

УДК: 524.728

УСТОЙЧИВОСТЬ S ЭЛЛИпсоИДОВ РИМАНА СО СФЕРОИДАЛЬНЫМ ГАЛО

М.Г.АБРАМЯН

Поступила 22 октября 2001

Принята к печати 14 декабря 2001

Исследована устойчивость S эллипсоидов Римана внутри сплюснутого гало относительно вторых форм колебания. Показано, что часть эллипсоидов с обратной внутренней циркуляцией вещества, которые устойчивы внутри сферического гало или при его отсутствии, становятся неустойчивыми относительно вторых "нечетных" форм колебания внутри сплюснутого гало. При этом имеется асимметрия между сопряженными эллипсоидами с точки зрения их устойчивости. Неустойчивы лишь те из сопряженных эллипсоидов, которым соответствуют большие, чем соответствующие им угловые скорости вращения, частоты обратной циркуляции вещества. Получены области неустойчивости "легких" и "тяжелых" сопряженных вложенных эллипсоидов в зависимости от меры сплюснутости и относительной плотности гало.

1. *Равновесное состояние.* В работе [1] были обобщены S эллипсоиды Римана [2] с учетом гравитации сфероидального гало с внутренним потенциалом

$$V_*(x) = -\pi G\rho \left[A^* (x_1^2 + x_2^2) + A_3^* x_3^2 \right], \quad (1)$$

где

$$A^* = 1 - A_3^*/2 = \frac{c_*}{1 - c_*^2} \left[\frac{\arcsin \sqrt{1 - c_*^2}}{\sqrt{1 - c_*^2}} - c_* \right], \quad (2)$$

c_* - отношение полуосей меридианного сечения гало.

Во вращающейся с угловой скоростью $\bar{\Omega}(0, 0, \Omega)$ системе отсчета, связанной с главными осями вложенного эллипсоида, поле скоростей внутренних течений в эллипсоиде имеет вид

$$u_i = Q_{ij} x_j; \quad Q_{ij} = -\lambda \Omega a_{ij} \varepsilon_{ij3}; \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3)$$

где ε_{ijk} - тензор Леви-Чивита, a_i - полуоси вложенного эллипсоида,

$$a_{ij} = a_i/a_j; \quad (4)$$

λ - частота внутренней циркуляции вещества в единицах Ω .

Условие относительного равновесия эллипсоида внутри гало имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega^2 - Q_{12} Q_{21} - 2 B_{12} - 2\kappa A^* &= a_{21}^2 \left[\Omega^2 - Q_{12} Q_{21} - 2 B_{12} - 2\kappa A^* \right] = \\ &= 2 a_2^2 A_{12} - 2\Omega Q_{21} - 2 a_{31}^2 (A_3 + \kappa A_3^*), \end{aligned} \quad (5)$$

где Ω^2 измеряется в единицах $\pi G\rho$, ρ - плотность массы, а A_i -

коэффициенты внутреннего потенциала вложенного эллипсоида, κ - относительная плотность гало:

$$\kappa = \rho_0 / \rho \quad (6)$$

$$A_i = a_{21} a_{31} \int_0^\infty 1 / [(a_{i1}^2 + s) \Delta(s)] ds; \quad \Delta^2(s) = \prod_{i=1}^3 (a_{i1}^2 + s);$$

$$A_{ij} = a_{21} a_{31} \int_0^\infty 1 / [(a_{i1}^2 + s)(a_{j1}^2 + s) \Delta(s)] ds; \quad (7)$$

$$B_{ij} = a_{21} a_{31} \int_0^\infty s / [(a_{i1}^2 + s)(a_{j1}^2 + s) \Delta(s)] ds.$$

Из (5) следует

$$\Omega^2 - Q_{12} Q_{21} = 2 B_{12} + \kappa A^*; \quad (8)$$

$$\Omega Q_{21} = -\Omega Q_{12} a_{21}^2 = a_{21}^2 A_{12} - a_{31}^2 (A_3 + \kappa A_3^*); \quad (9)$$

или

$$2 B_{13} + 2 \kappa A^* + (\Omega^2 - Q_{12} Q_{21} + 2 Q_{21} \Omega) = 2 a_{31}^2 (A_3 + \kappa A_3^*); \quad (10)$$

$$2 B_{23} + 2 \kappa A^* - (\Omega^2 - Q_{12} Q_{21} - 2 Q_{12} \Omega) = 2 a_{32}^2 (A_3 + \kappa A_3^*). \quad (11)$$

Преобразуем правую часть (9) и введем обозначение f :

$$(1 - a_{31}^2)(B_{13} + \kappa A_3^*) - (B_{12} + \kappa A_3^*) = a_{21} f. \quad (12)$$

Исключая из (8) и (9) квадрат угловой скорости с учетом (3), получим уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda \frac{B_{12} + \kappa A^*}{f} + 1 = 0, \quad (13)$$

инвариантное относительно преобразования $\lambda \rightarrow 1/\lambda$, что соответствует теореме Дедекинда о сопряженных эллипсоидах [2].

Область возможных геометрий вложенных S эллипсоидов в плоскости a_{21} , a_{31} получаем из условия действительности решений для λ , которое дает

$$a_{21} (B_{12} + \kappa A^*) \geq Abs \left[A_{12} a_{21}^2 - (A_3 + \kappa A_3^*) a_{31}^2 \right]. \quad (14)$$

В плоскости a_{21} , a_{31} эта область, вообще говоря, ограничена последовательностями самосопряженных эллипсоидов с $Abs[\lambda] = 1$, которым соответствует знак равенства в (14):

$$(1 - a_{31}^2) B_{13} - (1 - a_{12}) B_{12} - \kappa (a_{31}^2 A_3^* - a_{21} A^*) = 0; \quad \lambda = -1, \quad (15)$$

$$(1 - a_{31}^2) B_{13} - (1 + a_{12}) B_{12} - \kappa (a_{31}^2 A_3^* + a_{21} A^*) = 0; \quad \lambda = +1, \quad (16)$$

где использованы соотношения между индексными символами [2].

Последовательность самосопряженных эллипсоидов с обратной циркуляцией вещества $\lambda = -1$ ограничивает область вложенных эллипсоидов в плоскости a_{21} , a_{31} сверху. Среди вложенных S эллипсоидов с данным значением a_{21} наибольшее значение a_{31} имеют эти эллипсоиды. Внутри сферического гало эти эллипсоиды, как и соответствующие одиночные, отвечают от

сферической фигуры Маклорена [2,3]. Внутри сплюснутого гало сфера не является фигурой равновесия: не существует вложенных сфероидов, значение a_{31} которых больше, чем решение a_{310} следующего уравнения:

$$\frac{2a_{31}}{1-a_{31}^2} \left[\frac{1+2a_{31}^2}{\sqrt{1-a_{31}^2}} \arcsin \sqrt{1-a_{31}^2} - 2a_{31} \right] + \kappa [2 - (1+2a_{31}^2)A_3^*] = 0, \quad (17)$$

получаемого из (15) при значении $a_{21} = 1$. В табл.1 числа перед скобками представляют значения a_{310} вложенного сфероида внутри гало сплюснутости c , и относительной плотности κ .

Таблица 1

κ c.	0.05	0.10	0.25	0.50	1.00	∞
1.00	1.00 (.563)	1.00 (.546)	1.00 (.501)	1.00 (.446)	1.00 (.374)	1.00 (-)
0.75	.981 (.559)	.966 (.538)	.936 (.487)	.909 (.426)	.885 (.379)	.844 (-)
0.50	.954 (.553)	.920 (.527)	.855 (.467)	.800 (.400)	.751 (.319)	.670 (-)
0.25	.915 (.544)	.857 (.512)	.749 (.444)	.661 (.367)	.586 (.293)	.459 (-)
0.10	.884 (.536)	.806 (.499)	.668 (.421)	.555 (.343)	.455 (.259)	.284 (-)

Как видно из таблицы, всегда $a_{310} > c$, т.е. вложенный сфероид менее сплюснут, чем гало, даже в пределе легкой подсистемы, когда $\kappa \rightarrow \infty$:

$$a_{310}(\infty) = \sqrt{A^*/A_3^*}. \quad (18)$$

Внутри сплюснутого гало последовательность самосопряженных эллипсоидов $\lambda = -1$ ответвляется именно от сфероида наименьшей сплюснутости a_{310} , значение которой определяется уравнением (17) и кончается иглообразной, в плоскости вращения, фигурой. На графиках рис.1 и рис.2 верхние кривые представляют эти последовательности для разных значений сплюснутости и относительной плотности гало. Очевидно, сплюснутое гало сплюсчивает вложенные в него эллипсоиды.

Последовательность же самосопряженных эллипсоидов с положительной циркуляцией вещества $\lambda > 0$ в присутствии гало проявляет качественно новое поведение [1]. Внутри гало данной сплюснутости существует критическое значение относительной плотности κ_{kr} , такое, что внутри гало меньшей плотности самосопряженная последовательность $\lambda = 1$ расщепляется на две ветви - сильно и слабо сплюснутых по оси вращения эллипсоидов. Такое же поведение проявляют вложенные сфероиды с $\lambda = 1$, граница динамической устойчивости которых определяется уравнением (16), развернутый вид которого для сфероидов таков:

$$\frac{a_{31}}{(1-a_{31}^2)^2} \left[\frac{1+6a_{31}^2-4a_{31}^4}{\sqrt{1-a_{31}^2}} \arcsin \sqrt{1-a_{31}^2} + a_{31}(7-4a_{31}^2) \right] - \kappa [2 - (1-2a_{31}^2)A_3^*] = 0. \quad (19)$$

Критическое значение относительной плотности κ_{kr} , получаемое из

решения уравнения (19), растет с увеличением сплюснутости гало, откуда следует, что наибольшим стабилизирующим эффектом обладает сферическое гало [3]:

c ,	1.00	.75	.50	.25	.10
κ_{kr}	0.069	.078	.096	.147	.286

На графике рис.2d нижняя кривая представляет самосопряженную последовательность эллипсоидов, вложенных внутри гало сплюснутости 0.25 и относительной плотности 0.1. Эллипсоиды, соответствующие области, отделенной этой кривой, не являются фигурами равновесия.

Внутри гало относительной плотности $\kappa \geq \kappa_{kr}$ все эллипсоиды с положительной циркуляцией вещества являются фигурами равновесия.

В плоскости a_{21} , a_{31} области эллипсоидов с обратной и положительной циркуляцией вещества разделяются кривой, представляющей последовательность вложенных эллипсоидов Якоби ($\lambda = 0$, или $f = 0$), которая ответвляется от вложенного сфероид бифуркации и кончается иглообразной, в плоскости вращения, фигурой (см. кривые $\lambda = 0$ на рис.2). Независимо от меры сплюснутости гало, с ростом его относительной плотности, вложенный в него сфероид бифуркации все больше сплющивается (в табл.1 в скобках представлены сплюснутости соответствующих сфероидов бифуркации), а в пределе легких вложенных фигур ($\kappa \rightarrow \infty$) - вовсе исчезает. Вместе с ним исчезает и область эллипсоидов с положительной циркуляцией вещества (см. рис.1).

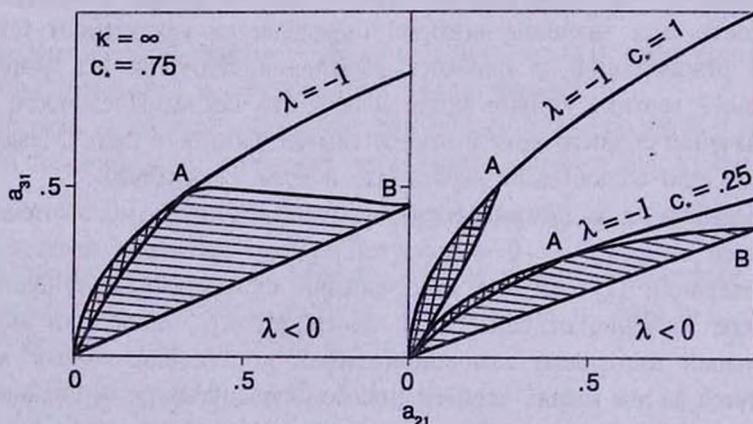


Рис.1. Легкие вложенные эллипсоиды внутри сферического ($c=1$) и сплюснутых ($c=0.75$; 0.25) гало. Области неустойчивости заштрихованы.

2. *Устойчивость вложенных эллипсоидов.* Перейдем к исследованию малых возмущений вложенных эллипсоидов, относительно вторых форм колебания, методом линеаризованных тензорных уравнений вириала [1,3]:

$$\begin{aligned} \omega^2 N_{i,j} - i2\omega Q_{ji} N_{i,j} - i2\omega N_{i,j} \varepsilon_{ij3} + 2\Omega(Q_{ik} N_{j,k} - Q_{jk} N_{i,k}) \varepsilon_{ij3} - \\ Q_{ji}^2 N_{i,i} - Q_{ii}^2 N_{j,j} = 2\kappa A_i^* N_{i,j} - \delta W_{ij} - \Omega^2 (N_{ij} - N_{3j} \delta_{i3}) - \delta U_{ij}, \end{aligned} \quad (20)$$

где возмущения характеризованы лагранжевым смещением частиц:

$$\bar{\xi}(x, t) = \bar{\xi}(x) \exp[-i\omega t], \quad (21)$$

ω - частота возмущений, δU и δW - возмущения внутренней и гравитационной энергий вложенного эллипсоида соответственно,

$$N_{ij} = \int \rho (\zeta_i x_j + \zeta_j x_i) dx = N_{i,j} + N_{j,i}. \quad (22)$$

Уравнения (20) дополняются условием соленоидальности возмущений [2]:

$$N_{11} + N_{22}/a_{21}^2 + N_{33}/a_{31}^2 = 0. \quad (23)$$

Четные относительно индекса 3 уравнения в (20) являются:

$$\frac{1}{2} \omega^2 N_{33} = 2\kappa A_3^* N_{33} - \delta W_{33} - \delta U_{33}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega^2 N_{11} - i2\omega Q_{12} N_{1,2} - i2\omega \Omega N_{2,1} + \Omega(Q_{21} N_{11} - Q_{12} N_{22}) = \\ = (2\kappa A^* - \Omega^2 + Q_{12} Q_{21}) N_{11} - \delta W_{11} - \delta U, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega^2 N_{22} - i2\omega Q_{21} N_{2,1} + i2\omega \Omega N_{1,2} + \Omega(Q_{21} N_{11} - Q_{12} N_{22}) = \\ = (2\kappa A^* - \Omega^2 + Q_{12} Q_{21}) N_{22} - \delta W_{22} - \delta U, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\omega^2 N_{1,2} - i\omega Q_{21} N_{11} - i\omega \Omega N_{22} = (B_{12} + 2\kappa A^* - \Omega^2 + Q_{12} Q_{21}) N_{12}, \quad (27)$$

$$\omega^2 N_{2,1} - i\omega Q_{12} N_{22} + i\omega \Omega N_{11} = (B_{12} + 2\kappa A^* - \Omega^2 + Q_{12} Q_{21}) N_{21}, \quad (28)$$

К ним следует добавить уравнение (23).

Уравнения (27) и (28) с учетом (8) сильно упрощаются:

$$\omega^2 N_{1,2} - i\omega Q_{21} N_{11} + i\omega \Omega N_{22} = 0, \quad (29)$$

$$\omega^2 N_{2,1} - i\omega Q_{12} N_{22} + i\omega \Omega N_{11} = 0, \quad (30)$$

С помощью этих двух уравнений, исключая $N_{1,2}$ и $N_{2,1}$ из (25) и (26), а также учитывая выражение для δW_{ij} из [2] и соотношения (8), (24), получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \omega^2 + \Omega Q_{21} - 4\kappa A^* - 2B_{12} + B_{13} - 3B_{11} \right) N_{11} + (3\Omega Q_{12} + B_{23} - B_{12}) N_{22} + \\ + (2\kappa A_3^* - B_{13} + 3B_{33}) N_{33} = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \omega^2 - \Omega Q_{12} - 4\kappa A^* - 2B_{12} + B_{23} - 3B_{22} \right) N_{22} + (-3\Omega Q_{21} + B_{13} - B_{12}) N_{11} + \\ + (2\kappa A_3^* - B_{23} + 3B_{33}) N_{33} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Последние два уравнения вместе с (23) приводят к биквадратному относительно ω характеристическому уравнению, которое, как показывают расчеты, не имеет комплексных решений. Следовательно, как у одиночных

[2], так и у вложенных в сплюснутое гало эллипсоидов, неустойчивость к четным формам колебания не возникает. Существование же тривиального корня $\omega = 0$ в уравнениях (29) и (30) указывает на то, что все вложенные S эллипсоиды отвечают от вложенных сфероидов [2,3].

Исследуем теперь нечетные относительно индекса 3 формы колебания, описываемые уравнениями

$$\omega^2 N_{1,3} - i 2\omega\Omega N_{2,3} + Q_{21}(2\Omega - Q_{12})N_{3,1} = (2B_{13} + 2\kappa A^* - \Omega^2)N_{13}, \quad (33)$$

$$\omega^2 N_{2,3} - i 2\omega\Omega N_{1,3} + Q_{12}(2\Omega - Q_{21})N_{3,2} = (2B_{23} + 2\kappa A^* - \Omega^2)N_{23}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 N_{3,1} - i 2\omega Q_{12} N_{3,2} - Q_{12} Q_{21} N_{3,1} &= 2(B_{13} + \kappa A_3^*)N_{13}, \\ \omega^2 N_{3,2} - i 2\omega Q_{21} N_{3,1} - Q_{12} Q_{21} N_{3,2} &= 2(B_{23} + \kappa A_3^*)N_{23}. \end{aligned} \quad (35)$$

Преобразуя эти уравнения с учетом (22), (10), (11), получим:

$$(\omega^2 - 2B_{13} - 2\kappa A^* + \Omega^2)N_{1,3} - i 2\omega\Omega N_{2,3} - 2a_{31}^2(B_{13} + \kappa A_3^*)N_{3,1} = 0, \quad (36)$$

$$(\omega^2 - 2B_{23} - 2\kappa A^* + \Omega^2)N_{2,3} - i 2\omega\Omega N_{1,3} - 2a_{32}^2(B_{23} + \kappa A_3^*)N_{3,2} = 0, \quad (37)$$

$$(\omega^2 - 2B_{13} - 2\kappa A_3^* - Q_{12}Q_{21})N_{3,1} - i 2\omega Q_{12}N_{3,2} - 2(B_{13} + \kappa A_3^*)N_{1,3} = 0, \quad (38)$$

$$(\omega^2 - 2B_{23} - 2\kappa A_3^* - Q_{12}Q_{21})N_{3,2} - i 2\omega Q_{21}N_{3,1} - 2(B_{23} + \kappa A_3^*)N_{2,3} = 0, \quad (39)$$

которые приводят к характеристическому уравнению:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - 2B_{13} - 2\kappa A^* + \Omega^2 & -2a_{31}^2(B_{13} + \kappa A_3^*) & -i 2\omega\Omega & 0 \\ -2(B_{13} + \kappa A_3^*) & \omega^2 - 2B_{13} - 2\kappa A_3^* - Q_{12}Q_{21} & 0 & -i 2\omega Q_{12} \\ i 2\omega\Omega & 0 & \omega^2 - 2B_{23} - 2\kappa A^* + \Omega^2 & -2a_{32}^2(B_{23} + \kappa A_3^*) \\ 0 & -i 2\omega Q_{21} & -2(B_{23} + \kappa A_3^*) & \omega^2 - 2B_{23} - 2\kappa A_3^* - Q_{12}Q_{21} \end{vmatrix} = 0. \quad (40)$$

Анализ этого уравнения показывает, что оно допускает корень

$$\omega^2 = \lambda^2 \Omega^2. \quad (41)$$

Опуская множитель $(\omega^2 - \lambda^2 \Omega^2)$, уравнение (40) представится в виде:

$$\begin{aligned} &\omega^6 - \omega^4 [4B_{13} + 4B_{23} + 2B_{12} + 2\kappa(4 - A^*) + \Omega^2] + \\ &\omega^2 \{ [4B_{13} - \Omega Q_{12} + \kappa(2 + A_2^*)][4B_{23} + \Omega Q_{21} + \kappa(2 + A_2^*)] + \\ &\Omega^2 [4B_{13} + 4B_{23} + 2B_{12} + 2\kappa(4 - A^*)] + 2\kappa(A_3^* - A^*) [4\Omega^2 + \Omega Q_{21} - \Omega Q_{12} + 2Q_{12}Q_{21}] \} - \\ &\{ \Omega [4B_{13} - \Omega Q_{12} + \kappa(2 + A_2^*)] + 2\kappa(A_3^* - A^*)(\Omega - Q_{12}) \} \times \\ &\{ \Omega [4B_{23} + \Omega Q_{21} + \kappa(2 + A_2^*)] + 2\kappa(A_3^* - A^*)(\Omega + Q_{21}) \} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Отметим, что характеристическое уравнение четных форм колебания, получаемое из (31), (32) и (23), содержит величины Ω , Q_{12} , Q_{21} лишь в комбинациях ΩQ_{12} , ΩQ_{21} , которые одни и те же для сопряженных конфигураций [2]. Поэтому, *характеристические частоты четных форм колебания для сопряженных конфигураций одинаковы*. Однако характеристическое уравнение нечетных форм колебания (40) лишено

этой симметрии: *характеристические частоты этих форм колебания для сопряженных эллипсоидов, вложенных внутри сплюснутого гало, не одинаковы*. Факт, что наряду с корнем (41) отсутствует корень $\omega^2 = \Omega^2$, уже явно указывает на эту асимметрию. Интересно, что для сопряженных эллипсоидов, вложенных внутри сферического гало, характеристические частоты нечетных форм колебания одинаковы [3].

Различие характеристических частот сопряженных эллипсоидов внутри сплюснутого гало может привести к тому, что критерии их устойчивости могут оказаться разными. Действительно, нижеследующий анализ уравнения (42) подтверждает этот вывод.

Геометрическое место точек границы устойчивости вложенных S эллипсоидов внутри сплюснутого гало, относительно нечетных форм колебания, определяется условием обращения в нуль свободного члена в уравнении (42):

$$\Omega [4 B_{13} - \Omega Q_{12} + \kappa(2 + A_3^*)] + \kappa(3 A_3^* - 2)(\Omega - Q_{12}) = 0 \quad (43)$$

или

$$\Omega [4 B_{23} + \Omega Q_{21} + \kappa(2 + A_3^*)] + \kappa(3 A_3^* - 2)(\Omega + Q_{21}) = 0, \quad (44)$$

которые для одиночных фигур совпадают с результатом Чандрасекара [2], а для эллипсоидов внутри сферического гало - с результатом работы [3].

С учетом (3), эти уравнения можно представить в виде

$$4 a_{21} (B_{13} + \kappa A_3^*) + [\Omega^2 + \kappa(3 A_3^* - 2)] \lambda = 0 \quad (45)$$

или

$$4 (B_{23} + \kappa A_3^*) + [\Omega^2 + \kappa(3 A_3^* - 2)] a_{21} \lambda = 0. \quad (46)$$

Индексные символы B_{ij} - величины положительные, а для сплюснутого гало $3A_3^* > 2$. Поэтому границы устойчивости (45) и (46) через область эллипсоидов с положительной циркуляцией вещества проходить не могут. Неустойчивые эллипсоиды, как и в случае одиночных фигур [2], следует искать в области эллипсоидов с обратной циркуляцией вещества.

Преобразуя уравнения (45), (46) с учетом (8) и (9), получим:

$$(4 a_{21}^2 + 1 - a_{31}^2)(B_{13} + \kappa A_3^*) - (B_{12} + \kappa A_3^*) + \kappa(3 A_3^* - 2) a_{21} \lambda = 0 \quad (47)$$

или

$$(4 + a_{21}^2 - a_{31}^2)(B_{23} + \kappa A_3^*) - a_{21}^2 (B_{12} + \kappa A_3^*) + \kappa(3 A_3^* - 2) a_{21} \lambda = 0, \quad (48)$$

где λ - решение уравнения [13]:

$$\lambda = \frac{B_{12} + \kappa A_3^*}{f} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{f}{B_{12} + \kappa A_3^*} \right)^2} \right]. \quad (49)$$

Знаки \pm относятся к сопряженным конфигурациям.

Для одиночных S эллипсоидов Римана, а также эллипсоидов со сферическим гало [2,3], уравнение (48) не имеет решений в области $a_{21} \leq 1$, $a_{31} \leq 1$. Поэтому границы устойчивости этих фигур определяются уравнением (47) без члена, содержащего λ .

Из-за несферичности гало в уравнениях (47) и (48) появляется член, содержащий λ , в результате чего оба вышеуказанные уравнения для вложенных S эллипсоидов дают решения, пересекающие область $\lambda < 0$ тремя кривыми. Первая из них соответствует знаку минус в уравнении (49) и решает вопрос устойчивости одиночных, а также вложенных в сферическое гало эллипсоидов [2,3]. Эта кривая (назовем ее первой ветвью) начинается иглообразной в плоскости вращения фигурой (точка 0 на графиках рис.1,2) и кончается самосопряженным эллипсоидом с $\lambda = -1$ (точка А на рис.1,2). Узкая область, заключенная между этой кривой и последовательностью $\lambda = -1$, представляет неустойчивые вложенные эллипсоиды, которым соответствует знак минус перед корнем в (49). На графиках рис.1,2 эти области указаны двойной штриховкой.

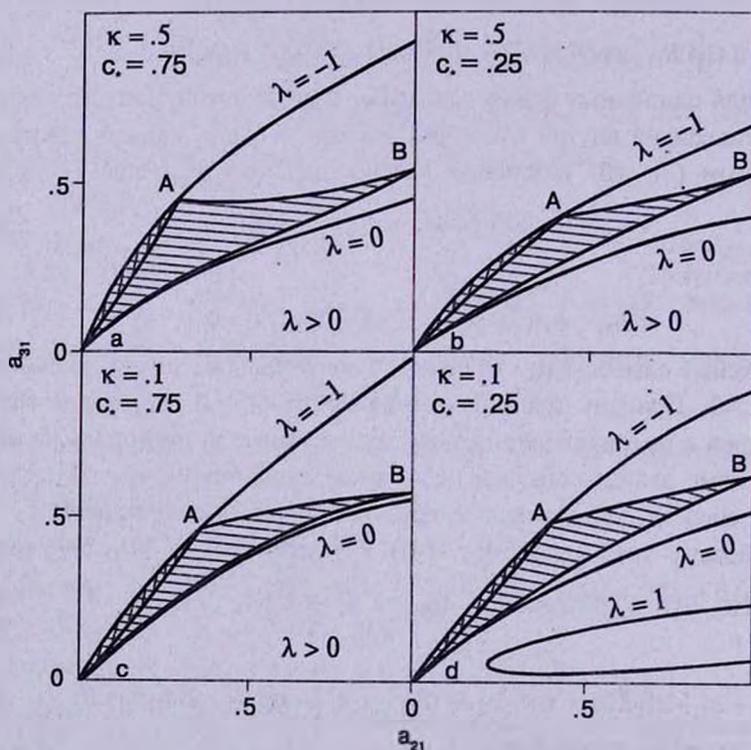


Рис.2. Вложенные S эллипсоиды внутри сплюснутого гало. Области неустойчивых эллипсоидов заштрихованы.

Перейдем к анализу вопроса устойчивости сопряженных эллипсоидов путем решения уравнений (47) и (48) при знаке плюс перед корнем в (49).

Заметим сначала, что для вложенных сфероидов ($a_{21} = 1$) уравнения

(47) и (48) совпадают и переходят в

$$4(B_{13} + \kappa A_3^*) + f + (3A_3^* - 2)\lambda = 0, \quad (50)$$

где

$$f = (1 - a_{31}^2)B_{13} - B_{11} - \kappa A_3^* B_{13} a_{31}^2, \\ \lambda = \frac{B_{11} + \kappa A_3^*}{f} \left[1 \pm \sqrt{\left(\frac{f}{B_{11} + \kappa A_3^*} \right)^2} \right]. \quad (51)$$

Уравнение (50) в области $a_{31} \leq 1$ имеет одно решение, зависящее от сплюснутости и относительной плотности гало. Это решение - сфероид (на рис.1 и 2 указан буквой Б), который порождает две ветви гранично - устойчивых трехосных эллипсоидов - решений уравнений (47) и (48) при знаке плюс перед корнем в (49). При этом одна из них - решение (47) (назовем ее второй ветвью) - кривая БА, пересекает последовательность самосопряженных эллипсоидов $\lambda = -1$ в точке А, а другая - решение уравнения (48) (третья ветвь) - кривая БО, кончается иглообразной фигурой. Область, заключенная между ветвями БА и БО (которая, кстати, включает и полученную нами, при знаке "-" перед корнем в (49), узкую полосу неустойчивости), представляет неустойчивые сопряженные эллипсоиды.

3. Приближение легкой подсистемы. Целесообразно более детально исследовать вопрос устойчивости легких вложенных подсистем, для которых соотношения (8), (9), (15) упрощаются:

$$\Omega^2 = 2\kappa A^* / (1 + \lambda^2), \quad \lambda \Omega^2 = -\kappa A_3^* a_{31}^2 / a_{21} = f; \quad a_{310}^2 = a_{21} A^* / A_3^*, \quad \text{для } \lambda = -1. \quad (52)$$

Уравнения же (47)-(49) принимают вид

$$4a_{21}^2 - a_{31}^2 + (3 - 2/A_3^*)a_{21}\lambda = 0, \quad (53)$$

или

$$4 - a_{31}^2 + (3 - 2/A_3^*)a_{21}\lambda = 0, \quad (54)$$

где

$$\lambda = -\frac{a_{310}^2}{a_{31}^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a_{31}}{a_{310}} \right)^2} \right]. \quad (55)$$

Соотношения (52), описывающие равновесие легких вложенных эллипсоидов, требуют обратной внутренней циркуляции вещества ($\lambda < 0$, см. также (55)). При этом в плоскости a_{21} , a_{31} легкие эллипсоиды заполняют всю область, лежащую ниже последовательности $\lambda = -1$, определяемой третьим уравнением (52) (см.рис.1).

Первые две ветви границы устойчивости, даваемые уравнением (53), пересекают последовательность $\lambda = -1$, в точке с

$$a_{21} = (5 - 2/A_3^*)/8. \quad (56)$$

Сплюснутость же легкого сфероида, от которой ответвляются вторая и третья ветви границы устойчивости легких S эллипсоидов, определяется уравнением

$$4 - a_{31}^2 - (3 - 2/A_3^*) \frac{A^*}{a_{31}^2} \left[1 + \sqrt{1 - (a_{31}^2 A_3^* / A^*)^2} \right] = 0. \quad (57)$$

Зависимость сплюснутости этого сфероида от меры сплюснутости гало представлена на графике рис.3, откуда видно, что сплюснутость имеет минимум, равный $a_{31} = 0.503$, внутри гало $c = 0.5$.

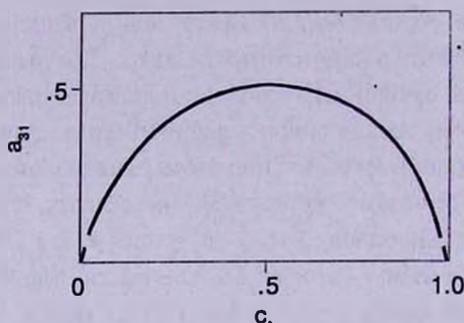


Рис.3. Зависимость сплюснутости легкого сфероида, от которого ответвляются гранично устойчивые трехосные эллипсоиды, от меры сплюснутости гало.

Характеристическое уравнение нечетных форм колебания (42) для легких вложенных эллипсоидов имеет комплексные решения лишь в областях, заключенных между: а) первой ветвью устойчивости и самосопряженной последовательностью (52) - при знаке минус перед корнем в (55) и б) последними двумя ветвями устойчивости - при знаке плюс в (55) (см. рис.1), т.е. для тех из сопряженных эллипсоидов, которым соответствуют $|\text{Abs}[\lambda]| > 1$. Заметим, что все эллипсоиды области а) неустойчивы независимо от того, одиночные они, или же вложены в гало.

4. *Обсуждение результатов.* Исследования влияния гравитирующего гало на равновесие и устойчивость вложенных подсистем до сих пор показали лишь его стабилизирующее действие [3-10], хотя равновесие эллипсоидальных фигур равновесия одиночной гравитирующей массы некоторых геометрий внутри гало оказывается невозможным: в зависимости от величины относительной плотности и меры сплюснутости гало, это - часть S эллипсоидов с обратной циркулирующей вещества, отношения полуосей меридианных сечений a_{31} , a_{32} которых лежат в области их наибольших значений; часть эллипсоидов Римана типов II и III [3]. Однако, наряду с этим, гало обеспечивает возможность существования новых фигур равновесия, в частности, разнообразных фигур легкой подсистемы в виде эллипсоидов и гиперболоидов [11-13], а также *сильно сплюснутых вдоль оси вращения эллипсоидов с положительной циркулирующей вещества*, которые, как показывают результаты

настоящей работы - *устойчивые образования*. Кстати, усредненные движения звезд внутри баров SB-галактик, являющихся сильно сплюснутыми вдоль оси вращения трехосными образованиями, по-видимому, имеют характер положительной циркуляции по вытянутым эллиптическим орбитам [14-17].

Полученный в настоящей работе дестабилизирующий эффект сплюснутого гало на части вложенных в него S эллипсоидов Римана с обратной циркуляцией вещества, а также асимметрия указанных сопряженных вложенных эллипсоидов в вопросе устойчивости по отношению ко вторым "нечетным" формам колебания, представляют большой интерес, требующий дальнейшего изучения. Заметим, что в области OAB плоскости a_{21} , a_{31} (рис. 1,2), неустойчивыми оказываются лишь те из сопряженных эллипсоидов, которым соответствуют более быстрые, чем соответствующие им угловые скорости вращения, частоты обратной циркуляции вещества: $Abs[v] > \Omega$, так как $v = \lambda \Omega$, а для неустойчивого эллипсоида $\lambda < -1$ (при знаке " + " перед корнем в (49)).

Автор выражает благодарность А.А.Бегларяну за научное сотрудничество.

Ереванский государственный университет,
Армения, e-mail: mabr49@arminco.com

THE STABILITY OF RIEMANN'S S ELLIPSOIDES WITH SPHEROIDAL HALO

M.G.ABRAMYAN

The stability of Riemann's S ellipsoides with respect of the second form oscillations is investigated. It is shown that a part of ellipsoides with reverse inner matter circulation which are stable both single and within spherical halo, become unstable in respect to the second "odd" forms of oscillation inside prolate spheroidal halo. An asymmetry between conjugated ellipsoides from the point of view of their stability has been found out. Only those of conjugated ellipsoides are unstable whose frequencies of reverse circulation are greater than their corresponding angular velocities. The regions of unstability of "light" and "heavy" inputing ellipsoides depending on the measure of oblateness and relative density of halo are obtained.

Key words: *galaxies: kinematics and dynamics-galaxies: halos: instabilities*

ЛИТЕРАТУРА

1. *М.Г.Абрамян*, *Астрофизика*, **25**, 173, 1986.
2. *С.Чандрасекар*, *Эллипсоидальные фигуры равновесия*, Мир, М., 1973, с.288.
3. *М.Г.Абрамян*, *Астрофизика*, **45**, 125, 2002.
4. *М.Г.Абрамян*, *С.А.Каплан*, *Астрофизика*, **10**, 565, 1974.
5. *J.P.Ostriker*, *P.J.E.Peebles*, *Astrophys. J.* **186**, 467, 1973.
6. *М.Мiyamoto*, *Publ. Astron. Soc. Jap.*, **19**, 242, 1967.
7. *М.Г.Абрамян*, *Р.С.Оганесян*, *Астрофизика*, **13**, 253, 1977.
8. *Р.Н.Durisen*, *Astrophys. J.*, **224**, 826, 1978.
9. *Р.Н.Miller*, *Astrophys. J.*, **223**, 881, 1978; **224**, 32, 1978, **226**, 81, 1979.
10. *М.Г.Абрамян*, *Астрофизика*, **14**, 129; 579, 1978; **18**, 350, 1982; **25**, 357, 1986.
11. *М.Г.Абрамян*, *С.А.Каплан*, *Астрофизика*, **11**, 121, 1975.
12. *М.Г.Абрамян*, *Х.К.Кокобелян*, *Астрофизика*, **38**, 55; 311, 1995.
13. *М.Г.Абрамян*, *Х.К.Кокобелян*, *Письма Астрон. ж.*, **22**, 782, 1996.
14. *J.Kormendy*, *Astrophys. J.*, **286**, 116; 132, 1984.
15. *J.Kormendy*, *G.Illingworth*, *Astrophys. J.*, **256**, 460, 1982; **357**, 75, 1982.
16. *М.Г.Абрамян*, *Астрофизика*, **25**, 342, 1986.
17. *М.Г.Абрамян*, *Д.М.Седракян*, *Астрон. ж.*, **63**, 1089, 1986.