{ \frac{1}{\rho} \left(\xi + \frac{4}{3} \eta \right) + \frac{c_A^2}{c_n^2} v_m + \frac{(\gamma-1)^2 kT}{\rho c_n} \right\}, \\ E &= -\frac{\tau_0}{c_n} \frac{(\gamma-1)^2 kT}{\rho c_n^2}, \quad v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что эти коэффициенты есть функции от x , а γ - показатель адиабаты. В (4) функция Φ - лучевое решение, связанное с неоднородностью плазмы по x , формулой:

$$\Phi^2 = \frac{\rho(0)c_n(0)}{\rho(\tau'_{12})c_n(\tau'_{12})}. \quad (6)$$

Можно упростить выражение для оператора $\hat{L}$, считая, что [1],

$$\frac{c_A^2 c_i^2}{c_n^4} \ll 1$$

в основной части коры нейтронной звезды. Тогда оператор $\hat{L}$ становится осесимметричным и принимает вид:

$$\hat{L} = -c_n^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (7)$$

где r - радиальная координата. Уравнения (4) для двух волн $u_{1,2}$ идентичны и имеют одинаковые по форме записи решения через эйконалы $\tau'_{1,2}$ и их можно решить отдельно. Обозначая $\tau_{1,2}$ через τ , $\tau'_{1,2}$ через τ' , и отсчитывая τ' от левого конца среды $\tau' = 0$, можно получить:

$$\tau' = \int_0^x \frac{dx}{c_n},$$

где для правого конца среды нужно положить $x = l$. Уравнение (4) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \tau'} + \frac{1}{2} c_n^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{d \ln \Phi}{d \tau'} = \\ = -\frac{1}{c_n} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau} + D \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + E \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Следует отметить, что в то время, как Φ есть функция от τ' , то c_n есть почти постоянная в коре нейтронной звезды [1] и поэтому $\tau' = x/c_n$. В случае квазимонохроматических волн можно решение (8) искать в виде:

$$u = \frac{1}{2} u_1(\tau', r) e^{i\theta - \nu' \tau' \omega^2} + \frac{1}{2} u_2(\tau', r) e^{2i\theta - 2\nu' \tau' \omega^2} + k. c., \quad (9)$$

где

$$\theta = \omega \tau - \omega' \tau', \quad \tau = t - x/c_n.$$

Подставляя (9) в (8) и приравнявая слагаемые при первой и второй гармониках, можно получить уравнения модуляций:

$$i\omega \frac{\partial u_1}{\partial \tau'} + \frac{1}{2} c_n^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) - i\omega u_1 \frac{d \ln \Phi}{d \tau'} = \frac{\Gamma}{2 c_n} \omega^2 u_1^* u_2, \quad (10)$$

$$\omega(4\nu' i - 12\omega') u_2 + 2i\omega \frac{\partial u_2}{\partial \tau'} + \frac{1}{2} c_n^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) - 2i\omega u_2 \frac{d \ln \Phi}{d \tau'} = \frac{\Gamma \omega^2}{c_n^2} u_1^2, \quad (11)$$

где звездочка обозначает комплексно-сопряженное значение, а

$$\omega' = -\frac{1}{c_n} E \omega^3, \quad \nu' = -\frac{1}{c_n} D. \quad (12)$$

Нахождение аналитических решений для системы уравнений (10), (11) в общем случае сталкивается с определенными трудностями. В статьях [6,7] аналитическое решение было получено в предположении, что дисперсия ω' велика. Благодаря этому, в уравнении (11) можно было пренебречь производными второй гармоники и получить эти решения. Однако такое предположение для плазмы коры нейтронной звезды не всегда выполняется. Как покажем ниже, параметр возмущения $b\Phi/c_n \sim h_y/H_y$, $u_1 \sim b\Phi$, весьма мал для интересующего нас диапазона частот, и тогда для нахождения аналитических решений можно пользоваться линейными уравнениями для возмущений без ограничений на Φ , D , E и узость пучков. Действительно, из уравнений (10) и (11) следует, что при условии

$$\frac{b\Phi l}{c_n^2} \omega \Gamma \ll 1, \quad (13)$$

можно пренебречь нелинейными правыми частями этих уравнений. Тогда при заданном на входе в среду ($\tau' = 0$) граничном условии в виде первой гармоники можно считать $u_2 = 0$ и достаточно решить уравнение (10), которое можно записать в следующем виде:

$$i\omega \frac{\partial U}{\partial \tau'} + \frac{1}{2} c_n^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0. \quad (14)$$

Решение линейного уравнения (14) U определяет искомую функцию u_1 из соотношения $u_1 = \Phi U$. Интересно отметить, что хотя кора нейтронной звезды сильно неоднородна, но так как c_n слабо зависит от координат, появляется возможность свести исходную задачу к решению уравнения (14) для однородной среды.

Прежде чем перейти к решению уравнения (14), покажем, что условие (13) выполняется для плазмы коры пульсаров.

3. *Оценки возмущения магнитного поля на поверхности звезды.* В работе [1] была предложена модель излучения пульсаров, согласно которой, если возбудить постоянное магнитное поле H_y пульсаров в коре нейтронной звезды, то в нем устанавливаются магнитогидродинамические волны, которые могут распространить возмущение магнитного поля на границе ядра и коры нейтронной звезды до поверхности звезды. Было показано также, что поглощение этих волн для диапазона радиочастот ($\omega \leq 10^{10}$ Гц) очень мало. Тогда, согласно работам [6,7], на поверхности звезды у экваториальной плоскости возбуждаются поверхностные токи (см. также формулу (24)), которые могут стать источником радиоизлучения пульсаров. Если предположить, что излучающая поверхность звезды (источник излучения) представляет из себя круговую поверхность радиусом r_0 и толщиной λ , равной длины волны излучения, то легко оценить интенсивность радиоизлучения пульсаров. Заметим, что объем порядка

λ^3 будет излучать когерентно, а число таких объемов в источнике излучения будет порядка $N \sim (r_0/\lambda)^2$. Следовательно, согласно формуле дипольного излучения, интенсивность радиоизлучения на длине волны λ будет порядка:

$$I \sim \frac{2}{3c^3} |j \lambda^3| (r_0/\lambda)^2 \quad (15)$$

Здесь было учтено, что вторая производная по времени дипольного момента когерентного объема λ^3 порядка $j \lambda^3$. Выражение для j можно найти из формулы (24). Окончательно для оценки порядка интенсивности излучения можно получить следующую формулу:

$$I \sim 8\pi c \left(\frac{cH_p}{c_n^2} \right)^2 |b \Phi(l/c_n)|^2 R_0^2. \quad (16)$$

Эта формула даст нам возможность оценить максимальное значение возмущения скорости плазмы $b \Phi(l/c_n)$, которое окажется на поверхности звезды. Действительно, требуя, чтобы I было порядка 10^{30} эрг/с, окончательно получим:

$$b \Phi(l/c_n) \approx 3 \cdot 10^{-8} c_n. \quad (17)$$

Как видно из этой формулы, возмущение скорости плазмы $b \Phi(l/c_n)$ на много порядков меньше скорости магнитогидродинамической волны c_n . Как показано выше, для применения линейного решения необходимо выполнение условия (13). Если учесть (17), то, согласно (13), можно определить диапазон частот, для которых условие (13) хорошо выполняется. Простая оценка дает:

$$\omega \ll \frac{c_n}{l} \frac{c_n}{b \Phi(l/c_n)} \sim 10^{13} \text{ Гц}. \quad (18)$$

Как видно из оценки (18), для диапазона частот $\omega \leq 10^{10}$ Гц, в котором в основном излучают пульсары, условие (13) хорошо выполняется. Следовательно, линейное уравнение (14) хорошо описывает распространение волн в коре нейтронной звезды. Отметим также, что если условие (18) выполняется на $x=l$, то оно выполняется при любых x , так как минимальное значение $\Phi(l/c_n)$ равняется единице.

4. *Решение эволюционного уравнения.* Решение уравнения (14) можно искать в виде гауссовских пучков:

$$U = A e^{i\varphi}, \quad \varphi = \sigma(\tau') + \frac{r^2}{2R(\tau')}, \quad A = \frac{b}{f(\tau')} e^{-\frac{r^2}{2R_0^2 f^2(\tau')}}, \quad (19)$$

где b есть значение A на оси $r=0$ при $\tau'=0$, т.е. r_0 есть начальный радиус пучка, и для безразмерной ширины пучка принято $f(0)=1$.

$\frac{\omega}{c_n} R(\tau')$ есть радиус кривизны волнового фронта. После подстановки (19) в (14) и приравнивания членов с r^0 и r^2 , а также действительных

и мнимых частей, можно получить точные уравнения для определения функций σ, f, R :

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\sigma}{d\tau'} &= -\frac{c_n^2}{2r_0^2} \frac{1}{f^2}, \quad \frac{\omega}{f} \frac{df}{d\tau'} = \frac{c_n^2}{R}, \\ \frac{d^2 f}{d\tau'^2} &= \frac{\xi}{f^3}, \quad \xi = \frac{c_n^4}{\omega^2 r_0^4}. \end{aligned} \quad (20)$$

Граничные условия для системы уравнений (20) будут:

$$\sigma(0) = \sigma_0, \quad f(0) = 1, \quad R = R_0, \quad \frac{df(0)}{d\tau'} = F, \quad F = \frac{c_n^2}{\omega R_0}, \quad (21)$$

где $\frac{\omega}{c_n} R_0$ есть радиус кривизны фронта волны при $\tau' = 0$ (т.е. формы поверхности между ядром и корой нейтронной звезды). Решение уравнений (20), с учетом, что $c_n = \text{const}$, с граничными условиями (21) имеет вид:

$$f^2(\tau') = \frac{\xi}{\xi + F^2} + (\xi + F^2) \left(\tau' + \frac{F}{\xi + F^2} \right)^2. \quad (22)$$

Для расчета значений $f^2(l/c_n)$, т.е. на поверхности звезды, можно использовать формулу

$$f^2\left(\frac{l}{c_n}\right) = \left(1 + \frac{l}{R}\right)^2 + \left(\frac{lc_n}{\omega r_0^2}\right)^2, \quad (23)$$

которую легко получить из (22). Для оценки $f(l/c_n)$ мы можем использовать данные простых моделей нейтронных звезд, для которых $l/R \sim 0.1$ и $r_0 \sim 10^4$ см. Тогда для диапазона частот радиоволн пульсаров $\omega > 10^7$ Гц последнее слагаемое формулы (23) всегда меньше единицы, что означает $f(\tau') \approx 1$.

Для случая двух пучков, имеющего место в коре нейтронной звезды, решение получается из решения для одного пучка суперпозицией прямой и обратной волн с учетом граничного условия при $x = l$: $h_y = 0$ [6,7]. Тогда для модулей скорости плазмы и плотности тока на поверхности звезды, т.е. для $\tau' = l/c_n$, получим следующие окончательные выражения:

$$\begin{aligned} |u_1| &= \frac{2b\Phi(l/c_n)}{f(l/c_n)} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2r_0^2 f^2(l/c_n)} - \gamma' \frac{l}{c_n} \omega^2 \right\}, \\ |J_z| &= \frac{c}{4\pi} \frac{\omega H_y}{c_n^2} |u_1|. \end{aligned} \quad (24)$$

Как видно из (24), полученные выражения для $|u_1|$ и $|J_z|$ зависят от значения амплитуды b возбуждения скорости плазмы, следовательно и магнитного поля на внутренней границе коры нейтронной звезды. Оценку величины b мы провели в разделе 3, предполагая, что источником радиоизлучения пульсара являются поверхностные токи, возбуждаемые магнитогидродинамическими волнами, в ограниченном радиусом r_0 участке

поверхности звезды. Для оценки мы также предположили, что полное радиоизлучение этого участка порядка 10^{30} эрг/с, что характерно для пульсаров.

5. Заключение. В этой статье мы обобщили результаты работ [6,7] и показали, что для условий в коре нейтронной звезды и наблюдаемой радиосветимости пульсаров достаточно ограничиться линейными решениями магнитогидродинамических уравнений. Если поглощение радиоволны в замагниченной коре нейтронной звезды мало, то эти волны возбуждают объемные токи у поверхности звезды, что может стать источником радиоизлучения пульсаров. Так как этот источник имеет ограниченные размеры, то мы решили задачу для волновых пучков. Как сказано выше, в случае линейных волн поперечные размеры пучка фактически не меняются. Для построения простой модели для механизма радиоизлучения пульсаров нам придется показать, что возбуждение магнитного поля на внутренней границе коры нейтронной звезды аксиально-несимметрично и источник излучения занимает на поверхности звезды ограниченную площадь радиусом порядка нескольких сот метров. В работах [8,9] имеются предпосылки для удовлетворения этих требований, однако для окончательного их доказательства потребуется дальнейшее детальное рассмотрение структуры магнитного поля у экваториальной плоскости нейтронной звезды и вопроса об энерговыделении при уменьшении плотности нейтронных вихрей из-за замедления вращения пульсара.

Один из авторов (Д.С.) благодарит грант МНТЦ А-353 за финансовую поддержку при выполнении этой работы.

¹ Ереванский государственный университет,
Армения, e-mail: dsedrak@physdep.r.am

² Институт механики НАН Армении

LINEAR WAVE BEAMS IN THE CRUST OF A NEUTRON STAR

D.M.SEDRAKIAN¹, A.G.BAGDOEV²

Propagation of axisymmetric magnetohydrodynamic waves near the equatorial plane of the crust of a neutron star is considered. The magnetic field is perpendicular to the equatorial plane. It is shown, that for the conditions of plasma in the crust of neutron star and for typical pulsar radioluminosity

the magnetohydrodynamic wave beams in the crust are linear waves. The radii of the wave beam remains unchanged, when wave penetrates to the surface of the star. The electric currents generated by wave beams on the surface of the star are determined.

Key words: *stars:neutron - stars:magnetic field*

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.М.Седракян, *Астрофизика*, **31**, 101, 1989.
2. А.Г.Багдоев, А.В.Шекоян, *Изв. АН Арм. ССР, Механика*, **40**, 14, 1987.
3. А.Г.Багдоев, Л.Г.Петросян, *Изв. АН Арм. ССР, Механика*, **36**, 3, 1983.
4. А.Г.Багдоев, А.А.Гургенян, *Изв. АН Арм. ССР, Механика*, **39**, 16, 1986.
5. М.М.Минасян, *Докл. АН Арм. ССР*, **55**, 183, 1972.
6. А.Г.Багдоев, Д.М.Седракян, *Астрофизика*, **44**, 139, 2001.
7. А.Г.Багдоев, Д.М.Седракян, *Астрофизика*, **45**, 65, 2002.
8. Д.М.Седракян, А.Д.Седракян, *Ж. эксперим. и теор. физ.*, **100**, в.2(8), 353, 1991.
9. Д.М.Седракян, *Астрофизика*, **43**, 377, 2000.