

УДК: 524.77

УСТОЙЧИВОСТЬ ДЖИНСА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СРЕДЫ, СПОСОБНОЙ СОПРОТИВЛЯТЬСЯ КАСАТЕЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

В.А.АНТОНОВ, А.С.БАРАНОВ, Е.И.ТИМОШКОВА

Поступила 11 января 2002

Принята к печати 10 августа 2002

В модель однородной вращающейся гравитирующей среды введена сопротивляемость касательным напряжениям. Показано, что это снимает гироскопическую стабилизацию как в присутствии вязкости, так и без нее. Рассмотрена также модель соприкасающихся газовой и жесткой сред. Соприкосновение с жесткой опорой также отчасти снимает гироскопическую стабилизацию. Этот факт может вести к некоторому компромиссу между теорией волн плотности и самораспространяющегося возбуждения для объяснения спиральной структуры галактик.

1. *Касательные напряжения в однородной среде.* В задачах астрофизики и небесной механики многократно встречается, так называемая, гироскопическая стабилизация. Примерами могут служить различные вихри в газовых подсистемах галактик, течения в недрах планет и т.д. Одним из известных важных свойств гироскопической стабилизации, которое обязательно надо учитывать, является возможность ее снятия диссипативными силами. При наличии диссипативных сил нарушение стабилизации происходит почти всегда, за вычетом лишь редких, явно вырожденных случаев. Результат проявляется в виде, так называемой, вековой неустойчивости [1-5]. Точнее говоря, термин "вековая неустойчивость" рожден астрономическими приложениями, само же явление снятия гироскопической стабилизации имеет общее для всей механики значение, только, например, инженеры, конструирующие разные вращающиеся детали, употребляют в формально аналогичных ситуациях другое словосочетание "парадокс Циглера" [6,7].

Общим, однако, остается то, что устойчивость, появившаяся за счет гироскопических сил, разрушается сколь угодно малыми силами необратимой, диссипативной природы [8]. В данной статье мы хотим показать, напротив, что взаимодействия, казалось бы, совсем иные и сохраняющие обратимость, тем не менее, могут вести к совершенно аналогичному снятию гироскопической стабилизации. Речь идет о поправках, связанных с нарушением локальной пространственной симметрии сил, что можно назвать анизотропией напряженного состояния (в обобщенном смысле). В сущности, давление в условиях межзвездной среды так или иначе анизотропно почти всегда, предположение об изотропии принимается только

для упрощения, не всегда оправданного в конкретных астрофизических задачах. Между тем, иногда малая анизотропия может качественно изменить картину, как это и происходит с вязкостью [8].

В качестве отправного пункта мы берем модель бесконечной однородной среды Джинса [9,10], применяемую к реальным космологическим проблемам [11], несмотря на её известные недостатки, потому что она достаточно проста, но содержит уже все нужные нам основные признаки. В дальнейшем мы все время рассматриваем возмущения, развивающиеся в x - и y -направлениях, без перемещений частиц в третьем направлении. Через ρ , c , Ω и G обозначаем соответственно плотность газа, скорость звука, угловую скорость общего твердотельного вращения и гравитационную постоянную. Все время используем линейное приближение с частотой колебаний ω и волновым числом k , для определенности у нас $k > 0$. Для среды с обычным изотропным давлением получается дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - k^2 c^2 + 4\pi G \rho - 4\Omega^2 = 0 \quad (1)$$

и соответственно критерий неустойчивости

$$4\pi G \rho > k^2 c^2 + 4\Omega^2, \quad (2)$$

так что при $\Omega^2 > \pi G \rho$ среда устойчива на любых длинах волн, что и представляет собой гироскопическую стабилизацию в наиболее четкой форме. При $\Omega^2 < \pi G \rho$ устойчивы только достаточно короткие волны, но критическая длина за счет эффекта вращения все же возрастает.

Наше изменение предпосылок состоит в том, что каждая газовая частица, попавшая в условия неизотропной деформации, испытывает и анизотропные напряжения. Конкретным физическим основанием может служить присутствие магнитного поля, не регулярного, но пронизывающего среду хаотически в разных направлениях, если длина нерегулярности поля много меньше длины волны $2\pi/k$. Исходную картину поля мы представляем себе статистически изотропной, но это не отменяет того факта, что анизотропия сказывается при развитии возмущения. Действительно, например, при чистом сжатии в одном направлении параллельные ему пучки магнитного поля ведут себя нейтрально (с точностью до некоторых тонких эффектов перестройки не совсем однородных полей), а поперечные пучки создают анизотропию давления. Иными словами, включение скалярной поправки от хаотических магнитных полей в величину c^2 , часто практикуемое в космогонии тел всевозможных масштабов от планет до скоплений галактик, есть по существу натяжка.

Сходную анизотропию вносит турбулентность и вообще присутствие по-разному ориентированных локальных вихрей и струй. Подобные локальные течения обладают инерцией, позволяющей им в какой-то степени сопротивляться деформации сдвига - в этом и состоит формальная аналогия

с магнитным полем. Правда, различные релаксационные процессы с течением времени ведут к термодинамическому равновесию, так что анизотропная модель пригодна только на каком-то ограниченном интервале времени. Но за период срабатывания медленных релаксационных процессов может успеть развиться неустойчивость, как мы обсуждаем дальше.

Итак, общим свойством разных моделей является упругая реакция среды на относительные сдвиги. Наиболее общей формой линеаризованных уравнений при всех сделанных предположениях является [12]

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \beta \Delta \xi + 2\Omega \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \beta \Delta \eta - 2\Omega \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y}.\end{aligned}\quad (3)$$

При этом ради удобства записи мы отказываемся от обычного эйлера описания состояния среды и используем вектор малых лагранжевых смещений (ξ, η) . Они связаны с возмущением плотности $\delta \rho$ соотношением неразрывности

$$\delta \rho = -\rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right).\quad (4)$$

Величина $\delta \rho$ связана с возмущением потенциала $\delta \varphi$ уравнением Лапласа

$$\Delta \delta \varphi \equiv \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial y^2} = 4\pi G \delta \rho.\quad (5)$$

Применительно к свойствам нашей задачи мы сочли нужным ввести параметры α и β , несколько отличающиеся от обычных параметров Ламе [12,13], но связанные с ними определенными соотношениями. Коэффициент α учитывает обычную объемную плотность, а члены с β дают вклад в равновесие среды от касательных напряжений. Физически необходимое условие положительной определенности энергии упругой деформации накладывает на α и β ограничения $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Поскольку возмущения разворачиваются на изотропном фоне, можно без ограничения общности считать величину $\delta \rho$ в комплексной форме пропорциональной $\exp(i k x - i \omega t)$. Несложные вычисления с учетом (3), (4) и (5), превращающихся в данном случае в алгебраические уравнения, дают дисперсионное уравнение

$$[\omega^2 - (\alpha + \beta)k^2 + 4\pi G \rho](\omega^2 - k^2 \beta) - 4\Omega^2 \omega^2 = 0.\quad (6)$$

Если обозначить левую часть дисперсионного уравнения (6) через $f(\omega^2)$, то $f(\infty) = +\infty$, $f(k^2 \beta) = -4\Omega^2 k^2 \beta < 0$, так что оба корня $\omega^2 = \omega_1^2$ и ω_2^2 всегда вещественны и различны. Для определенности пусть $\omega_1^2 < \omega_2^2$. Обычная проверка корней по коэффициентам квадратного уравнения

показывает, что $\omega_1^2 > 0$ всегда, а условием мнимости ω_1 и, стало быть, неустойчивости является

$$4\pi G\rho > (\alpha + \beta)k^2. \quad (7)$$

При $\beta \rightarrow 0$ мы возвращаемся к случаю обычного газа, тогда α совпадает с c^2 . Однако критерий (7) переходит непрерывным образом не в (2), а в условие

$$4\pi G\rho > (kc)^2 \quad (8)$$

с выпавшим вращением. Итак, даже малая сопротивляемость вещества касательным напряжениям гироскопическую стабилизацию снимает. Чтобы несколько подробнее изучить это явление, разложим корни для ω по степеням малого β .

а) Система при данном k неустойчива по Джинсу, выполнено неравенство (2). Включение в расчет параметра β дает только небольшое мало интересное снижение инкремента.

б) Гироскопическая стабилизация: выполнено (2), но не выполнено (8). Значение ω_2 испытывает лишь малую вещественную поправку, но ω_1 становится мнимым:

$$\omega_1 = \frac{ik\sqrt{4\pi G\rho - (kc)^2}}{\omega_0} \beta^{1/2} + O(\beta), \quad (9)$$

где ω_0 - корень уравнения (1). Это дает аperiодическую неустойчивость.

в) Система устойчива по Джинсу уже без вращения, условие (8) не выполнено. Аналогично предыдущему

$$\omega_1 = \pm \frac{k\sqrt{(kc)^2 - 4\pi G\rho}}{\omega_0} \beta^{1/2} + O(\beta), \quad (10)$$

что соответствует некоторой медленной эволюции (не считая быстрых волн с $\omega \approx \omega_2$).

Подчеркнем, что частота ω_1 в (9) и (10) рождается не из $\omega = \omega_0$, а из другого корня $\omega = 0$, который при выводе (1) отбрасывается как тривиальный, соответствующий вихревой моде. В обычном однородном газе малая завихренность, действительно, тривиальна в том плане, что она не влияет на другие моды и сама сохраняется неизменной (по отношению к неподвижной системе координат). При включении сдвиговой упругости автономности вихревых возмущений больше нет. Они вовлекаются в общую игру, и поэтому степень многочлена в (6) выше, чем в (1). Включение же обычного трения снимает гироскопическую стабилизацию иначе, путем раскачки колебательной моды с $\omega = \omega_0$, тогда как вихревые моды сохраняют автономии, хотя постепенно гасятся трением. То есть один и тот же качественный эффект снятия гироскопической стабилизации трением, с одной стороны, и сдвиговой упругостью, с другой, проявляет

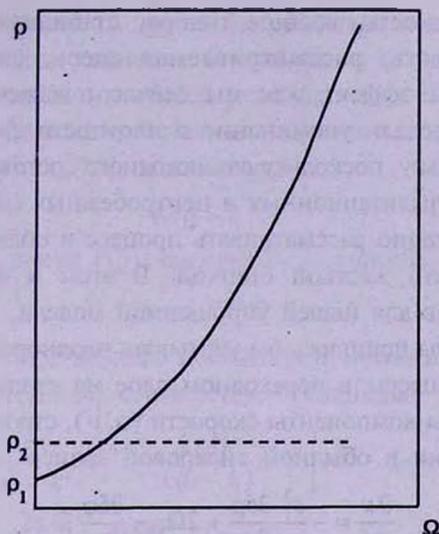


Рис.1. Границы устойчивости по Джинсу (сплошная линия) и с учетом касательных напряжений (пунктир), $\rho_1 = \frac{(kc)^2}{4\pi G}$, $\rho_2 = \frac{k^2(c^2 + \beta)}{4\pi G}$.

себя через разные физические механизмы. На рис.1 показаны границы устойчивости вращающейся однородной среды при наличии сдвиговой упругости (причем α отождествляется с c^2) и без нее.

2. *Контакт с твердой средой.* Не обязательно, чтобы оба свойства - сжимаемость и способность противостоять касательным напряжениям - принадлежали одной среде. Если они пространственно разделены, эффект снятия гироскопической стабилизации, как мы покажем ниже, все равно проявляется, хотя и в несколько меньшей степени.

Простейшую модель получаем, заполнив области $y > 0$ и $y < 0$ разными средами. В первом случае пусть это будет обычный сжимаемый газ ($\beta = 0$), а во втором - твердая среда с той же плотностью ρ . Таким образом, мы рассматриваем крайний случай просто потому, что он легче поддается анализу. Такой крайний случай встает, по нашему мнению, потому, что он со сравнительно простыми выкладками показывает само наличие эффекта неустойчивости. В более реалистической ситуации, когда вторая среда представляет собой горячий турбулентный газ только с относительной неподатливостью, "твердостью", качественно результаты остаются аналогичными. Рассчитать их труднее, но для применения к реальным галактикам это при необходимости можно сделать. Полная твердость означает формально $\alpha = \beta = \infty$. Такая твердая среда, конечно, не эквивалентна несжимаемой жидкости ($\alpha = \infty, \beta = 0$), которая поддается локальному нажиму на нее. Замена газа в части пространства на

несжимаемую жидкость, вообще говоря, стабилизирует систему [14]. Напротив, твердость, рассматриваемая здесь, способна оказывать дестабилизирующий эффект, как мы сейчас покажем.

В данной же модели упоминание о плотности среды при $y < 0$ было нужно лишь постольку, поскольку для исходного состояния подразумевается уравнивание гравитационных и центробежных сил. При нахождении возмущений достаточно рассматривать процесс в области $y > 0$, а границу $y = 0$ считать просто жесткой стенкой. В этом и состоит формальное облегчение расчетов для нашей упрощенной модели, тогда как для более "размытого" перехода пришлось бы учитывать неоднородность, но в пределе длинных волн процессы в переходном слое не столь существенны.

Вводя декартовы компоненты скорости (u, v), строим линеаризованные уравнения эволюции в обычной эйлеровой записи

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} + 2\Omega v - \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \delta \rho}{\partial y} - 2\Omega u - \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} &= -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).\end{aligned}\quad (11)$$

с вышеупомянутым граничным условием $v = 0$ при $y = 0$. Отделяем время посредством замены $\partial/\partial t = -i\omega$ и решаем два первых уравнения (11) относительно u и v :

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{\omega^2 - 4\Omega^2} \left(2\Omega \frac{\partial}{\partial y} - i\omega \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{c^2}{\rho} \delta \rho + \delta \varphi \right), \\ v &= \frac{1}{\omega^2 - 4\Omega^2} \left(i\omega \frac{\partial}{\partial y} + 2\Omega \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{c^2}{\rho} \delta \rho + \delta \varphi \right).\end{aligned}\quad (12)$$

После подстановки (12) в уравнение неразрывности и учета уравнения Пуассона (5) получаем:

$$\delta \rho = \frac{4\pi G \rho \delta \rho + c^2 \Delta \delta \rho}{\omega^2 - 4\Omega^2}.\quad (13)$$

По координате x условия остаются однородными и мы можем заменить оператор $\partial/\partial x$ умножением на ik . (Таким образом, k имеет сейчас несколько иной смысл, чем в предыдущем разделе). Тогда формула (13) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \delta \rho}{dy^2} + \mu^2 \delta \rho = 0,\quad (14)$$

где

$$\mu = \frac{\sqrt{(kc)^2 + 4\Omega^2 - 4\pi G \rho - \omega^2}}{c} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}{c}.\quad (15)$$

В принципе, значение μ могло бы оказаться и чисто мнимым. Это означало бы, что волна удаляется от границы $y=0$ сколь угодно далеко без затухания. Но тогда мы имеем дело просто с обычным объемным процессом в среде. Во всех же остальных случаях в роли μ мы используем то из двух значений в (15), для которого

$$\operatorname{Re} \mu > 0, \quad (16)$$

и берем нужное решение (15), физически связанное с границей, в виде

$$\delta \rho = e^{-\mu y + ikx} \quad (17)$$

с точностью до несущественного постоянного множителя. Плотности (17) по общим правилам [15,16] соответствует потенциал

$$\begin{aligned} \delta \varphi &= \left[\frac{4\pi G}{\mu^2 - k^2} e^{-\mu y} - \frac{2\pi G}{k(\mu - k)} e^{-ky} \right] e^{ikx} \quad (y \geq 0), \\ \delta \varphi &= -\frac{2\pi G}{k(\mu + k)} e^{ky + ikx} \quad (y \leq 0). \end{aligned} \quad (18)$$

Остается подставить значения (17) и (18) во второе выражение (12) и приравнять его нулю на границе $y=0$, чтобы получить дисперсионное уравнение

$$\frac{c^2}{\rho} (2k\Omega - \omega\mu) - \frac{2\pi G(2\Omega + \omega)}{\mu + k} = 0.$$

По непрерывности это верно и в случае $\mu = k$, кажушемся сперва особым. Удобно еще несколько преобразовать данное уравнение, избавившись от знаменателя и раскрыв μ^2 согласно (15). После сокращения на множитель $\omega - 2\Omega$, способного в худшем случае привести к потере устойчивой моды с $\omega = 2\Omega$ и поэтому в данном случае несущественного, дисперсионное уравнение приводится к окончательному виду

$$\omega(\omega + 2\Omega) + 2\pi G\rho - kc^2(k + \mu) = 0. \quad (19)$$

Непосредственный анализ уравнения (19), путем исключения иррациональности (15), довольно затруднителен. Целесообразнее исследовать конформное отображение $\omega \rightarrow f(\omega)$, где $f(\omega)$ - левая часть (19), для полуплоскости $\operatorname{Im} \omega > 0$, тогда точки ω , отвечающие неустойчивости, должны при отображении попасть в начало координат. Имеет смысл ограничиваться вещественными значениями параметра ω_0 , при которых среда сама по себе устойчива по Джинсу. Множество значений $f(\omega)$ при $\operatorname{Im} \omega > 0$ определяется формой своей границы, то есть поведением $f(\omega)$ при вещественном ω или, когда надо избежать недоразумения, при вещественном ω плюс малая добавка $i\epsilon$ ($\epsilon > 0$). В частности, пока $-\omega_0 < \omega < \omega_0$, значения μ и $f(\omega)$ остаются вещественными, причем с учетом зависимости μ от ω все время $f'(\omega) > 0$, а на концах интервала $(-\omega_0, \omega_0)$ имеем $f'(\omega) = \mp\infty$. Поэтому внутри интервала $(-\omega_0, \omega_0)$ существует один и только

один минимум $f(\omega)$ при некотором $\omega = \tilde{\omega}$.

За пределами интервала $(-\omega_0, \omega_0)$, согласно (15),

$$\text{Im} \mu^2 = 2\text{Re} \mu \cdot \text{Im} \mu = -\frac{2\omega \epsilon}{c}$$

и так как $\text{Re} \mu > 0$, то $\text{Im} \mu < 0$ при $\omega > \omega_0$ и $\text{Im} \mu > 0$ при $\omega < -\omega_0$. Это значит, что значения $f(\omega)$ за счет члена с μ отходят от вещественной оси вверх ($\omega > \omega_0$) и вниз ($\omega < -\omega_0$). Что касается вещественной части $f(\omega)$, то она, как легко видеть, стремится к $+\infty$ на обоих концах вещественной оси ω . Наконец, замкнув верхнюю полуплоскость ω сверху полуокружностью бесконечно большого радиуса, имеем для нее на плоскости $f(\omega)$ асимптотический образ в виде уже целой окружности (проходящей в том же направлении). Итак, получаем схематическое изображение множества значений $f(\omega)$ при $\text{Im} \omega > 0$ (см. рис.2).

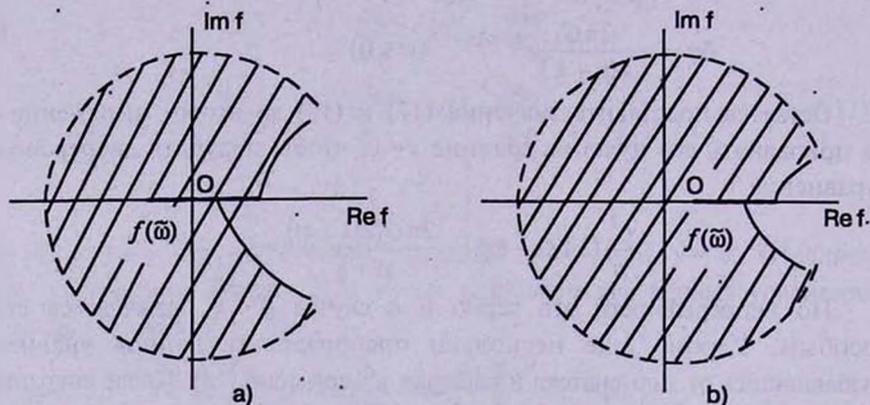


Рис.2. Множество значений $f(\omega)$, получаемое конформным отображением из верхней полуплоскости ω : а) Устойчивый случай; б) Неустойчивый случай.

Теперь геометрически очевидно, что вопрос, можно ли удовлетворить уравнению $f(\omega) = 0$ значением ω с $\text{Im} \omega > 0$, решается тем, доходит ли разрез, оканчивающийся точкой $f(\tilde{\omega})$, до начала координат. Более того, при $\rho = 0$ левая часть (19) принимает отрицательное значение хотя бы при $\omega = 0$, это соответствует случаю а). С ростом ρ вершина разреза на рис.2 отодвигается направо, в чем легко убедиться, проверив частную производную $\partial f / \partial \rho$. Коснуться начала координат эта вершина может только раз, после чего для больших ρ осуществится уже случай б). Но соответствующее критическое $\rho = \rho^*$ удастся выписать в явном виде:

$$\rho^* = \frac{(2\Omega + kc)^2}{8\pi G} \left(\Omega > \frac{kc}{2} \right). \quad (20)$$

Соответствующая частота критических колебаний

$$\tilde{\omega} = \frac{kc}{2} - \Omega. \quad (21)$$

Действительно, непосредственная подстановка (20) и (21) в (19) дает $f(\bar{\omega}) = 0$, $f'(\bar{\omega}) = 0$, как и должно быть. В противном случае $\Omega < kc/2$ величина

$$f(0) = 2\pi G\rho - k^2c^2 - kc\sqrt{(kc)^2 + 4\Omega^2} - 4\pi G\rho$$

даже при граничной плотности Джинса, когда (2) обращается в равенство, принимает отрицательное значение $2(\Omega^2 - k^2c^2/4)$, то есть все время действует случай а).

Итак, при $\Omega > kc/2$ критерием рассматриваемой граничной неустойчивости является

$$8\pi G\rho > (2\Omega + kc)^2, \tag{22}$$

а при $\Omega < kc/2$ специальной граничной неустойчивости нет, так как она сливается с объемной неустойчивостью. Результирующая граница неустойчивости показана на рис.3.

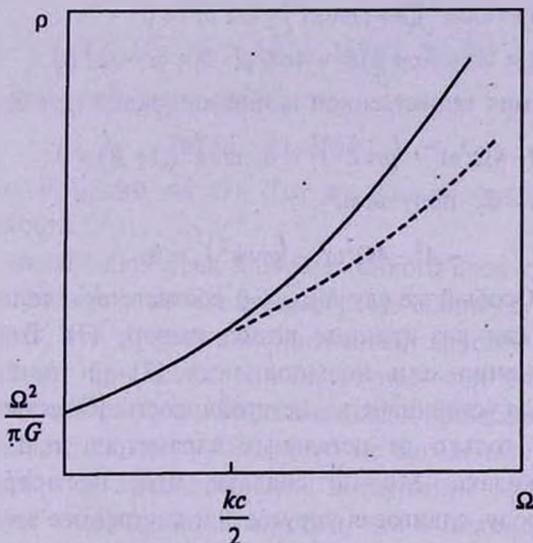


Рис.3. Границы объемной неустойчивости Джинса (сплошная линия) и граничной неустойчивости (пунктир).

3. *Влияние вязкости.* Упругое сопротивление касательным напряжениям вполне может сочетаться с обычной вязкостью. (Подчеркнем еще раз, что физически это разные вещи). В таком случае в правые части (3) добавляются члены

$$v\Delta \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v\Delta \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

где v - коэффициент вязкости. Соответственно во всех предыдущих расчетах происходит замена

$$\beta \rightarrow \beta - i\omega v, \tag{23}$$

в том числе в уравнении (6). Оно, очевидно, остается уравнением четвертой степени, именно

$$[\omega^2 - (\alpha + \beta)k^2 + 4\pi G\rho + i\omega\nu k^2](\omega^2 - k^2\beta + i\omega\nu k^2) - 4\Omega^2\omega^2 = 0. \quad (24)$$

В частности, рассмотрим случай очень большой вязкости, $\nu \rightarrow \infty$. Обычные методы дают асимптотику корней

$$\omega^{(1),(2)} = -ik^2\nu + \dots, \omega^{(3)} = -\frac{ik^2\beta}{\nu}, \omega^{(4)} = \frac{i[4\pi G\rho - (\alpha + \beta)^2]}{\nu}.$$

Определяющую роль играет последний корень: приведенная асимптотика показывает неустойчивость при соблюдении (7) и устойчивость в противном случае. Докажем, что это справедливо и для всех промежуточных значений $\nu = 0$. Действительно, переход от устойчивости к неустойчивости при непрерывном изменении ν означал бы появление на момент чисто вещественного ν . Но уравнение (24) можно сокращенно представить в виде

$$\begin{aligned} (A + i\omega\nu k^2)(B + i\omega\nu k^2) - 4\Omega^2\omega^2 &= 0 \\ (A = \omega^2 - (\alpha + \beta)k^2 + 4\pi G\rho, B = \omega^2 - k^2\beta) \end{aligned}$$

или после деления вещественной и мнимой частей при вещественном ω

$$AB - 4\Omega^2\omega^2 - (\omega\nu k^2)^2 = 0, \omega\nu k^2(A + B) = 0.$$

Кроме случая $\omega = 0$, получаем:

$$-A^2 - 4\Omega^2\omega^2 - (\omega\nu k^2)^2 = 0,$$

что невозможно. Особый же случай $\omega = 0$ соответствует только $(\alpha + \beta)k^2 = 4\pi G\rho$, то есть как раз границе выполнимости (7). В каждой же из областей выполнения или невыполнения (7) ни при каком ω не происходит переход устойчивость - неустойчивость. Качественно поведение системы зависит только от остальных параметров $\alpha, \beta, \rho, k, \Omega$, что и требовалось доказать. Можно сказать, что, несмотря на разную физическую природу, сдвиговая упругость и внутреннее трение действуют согласованно и единый критерий сохраняет силу при совместном наличии обоих эффектов, как и поодиночке.

4. *Другие случаи и приложения.* Вернемся к модели двух соприкасающихся сред с разными свойствами. Если сред у $y < 0$ продолжать считать несжимаемой, но ввести некоторую податливость касательным напряжениям ($\alpha = \infty$, β конечно), то дисперсионное уравнение остается алгебраическим, но сильно усложняется. По-видимому, для более податливой среды область дополнительной неустойчивости на рис.3 должна сужаться с уменьшением β , так как в пределе $\beta = 0$ дестабилизация, как мы уже упоминали, отсутствует. Кроме того, в приложениях к галактикам естественно границу двух сред изображать окружностью. Это уже требует аппарата бесселевых функций, хотя какое-то приближенное представление

об ожидаемом результате можно получить, ограничив снизу все допустимые значения k величиной $1/R$, где R - радиус граничной окружности.

Пожалуй, еще существеннее тот недостаток нашей модели, как и вообще всех вариантов модели Джинса, что потенциал рассчитывается в цилиндрическом приближении, которое перестает служить, когда длина волны возмущения примерно равна толщине системы или меньше. В ряде случаев более близкие к истине результаты должно давать известное приближение бесконечно тонкого газового диска [17,18].

Для однородной модели вместо (5) в плоском случае надо пользоваться соотношением

$$\delta\phi = -\frac{2\pi G}{k} \delta\tilde{\rho}, \quad (25)$$

где значок "тильда" означает двумерную плотность газа в отличие от пространственной. Соответствующая замена дает вместо (6) дисперсионное уравнение

$$[\omega^2 - (\alpha + \beta)k^2 + 2\pi G \rho k](\omega^2 - k^2 \beta) - 4\Omega^2 \omega^2 = 0, \quad (26)$$

а вместо (7) критерий неустойчивости

$$2\pi G \tilde{\rho} > (\alpha + \beta)k, \quad (27)$$

впрочем, очень похожий на (7). Тот же самый критерий останется и при учете вязкости.

Напротив, модель двух сред в случае тонкого слоя требует для своего исследования довольно сложных квадратур. Из общих соображений можно только заключить, что эффект дополнительной неустойчивости в модели слоя сходит на нет при малых k или, точнее, при больших значениях безразмерного параметра Ω/kc . Тогда колебания происходят в направлении y и несжимаемая среда при $y < 0$ просто не может никуда сдвигаться, а в самом газовом слое длинноволновое возмущение устойчиво [17,18].

Во избежание недоразумений заметим, что в цилиндрической модели прямая подстановка $k=0$ невозможна, она приводит к расходимости в потенциале (18), тогда как в слое возмущения с $k=0$ способны дать лишь локальную сингулярность. Но в (20) или непосредственно в (19) можно брать бесконечно малые k , и тогда обнаруживается, что неустойчивость распространяется на всю область $\Omega^2 < 2\pi G \rho$, то есть вплоть до предела Пуанкаре.

Вывод, что само присутствие среды, сопротивляющейся сдвигам, способно иногда вызывать неустойчивость в соседнем обычном газе, может иметь значение для эволюции некоторых видов возмущений в галактических дисках. Действительно, ранее развившаяся турбулентность в какой-либо части диска как раз и играет роль относительно жесткой границы, но в свете наших результатов она в состоянии срывать неустойчивость газа в

соседней области. Таким образом, возникает возможная картина распространения неустойчивости самовозбуждением, что в целом, конечно, представляет собой нелинейный процесс. Желательно было бы развить исследование в рамках единой нелинейной постановки, но пока она связана с серьезными математическими трудностями. Поэтому мы и ограничились рассмотрением двух крайних фаз: малые возмущения линеаризуются, а очень большие трактуются статистически как фактор, изменяющий усредненные свойства системы.

Указанное представление может в какой-то мере объединять теорию волн плотности и теорию самораспространяющегося возбуждения [19]. Наличие в какой-то части системы среды, уже претерпевшей неустойчивость и турбулизовавшейся, способно оказывать практически мгновенное (за счет гравитации) влияние, дестабилизирующее соседние области. Так, в принципе, и может распространяться возбуждение, хотя на малых амплитудах структура волны не должна сильно отличаться от той, которая предсказывается теорией волн плотности. Намечается перспектива преодоления, в частности, такой трудности, как отсутствие пересечения спиралей, принадлежащих разным колебательным модам. При активной роли самовозбуждения любой природы таких пересечений, действительно, не должно быть.

Другая известная трудность состоит в том, что в теории волн плотности групповая скорость - порядка скорости звука, а это предопределяет тугую закрутку спиралей, притом по существу, а не только из соображений математического удобства. При комбинировании с идеей самовозбуждения в нашем понимании здесь уже нет принципиальной преграды, так как возмущения, как упомянуто выше, могут распространяться и гравитационным дальнодействием с достаточно высокой скоростью - речь идет о передаче толчка, а не энергии возбуждения.

Заметим, что мы заранее предполагаем отсутствие выделенных направлений, говоря о статистически изотропных магнитных полях или об изотропной турбулентности. Однако сходный механизм высвобождения неустойчивостей работает и при задании изначальной ориентации, в частности, магнитного поля. Д. Линден-Белл [20] в свое время обнаружил эффект дестабилизации регулярным магнитным полем, работающий, в частности, в газовой составляющей галактик.

Главная астрономическая обсерватория, Пулковое,
Россия, e-mail: baranov@gao.spb.ru

JEANS STABILITY OF A ROTATING MEDIUM
CAPABLE TO RESIST TO TANGENTIAL TENSIONS

V.A.ANTONOV, A.S.BARANOV, E.I.TIMOSHKOVA

The resistivity to tangential tensions in the model of a homogeneous gravitating medium has been introduced. It has been shown that this introduction unloads the gyroscopic stabilization both in the presence of the viscosity and without it. The model of touching gaseous and rigid mediums has been considered as well. The contact with a rigid support unloads partially the gyroscopic stabilization too. This fact can lead to a certain compromise between the theories of density waves and self-spreading excitation for explaining the spiral structures of galaxies.

Key words: *gravitation: medium: gyroscopic stabilization*

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Л.Поляченко, А.М.Фридман, Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, Наука, М., 1976.
2. П.Аппель, Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости, ОНТИ, Л.-М., 1936.
3. P.H.Roberts, K.Stewartson, *Astrophys. J.*, **137**, 777, 1963.
4. R.A.Lyttleton, *The Stability of Rotating Liquid Masses*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1953.
5. H.Robe, *Mém. Soc. Roy. Sci. Liège*, **18**, 1, 1969.
6. Г.Г.Денисов, В.В.Новиков, *Изв. АН СССР, механика твердого тела*, №3, 41, 1978.
7. Я.Г.Пановко, И.И.Губанова, *Устойчивость и колебания упругих систем*. Наука, М., 1979.
8. А.А.Сучков, *Астрон. ж.*, **47**, 1187, 1970.
9. J.H.Jeans, *Astronomy and Cosmology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1929.
10. S.Chandrasekhar, *Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1961.
11. В.С.Сафронов, *Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет*, Наука, М., 1969.
12. Д.Теркот, Дж.Шуберт, *Геодинамика*, ч.1, Мир, М., 1985.
13. П.Мельхиор, *Физика и динамика планет*, ч.II, Мир, М., 1976.
14. В.А.Антонов, А.С.Баранов, *Астрон. ж.*, **75**, 760, 1998.
15. Л.Н.Сретенский, *Теория ньютоновского потенциала*, Гостехиздат, М., 1946.

16. В.А.Антонов, Е.И.Тимошкова, К.В.Холшевников, Введение в теорию ньютоновского потенциала, Наука, М., 1988.
17. Ю.Н.Мишуров, В.Н.Пептисев, А.А.Сучков, Астрон. ж., 53, 268, 1976.
18. Н.Н.Горькавый, А.М.Фридман, Физика планетных колец, Наука, М., 1994.
19. H.Gerola, P.E.Seiden, Astrophys. J., 223, 129, 1978.
20. D.Lynden-Bell, Observatory, 86, 57, 1966.