АСТРОФИЗИКА

ТОМ 45 ФЕВРАЛЬ, 2002 ВЫПУСК 1

УДК: 52-423

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И РЕПАРАМЕТРИЗАЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЙ ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

А.БОРОВЕЦ[1], В.В.ПАПОЯН[2], В.Н.ПЕРВУШИН[1], М.В.РЗЯНИН[1], В.И.СМИРИЧИНСКИЙ[1]

Поступила 16 апреля 2001
Принята к печати 30 сентября 2001

На основе предложенного недавно метода репараметризационно-инвариантной гамильтоновой редукции сформулирована непротиворечивая теория возмущений и рассматривается линеаризованный предел в осцилляторном приближении ОТО. Обсуждаются возможные физические следствия интерпретации ненулевого локального гамильтониана как энергии гравитационного поля. Исследуется физический и геометрический смысл переменных редуцированного действия. Получен качественный вывод о зависимости распределения фаз реликтовых гравитационных волн в современную эпоху от начальных условий в момент Большого Взрыва.

1. *Введение.* Поиск и исследование гравитационных волн - одна из самых интригующих проблем современной физики. Трудности, связанные с экспериментальным обнаружением гравитационного излучения, несомненно, связаны с малостью константы гравитационного взаимодействия. Гравитационное излучение играло существенную роль в начале эволюции Вселенной, когда кривизна пространства-времени была экстремально большой и из-за малости гравитационной константы оно было отделено от остальной материи. Это реликтовое излучение должно нести определенную информацию о ранних стадиях эволюции Вселенной. Малость константы гравитационного взаимодействия обуславливает также и то, что реликтовое электромагнитное излучение почти не возмущает гравитационное поле. Реликтовый фотон - пробная по отношению к метрике частица, двигаясь миллиарды лет в метрике, сформированной реликтовыми волнами, в определенной степени наследует свойства этих волн. Другими словами, реликтовое электромагнитное излучение должно нести отпечаток реликтового гравитационного излучения. Количественно оценить такое влияние можно, исследуя согласованную с эволюцией Вселенной динамику гравитационных волн, для чего необходимо иметь удовлетворительную версию пертурбативной квантово-полевой теории гравитации, поскольку именно вблизи точки Большого Взрыва квантовые поправки к гравитации играют существенную роль.

Последовательной квантовой теории гравитации нет. Попытки построить ее основаны на каноническом квантовании гамильтоновой формулировки

общей теории относительности (ОТО). ОТО - сингулярная теория со связями первого рода, поэтому гамильтонов формализм позволяет наиболее полно отследить структуру связей и корректно разрешить проблему начальных данных. Именно поэтому каноническое квантование, как одна из возможностей построения формальной квантовой теории гравитации с коммутаторами типа классических скобок Пуассона, стимулировало развитие гамильтонова формализма ОТО. Наиболее удобной для построения формализма принято считать АДМ параметризацию метрики пространства-времени [1]. Геометрическому и динамическому содержанию АДМ параметров, их связям с "физическим сектором" переменных посвящено большое количество работ (см., например, [2-5]). Интенсивно изучаются проблемы начальных данных [2,6-9] и энергии гравитационного поля [1,10,11]. Эти проблемы находятся в стадии разработки, что приводит к ряду трудностей, которые не позволяют корректно проквантовать гравитационное поле.

Одна из этих трудностей связана с гамильтонианом. ОТО - сингулярная теория с первичными и вторичными связями первого рода, гамильтониан которой пропорционален связям и равен нулю на уравнениях движения, что усложняет однозначное определение генератора эволюции квантовой функции состояния и интерпретацию энергии гравитационного поля, а прямое квантование связей приводит к уравнению Уилера-Де-Витта с ненормируемой волновой функцией. Такая ситуация характерна для метрических теорий гравитации.

Вторая трудность связана с несамосогласованностью теории возмущений. Как было отмечено Кухаржом [12], если взять дивергенцию от поперечной связи, то вектор сдвига (shift) выпадает из линеаризованных уравнений связи, а функция хода (lapse) в них вообще не содержится, что не позволяет формулировать пертурбативную квантовую теорию. Действительно, для того, чтобы построить функционал состояний, необходимо чтобы компоненты метрического тензора g_{ik} являлись бы независимыми переменными. В классической теории существует "thin sandvich theorem", согласно которой начальные значения g_{ik} вместе со своими производными $g_{ik,0}$ при подходящих граничных условиях однозначно определяют метрику. Другими словами, если на начальной гиперповерхности задать $g_{ik,0}$ и g_{ik} и использовать четыре уравнения связи, то можно определить четыре неизвестные - функцию хода и вектор сдвига и тем самым полностью определить метрику. В линейном приближении эта теорема нарушается и возникает необходимость фиксации функции хода и вектора сдвига. Иначе говоря, в линейном приближении недостаточно информации для того, чтобы по заданным $g_{ik,0}$ и g_{ik}, определить хотя бы функцию хода, а если нет корректно сформулированной теории возмущений на классическом уровне, то построить пертурбативную квантовую теорию гравитации вряд ли возможно.

Следующая трудность связана с проблемой редукции, что подразумевает

отделение динамического содержания теории на поверхности связей от "лишних" переменных, ответственных за калибровочный произвол. Существуют два способа разрешения этой трудности. Первый состоит в наложении дополнительных калибровочных условий, исключающих лишние переменные, второй - в разрешении связей. Первый способ удобен и прост, так как обычно выбираются такие условия, которые существенно облегчают вычисления, но конкретная калибровка имеет ограниченную применимость, кроме того вопрос о том, насколько данная калибровка портит "истинную" динамику, остается открытым. Способ разрешения связей, если бы его удалось провести полностью, был бы идеальным, поскольку это означало бы, что найдена истинная динамика на связях в общем случае, однако, в силу сложной структуры связей, это трудно реализуемо технически.

Недавно предложен метод гамильтоновой редукции (см., например, [16] и [24]), основанный на глобальной параметризации метрики с последующим разрешением гамильтоновых связей. Этот метод позволяет разрешить трудности, связанные с гамильтонианом и самосогласованностью теории возмущений. В настоящей работе, в развитие предложенного метода, рассматриваются гравитационные возмущения в осцилляторном приближении на уровне редуцированной системы.

Прежде чем сформулировать задачу, изложим вкратце идею гамильтоновой редукции и роль времени-репараметризационной инвариантности для построения редуцированной теории.

- *Инвариантность относительно репараметризации времени и редукция*. Рассмотрим репараметризационно-инвариантную систему

$$W^E[p_i, q_i; p_0, q_0|t, N] = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(-p_0\dot{q}_0 + \sum_i p_i\dot{q}_i - NH_E(q_0, p_0, q_i, p_i)\right), \qquad (1)$$

где

$$H_E(q_0, p_0, q_i, p_i) = [-p_0 + H(p_i, q_i)] \qquad (2)$$

- расширенный гамильтониан.

Действие (1) получается из действия классической механики

$$W^R[p_i, q_i|q_0] = \int_{q_0(1)}^{q_0(2)} dq_0\left[\sum_i p_i\frac{dq_i}{dq_0} - H(p_i, q_i)\right] \qquad (3)$$

введением дополнительной пары канонических переменных (p_0, q_0) и множителя Лагранжа (N).

Для того, чтобы редуцировать расширенную систему (1) к (3), необходимо точно разрешить

$$\frac{\delta W}{\delta N} = 0 \quad \Rightarrow \quad -p_0 + H(p_i, q_i) = 0 \qquad (4)$$

- уравнение связи,

$$\frac{\delta W}{\delta q_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_0 = 0 \qquad (5)$$

- закон сохранения,

$$\frac{\delta W}{\delta p_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad dq_0 = Ndt \equiv dT \tag{6}$$

- уравнение, устанавливающее связь между эволюционным параметром редуцированной системы (3) и инвариантным "лагранжевым временем" $dT = Ndt$ (лагранжево время - это время по часам наблюдателя в сопутствующей системе отсчета). В классической механике q_0 и T совпадают. В релятивистской механике такого совпадения нет, кроме того, в отличие от классической механики, параметр эволюции не совпадает с "лагранжевым временем" (см., например, [16]). В репараметризационно-инвариантной теории роль времени можно приписать трем различным величинам:

1) "координатному времени" t (соответствующий гамильтониан равен нулю на связи (4)) - это не наблюдаемое время;

2) инвариантному "лагранжеву времени" T, конструируемому с помощью множителя Лагранжа (6). В релятивистской механике - это собственное время частицы. (В дальнейшем термины "собственное время" и "лагранжево время" будем считать взаимозаменяемыми);

3) динамическому "параметру эволюции" соответствующей редуцированной системы, который в нашем случае (3) есть (q_0).

Такая классификация времен в репараметризационно-инвариантных теориях была дана в [16].

- *АДМ-параметры и кинематические преобразования.* Для построения гамильтонова формализма необходимо в явном виде "отделить" пространство от времени, т.е. провести $3+1$ расщепление пространства-времени на семейство пространственно-подобных гиперповерхностей $t=\text{const}$. Наиболее удобной считается АДМ параметризация

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = N^2dt^2 - h_{ij}\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^j + N^j dt\right), \tag{7}$$

которая однозначно связана с величинами, характеризующими семейство гиперповерхностей $t=\text{const}$. Так, посредством функции хода N и вектора сдвига N_k можно составить четырехмерный вектор единичной нормали к гиперповерхности - $\nu^\alpha = \left(\frac{1}{N}, -\frac{N^k}{N}\right)$, а внутренняя метрика h_{ij} определяет вторую квадратичную форму

$$b_{ij} = \frac{1}{2N}\left(\dot{h}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i\right), \tag{8}$$

которая показывает, как вложена трехмерная гиперповерхность в объемлющее четырехмерное пространство. Кинематические преобразования координат [13,14],

$$t' = t'(t), \quad x' = x'(t, x),$$

сохраняют данное расслоение на семейство гиперповерхностей $t=\text{const}$ и включают репараметризацию времени $t'=t'(t)$. Инвариантность действия

относительно этой репараметризации играет ключевую роль в процедуре редукции и построении ненулевого гамильтониана.

В общем случае в процессе гамильтоновой редукции любая расширенная система

$$W^{ES}[p_i, q_i; p_0, q_0|t, N] = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(-p_0\dot{q}_0 + \sum_i p_i\dot{q}_i - NH^{ES}(q_0, p_0, q_i, p_i)\right),$$

распадается на две подсистемы уравнений, первая из которых - набор редуцированных подсистем

$$W^{RS}_{(1,2,\ldots)}[p_i, q_i|q_0] = \int_{q_0(1)}^{q_0(2)} dq_0\left[\sum_i p_i\frac{dq_i}{dq_0} - H^{RS}_{(1,2,\ldots)}\right],$$

соответствующих различным решениям гамильтоновой связи

$$H^{ES} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{0(1,2,\ldots)} = H^{RS}_{(1,2,\ldots)}.$$

Вторая определяется уравнениями на дополнительный импульс

$$\frac{\delta W^{ES}}{\delta p_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq_0}{dT} = -\frac{\delta H^{ES}}{\delta p_0} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\rho(q_0)} \quad \Rightarrow \quad T(q_0) = \int_0^{q_0}\frac{dq_0}{\sqrt{\rho(q_0)}} \qquad (9)$$

и координату, которая превращается в динамический параметр эволюции. Уравнение (9) описывает эволюцию собственного времени относительно динамического параметра редуцированной системы, причем параметром эволюции становится одна из исходных динамических переменных расширенной системы.

Итак, после точного разрешения гамильтоновой связи выясняется, что одна из переменных исходной расширенной системы "выпадает" из фазового пространства и превращается в эволюционный параметр редуцированной системы. В репараметризационно-инвариантной теории два уравнения на добавочный импульс и координату описывают динамику собственного времени. В специальной теории относительности динамика собственного времени сводится к преобразованию Лоренца от собственного времени наблюдателя к собственному времени частицы.

- *Постановка задачи.* Целью работы является развитие метода гамильтоновой редукции применительно к ОТО - выделение физических степеней свободы, формулировка теории возмущений и исследование линеаризованной теории в осцилляторном приближении с учетом космологической эволюции. Материал статьи изложен в соответствии со следующим планом. Во втором разделе описывается метод гамильтоновой редукции в ОТО, суть которого в разрешении одной гамильтоновой связи и введении глобальной переменной, затем приводится обоснование этого метода с точки зрения геометрии $3+1$ расслоения. В третьем разделе формулируется теория возмущений и анализируется линеаризованная теория. В четвертом разделе изложена суть осцилляторного приближения и исследовано его динамическое содержание.

2. *Гамильтонова редукция в ОТО.* 2.1. *Расширенное действие.* Если источником гравитации служит электромагнитное поле, то действие приобретает вид

$$W(g|\mu)=\int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{\mu^2}{6}R(g)-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right],$$
$$\mu^2=M_{pl}^2\frac{3}{8\pi},\quad F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu\,, \tag{10}$$

где M_{pl} - масса Планка. Репараметризационно-инвариантная гамильтонова редукция требует введения дополнительной переменной, которая должна зависеть только от времени, т.е. должна быть "глобальной".

Перейдем в конформно-соответствующее пространство, согласно

$$g(t,x)_{\alpha\beta}=\left(\frac{\phi(t)}{\mu}\right)^2\bar{g}_{\alpha\beta}(t,x), \tag{11}$$

а определяющий конформное преобразование скаляр $\phi(t)$ выберем в качестве дополнительной глобальной переменной, формально фиксируя тем самым кинеметрическую группу (ϕ остается зависящим от времени скаляром только при кинеметрических преобразованиях). После такого преобразования действие принимает вид

$$W(\bar{g}|\phi)=\int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left[-\frac{\phi^2}{6}R(\bar{g})+\phi\nabla^\alpha\nabla_\alpha\phi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]. \tag{12}$$

Для метрики конформно-соответствующего пространства $\bar{g}_{\alpha\beta}$ выберем следующую параметризацию:

$$\bar{g}_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}(\mathcal{N}N_0(t))^2-N_kN^k, & -N_k\\ -N_k, & -h_{ij}\end{pmatrix}, \tag{13}$$

которая от стандартной АДМ параметризации отличается факторизацией функции хода на два множителя - локальный и глобальный

$$N(t,x)=\mathcal{N}(t,x)N_0(t). \tag{14}$$

Глобальная часть функции хода $N_0(t)$ при кинеметрических преобразованиях преобразуется как

$$N_0'=N_0\frac{\partial t}{\partial t'},$$

а локальная часть $\mathcal{N}(t,x)$ остается кинеметрическим скаляром. После такой параметризации действие принимает вид

$$W(\bar{g}|\phi)=\int dtd^3x\,\mathcal{N}N_0\sqrt{h}\left[\frac{\phi^2}{6}R(h)-\frac{4}{6}\phi\overset{\odot}{\phi}b+\frac{\phi^2}{6}\left(b_{ij}b^{ij}-b^2\right)-\frac{\overset{\odot}{\phi}{}^2}{6}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}+\frac{1}{2N_0^2\mathcal{N}^2}\left(F^i_{n.}F_{mi}N^nN^m+2N^nF^i_{n.}F_{i0}+F^i_{0.}F_{0i}\right)\right]+\Sigma, \tag{15}$$

где

$$\overset{\odot}{\phi}=\frac{1}{\mathcal{N}N_0}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{16}$$

$$b_{ij} = \frac{1}{2\mathcal{N} N_0}\left(\dot{h}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i\right), \tag{17}$$

а Σ - поверхностный член

$$\Sigma = \int dt d^3x \left[\partial_0\left(\sqrt{h}\,\overset{\odot}{\phi} + \sqrt{h}\,\frac{1}{3}\phi^2 b\right) - \frac{1}{3}\phi^2 \partial_i \sqrt{h}\left(\partial^i(\mathcal{N} N_0) + N^i b\right)\right]. \tag{18}$$

Введение двух дополнительных глобальных переменных требует наложения двух условий. Одно из них выберем так, чтобы оно диагонализовало кинетический член в действии

$$\int d^3x \sqrt{h}\, b = 0, \tag{19}$$

а второе глобальное условие выберем позднее.

Теперь действие приобретает вид

$$W^{(I)} = \int dt\left[P_0 \dot{\phi} + \int d^3x\left(P^{ij} h_{ij} + P^i \dot{A}_i\right) - H\right], \tag{20}$$

с расширенным гамильтонианом

$$H = N_0\left(-\frac{P_0^2}{4E} + \int d^3x \sqrt{h}\mathcal{N}\mathcal{H}\right) + \int d^3x\left(2P^{ij}\nabla_i N_j + P^i F_{ni} N^n + P^i \partial_i A_0\right) - \Sigma, \tag{21}$$

$$\Sigma = \partial_0\left(-\frac{P_0}{2}\right) - \frac{\phi^2}{3}\int d^3x\, \partial_i\left(\sqrt{h}\left(N_0 \partial^i \mathcal{N} + N^i b\right)\right), \tag{22}$$

$$\mathcal{H} = -\frac{\phi^2}{6} R(h) + \frac{6}{\phi^2\left(\sqrt{h}\right)^2}\left(P^{ij}P_{ij} - \frac{1}{2}P^2\right) + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}\frac{P_i P^i}{\left(\sqrt{h}\right)^2}, \tag{23}$$

$$E = \int d^3x \frac{\sqrt{h}}{\mathcal{N}}. \tag{24}$$

Здесь $\{P^{ij}, h_{ij}\}$, $\{P^i, A_i\}$ - канонически сопряженные переменные, а $\{P_0(t), \phi(t)\}$ - дополнительные глобальные переменные.

Система связей выглядит следующим образом:

$$\frac{\delta W^{(I)}}{\delta N_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P_0^2}{4E} = \int d^3x \sqrt{h}\mathcal{N}\mathcal{H}, \tag{25}$$

$$\frac{\delta W^{(I)}}{\delta \mathcal{N}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P_0^2}{4E^2\mathcal{N}^2} = \mathcal{H}, \tag{26}$$

$$\frac{\delta W^{(I)}}{\delta N^i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\nabla_j P_i^j + P^j F_{ij} = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\delta W^{(I)}}{\delta A_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_i P^i = 0. \tag{28}$$

Отметим, что связь (25) можно получить из (26) интегрированием по пространству. Выпишем также уравнение на дополнительный импульс

$$\frac{\delta W^{(I)}}{\delta P_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\phi} = -N_0 \frac{P_0}{2E}. \tag{29}$$

2.2. *Редукция*. Разрешим связь (25) относительно дополнительного импульса P_0, а затем воспользуемся уравнением (26) для определения локальной функции хода $\mathcal{N}$. В результате получим следующее

$$P_0 = \pm 2\int d^3x\sqrt{h}\sqrt{\mathcal{H}} \equiv H_{(R)}, \tag{30}$$

$$\mathcal{N} = \frac{|P_0|}{2E\sqrt{\mathcal{H}}}, \tag{31}$$

где $H_{(R)}$ - генератор эволюции относительно ϕ. (В дальнейшем, в формуле (30), для определенности выберем знак минус. Геометрически это соответствует расхождению с течением времени нормальных к гиперповерхностям $t=\text{const}$ мировых линий наблюдателей). На связях (30) и (31) с точностью до поверхностного члена действие принимает вид

$$W^{(I)} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int d^3x\left[P^{ij}\partial_\phi h_{ij} + P^i\partial_\phi A_i - 2\sqrt{h}\sqrt{\mathcal{H}} - \left(2P^{ij}\nabla_i N_j + P^i F_{ni} N^n + P^i\partial_i A_0\right)\right]. \tag{32}$$

Соответствующий этому действию гамильтониан на поперечных связях (27), (28) имеет ненулевой и локальный характер

$$W^{(I)} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int d^3x\left[P^{ij}\dot{h}_{ij} + P^i\dot{A}_i - H_{(R)}\right], \tag{33}$$

(точка сверху означает дифференцирование по ϕ). Этот редуцированный гамильтониан построен из времени-репараметризационных инвариантов и полностью определяет динамику переменных $\{P^{ij}, h_{ij}\}$ и $\{P^i, A_i\}$. Поскольку из такой системы исключены нединамические переменные (в частности локальная функция хода $\mathcal{N}$), то динамика такой системы определяется однозначно.

Выберем отложенное в запас дополнительное глобальное условие так, чтобы

$$E = \int d^3x\frac{\sqrt{h}}{\mathcal{N}} = V_0, \tag{34}$$

(здесь V_0 - некоторая фиксированная константа $\partial_\phi V_0 = 0$), наложим его на параметры расширенного действия и, учитывая это соотношение, перепишем (29), (30) и (31),

$$\mathcal{N} = \frac{|P_0|}{2V_0\sqrt{\mathcal{H}}}, \tag{35}$$

$$P_0 = -2\int d^3x\sqrt{h}\sqrt{\mathcal{H}}, \tag{36}$$

$$2V_0\frac{d\phi}{P_0} = -N_0 dt \equiv -d\eta. \tag{37}$$

Исключая P_0 из (35) и (37), используя (36), получим

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}}\frac{d\phi}{d\eta}, \tag{38}$$

$$\frac{d\phi}{d\eta} = \frac{\int d^3x\sqrt{h}\sqrt{\mathcal{H}}}{V_0}, \tag{39}$$

здесь $d\eta$ - времени-репараметризационно-инвариантный интервал. Динамическая система, с редуцированным действием (33), дополненная соотношениями (38) и (39), полностью определяет метрику пространства-

времени ОТО при условии $g_{0i}=0$.

Отметим некоторые особенности редуцированного действия (см. также [15,17]).

1) Плотность гамильтониана $2\sqrt{\mathcal{H}}$ - локальная функция полевых переменных и является кинеметрическим скаляром.

2) Плотность гамильтониана (а следовательно, и сам редуцированный гамильтониан) не равна нулю на уравнениях движения. Иначе это противоречило бы соотношению (38) (функция хода не может быть равной нулю).

3) Редуцированный гамильтониан явно зависит от времени (от параметра эволюции ϕ).

Первые две особенности интересны с точки зрения интерпретации плотности функции гамильтониана на уравнениях движения как плотности наблюдаемой энергии. Зависимость гамильтониана от времени затрудняет формулировку законов сохранения, тем не менее, в дальнейшем с таким редуцированным гамильтонианом будет связано понятие энергии, а в линеаризованной теории этот вопрос будет детально исследован в следующем разделе. Здесь же отметим, что соотношение (38) напрямую связывает понятие функции хода с плотностью гамильтониана, а следовательно, и с плотностью энергии.

3. *Теория возмущений.* Для формулировки теории возмущений редуцированной системы (33) выпишем следующие разложения:

$$h_{ij} = h_{ik}^{(0)} + h_{ij}^{(1)} + h_{ij}^{(2)} + \dots, \tag{40}$$

$$P^{ij} = P^{(1)ij} + P^{(2)ij} + \dots, \tag{41}$$

где $h_{ij}^{(1)}$, $P^{(1)ij}$ - возмущения порядка некоторой малой величины $\lambda, \lambda \ll 1$. А $h_{ij}^{(2)}$, $P^{(2)ij}$ - возмущения порядка λ^2. Метрика $h_{ik}^{(0)}$ - некая фоновая метрика, в окрестности которой проводятся разложения. Предположим, также, что все поля-возмущения разложены на поперечные и продольные части (см. [2-4])

$$f_{ik} = f_{ik}^{TT} + f_{ik}^{T} + f_{ik}^{L}, \tag{42}$$

$$\nabla^i f_{ik}^{TT} = 0, \quad f_{ik}^{TT} h^{(0)ik} = 0, \quad f_{ik} h^{(0)ik} = f_{ik}^{T} h^{(0)ik}, \tag{43}$$

$$\nabla^i \left(f_{ik} - f_{ik}^{T}\right) = \nabla^i f_{ik}^{L}, \quad f_{ik}^{L} h^{(0)ik} = 0. \tag{44}$$

Здесь и далее ковариантная производная определена в пространстве фоновой метрики. В редуцированном действии нет нединамических переменных, поэтому последовательные расчеты по теории возмущений не приводят к принципиальным затруднениям.

3.1. *Нулевое приближение.* Преположим, что метрика нулевого приближения - это метрика Фридмана-Робертсона-Уолкера (ФРУ)

$$ds^2_{(0)} = h^{(0)}_{ij}dx^i dx^j = r_0^2\left(d\chi^2 + f^2(\chi)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right), \tag{45}$$

где $f(\chi) = \{\sin\chi, \chi, \sin h\chi\}$ соответственно для пространств положительной, нулевой и отрицательной кривизн, r_0 - некоторая постоянная с размерностью длины.

В нулевом приближении для выражения $\mathcal{H}$ получим

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} + \ldots = -k\frac{\phi^2}{r_0^2} + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}\frac{P_i P^i}{\left(\sqrt{h^{(0)}}\right)^2} + \ldots, \quad (k = 1, 0, -1), \tag{46}$$

а ввиду того, что нас не интересует динамика полей материи, оставим от нее эффективную константу C_0

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} + \ldots = -k\frac{\phi^2}{r_0^2} + C_0 + \ldots, \quad (k = 1, 0, -1). \tag{47}$$

Подставив полученное в соотношения (39) и (38), имеем

$$d\eta \approx \frac{V_0 d\phi}{4\pi r_0^3 \int d\chi f^2(\chi)\sqrt{-k\frac{\phi^2}{r_0^2} + C_0}}, \quad \mathcal{N} \approx \frac{4\pi r_0^3 \int d\chi f^2(\chi)}{V_0}. \tag{48}$$

Константу V_0 определим так, чтобы локальная функция хода равнялась единице $\mathcal{N} \approx 1$. Но для случаев (k=0, -1), то есть для открытых пространств, интеграл $\int\limits_0^\infty d\chi f^2(\chi)$ и V_0 являются расходящимися выражениями. Допустим, что существует конечный предел отношения

$$\mathcal{N} \approx \lim_{\chi\to\infty} \frac{4\pi r_0^3 \int\limits_0^\chi d\chi' f^2(\chi')}{V_0(\chi)} = 1. \tag{49}$$

Тогда (39) принимает вид

$$d\eta \approx \frac{d\phi}{\sqrt{-k\frac{\phi^2}{r_0^2} + C_0}}. \tag{50}$$

Таким образом, метрика (11) в нулевом приближении полностью определена. Эта метрика ФРУ, которая, если учесть два предыдущих соотношения, описывает пространство, заполненное фотонным газом, с плотностью энергии $\varepsilon \sim C_0/\phi^4$. Соотношения (38), (39) и $\mathcal{H}^{(0)}$ задают глобальное движение системы, что и определяет эволюцию метрики ФРУ.

3.2. *Линеаризованное приближение*. Предположим, что взаимодействие материи и гравитации пренебрежимо мало. Используем линеаризованную связь (27),

$$\nabla_i P^{(1)i}_j \approx 0, \tag{51}$$

тогда, имея в виду, что

$$P^{(1)}_{ij} \approx \frac{1}{2}\sqrt{h^{(0)}}\left(\dot{h}^{(1)}_{ij} - h^{(0)}_{ij}\dot{h}^{(1)}\right), \quad \dot{h}^{(1)} = h^{(1)}_{kl}h^{(0)kl}, \tag{52}$$

а также, что $h_{kl}^{(0)}$ не зависит от времени, из (51) получим

$$\nabla^i\left(h_{ij}^{(1)} - h_{ij}^{(0)}h^{(1)}\right) \approx 0. \tag{53}$$

Последнее выражение является следствием поперечной связи, но не калибровочным условием. Преобразованием

$$\begin{aligned} &\widetilde{P}^{ij} = P^{(1)ij} - \frac{1}{3}h^{(0)ij}P^{(1)}, \quad \widetilde{h}_{ij} = h_{ij}^{(1)} - \frac{1}{3}h_{ij}^{(0)}h^{(1)}, \\ &P^{(1)} = h_{ij}^{(0)}P^{(1)ij}, \quad h^{(1)} = h_{ij}^{(0)}h^{(1)ij} \end{aligned} \tag{54}$$

перейдем от канонического набора переменных $\{P^{(1)ij}, h_{ij}^{(1)}\}$ к новому набору $\{\widetilde{P}^{ij}, \widetilde{h}_{ij}\}, \{P^{(1)}/3,\ h^{(1)}\}$. Это преобразование не является каноническим, однако его невырожденность позволяет исследовать динамику в новом наборе переменных. Редуцированное действие принимает вид

$$W^{(I)} = \int d\phi \int\left[d^3x\left[\widetilde{P}^{ij}\dot{\widetilde{h}}_{ij} + \frac{1}{3}P^{(1)}\dot{h}_{(1)}\right] - H_{(R)}\right], \tag{55}$$

где

$$H_{(R)} = H_{(R)}^{(0)} + H_{(R)}^{(2)} + \ldots \tag{56}$$

Кинетическая часть $H_{(R)}^{(2)}$ с точностью до некоторого коэффициента, зависящего от времени, выглядит так:

$$H_{(R)}^{(0)} \sim \int d^3x \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\widetilde{P}^{ij}\widetilde{P}_{ij}^{(t)} - \frac{1}{6}P^{(1)2}\right). \tag{57}$$

"Поперечное" разложение (см. [2-5]) для $\widetilde{P}^{ij}$ имеет вид

$$\widetilde{P}_{ij} = P_{ij}^{(TT)} + \nabla_i W_j + \nabla_j W_i + 2\left(\nabla_i\nabla_j W - \frac{1}{3}h_{ij}^{(0)}\nabla W\right), \tag{58}$$

где W^i - поперечный вектор $\nabla_i W^i = 0$, а $P_{ij}^{(TT)}$ - бесследовая поперечная часть.

Связь (51) принимает вид

$$\nabla^i\left[\nabla_i W_j + \nabla_j W_i + 2\left(\nabla_i\nabla_j W - \frac{1}{3}h_{ij}^{(0)}\nabla W\right)\right] = \frac{1}{3}\nabla_j P^{(1)}. \tag{59}$$

Учитывая, далее, что метрика $h_{ij}^{(0)}$ изотропна $R(h^{(0)})_{ij} = 2kh_{ij}^{(0)}$ и что из равенства двух векторов вытекает равенство их продольных и поперечных составляющих, имеем $W^i = 0$ и

$$2\left(\Delta\nabla_j W - \frac{1}{3}\nabla_j\Delta W\right) = \frac{1}{3}\nabla_j P^{(1)}, \tag{60}$$

или в эквивалентной форме

$$2\left(\nabla_j\Delta W + 2k\nabla_j W - \frac{1}{3}\nabla_j\Delta W\right) = \frac{1}{3}\nabla_j P^{(1)}, \tag{61}$$

откуда следует

$$2\left(\frac{2}{3}\Delta W + 2kW\right) = \frac{1}{3}P^{(1)}. \tag{62}$$

Рассмотрим случай пространственно-плоской метрики $k = 0$:

$$4\Delta W = P^{(1)}. \tag{63}$$

"Поперечное" разложение записывается как

$$\tilde{P}^{ij} = P_{ij}^{(TT)} + 2\left(\nabla_i \nabla_j W - \frac{1}{3} h_{ij}^{(0)} \Delta W\right), \tag{64}$$

где W удовлетворяет (63).

С учетом этого разложения вычислим правую часть (57)

$$\begin{aligned}
&\int d^3x \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\tilde{P}^{ij}\tilde{P}_{ij}^{(i)} - \frac{1}{6}P^{(1)2}\right) = \\
&= \int d^3x \frac{1}{\sqrt{h}}\left[P_{ij}^{(TT)2} + 4\left(\nabla_i\nabla_j W - \frac{1}{3}h_{ij}^{(0)}\Delta W\right)\left(\nabla^i\nabla^j W - \frac{1}{3}h^{(0)ij}\Delta W\right) - \frac{1}{6}P^{(1)2}\right] = \\
&= \int d^3x \frac{1}{\sqrt{h}}\left[P_{ij}^{(TT)2} + 4\left(\nabla_i\nabla_j W - \frac{1}{3}h_{ij}^{(0)}\Delta W\right)\left(\nabla^i\nabla^j W\right) - \frac{1}{6}P^{(1)2}\right] = \\
&= \int d^3x \frac{1}{\sqrt{h}}\left[P_{ij}^{(TT)2} - \frac{2}{3}\nabla^i P^{(1)}\nabla_i W - \frac{1}{6}P^{(1)2}\right] = \\
&= \int d^3x \frac{1}{\sqrt{h}}\left[P_{ij}^{(TT)2} + \frac{2}{3}P^{(1)}\Delta W - \frac{1}{6}P^{(1)2}\right] = \int d^3x \frac{1}{\sqrt{h}}\left[P_{ij}^{(TT)2}\right].
\end{aligned} \tag{65}$$

Вывод. В редуцированном гамильтониане в квадратичном приближении величина $P^{(1)}$ не содержится. А это значит, что вариация редуцированного действия по $P^{(1)}$ приводит к уравнению

$$\dot{h}^{(1)} = 0. \tag{66}$$

Следовательно, можно положить $h^{(1)} = 0$ на начальной гиперповерхности, и это условие будет выполняться на всех гиперповерхностях в последующие моменты времени. Таким образом, пара переменных $\{P^{(1)}, h^{(1)}\}$ выпадает из редуцированного гамильтониана в квадратичном приближении (линеаризованные уравнения), что является следствием структуры гамильтониана и наличия поперечных связей, но не калибровки.

Выпишем редуцированный гамильтониан с точностью до λ^2, предварительно заметив, что

$$\mathcal{H} \approx C_0\left(1 + \frac{1}{2}h_{ij}^{(TT)}h_{ij}^{(TT)} + \right) + \left[\frac{6}{\phi^2}P_{ij}^{(TT)}P_{ij}^{(TT)} + \frac{\phi^2}{6}\frac{1}{4}\partial_k h_{ij}^{(TT)}\partial_k h_{ij}^{(TT)} + \frac{3}{2}\partial_i\partial_l\left(h_{ik}^{(TT)}h_{lk}^{(TT)}\right)\right]. \tag{67}$$

Здесь учтено, что к C_0, как эффективному вкладу материи, добавляется пропорциональный λ^2 член за счет возмущения метрики. Легко заметить, что линейный по λ вклад отсутствует в $\mathcal{H}$ и для редуцированного гамильтониана имеем

$$H_{(R)} = 2\int d^3x\sqrt{h}\sqrt{\mathcal{H}} \approx \int d^3x\left[2\sqrt{C_0} + \frac{1}{\sqrt{C_0}}\left(\frac{6}{\phi^2}P_{ij}^{(TT)}P_{ij}^{(TT)} + \frac{\phi^2}{6}\frac{1}{4}\partial_k h_{ij}^{(TT)}\partial_k h_{ij}^{(TT)}\right)\right]. \tag{68}$$

Перейдем к новому набору переменных $\{\pi^{ij}, \varepsilon_{ij}\}$ преобразованием

$$\pi^{ij} = \frac{\sqrt{6}}{\phi}P^{TTij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\phi}{\sqrt{6}}h_{ij}^{(TT)}, \tag{69}$$

которое является каноническим в пределе больших ϕ и для редуцированного гамильтониана получим

$$H_{(R)} \approx \int d^3x \left[2\sqrt{C_0} + \frac{1}{\sqrt{C_0}} \left(\pi_{ij}\pi_{ij} + \frac{1}{4}\partial_k \varepsilon_{ij} \partial_k \varepsilon_{ij} \right) + \frac{\pi_{ij}\varepsilon_{ij}}{\phi} \right]. \tag{70}$$

При достаточно больших ϕ, когда последним слагаемым можно пренебречь, $H_{(R)}$ удовлетворяет волновому уравнению, что позволяет связать с таким гамильтонианом понятие энергии (для сравнения см. [18]).

При малых ϕ зависимость гамильтониана (70) от параметра эволюции существенна. Рассмотрим общий случай ($R^{(0)} = 6k/r_0^2$, $k = 1, 0, -1$, $C_0 = 0$), тогда

$$H_{(R)} = \int d^3x \sqrt{h}\sqrt{\mathcal{H}} \approx \int d^3x \sqrt{h} \sqrt{-\frac{\phi^2}{r_0^2}k + \frac{6}{\phi^2} P_{ij}^{TT} P_{ij}^{TT}}\,. \tag{71}$$

P_{ij}^{TT} удовлетворяет следующему динамическому уравнению:

$$\frac{d}{d\phi} P^{TT} T_{ij} \approx 0. \tag{72}$$

Заметим, что P_{ij}^{TT} - не зависит от ϕ. Выпишем также соотношение, связывающее инвариантное время η с параметром эволюции ϕ, который одновременно служит масштабным фактором

$$d\eta \approx \frac{V_0 d\phi}{\int d^3x \sqrt{-\frac{\phi^2}{r_0^2}k + \frac{6}{\phi^2} P_{ij}^{TT} P_{ij}^{TT}}}, \tag{73}$$

причем интеграл в знаменателе надо понимать как усреднение по пространству. Учитывая только этот усредненный по пространству вклад в динамику собственного времени, получим

$$d\eta \sim \frac{d\phi}{\sqrt{-\frac{\phi^2}{r_0^2}k + \frac{C_1}{\phi^2}}} \tag{74}$$

(здесь C_1 - усредненный вклад от $6P_{ij}^{TT}P_{ij}^{TT}$). Уравнение (74) в точности повторяет динамику масштабного фактора космологической модели Фридмана с предельно жестким уравнением состояния однородной материи.

4. ***Осцилляторное приближение. Обоснование.*** Перейдем к дискретному набору переменных. Как известно (см. [19] §52), в классической электродинамике переход к такому описанию осуществляется путем рассмотрения поля в большом, но конечном объеме пространства V [20,21]. Действуя аналогично для функции Гамильтона H в переменных $\{\vec{Q}, \vec{P}\}$, получим

$$H = \frac{1}{2}\sum_k \left(\vec{P}_k^2 + \omega^2 \vec{Q}_k^2 \right). \tag{75}$$

Принято $U = 1$, что не ограничивает общность рассуждений. Каждый из векторов $\vec{P}_k$ и $\vec{Q}_k$ перпендикулярен волновому вектору $\vec{k}$, т.е. имеем по две независимые компоненты. Направление поляризации этих векторов определяет направление поляризации соответствующей волны. Обозначив компоненты векторов $\vec{P}_k$ и $\vec{Q}_k$ (в плоскости, перпендикулярной $\vec{k}$)

посредством $\bar{P}_L, \bar{Q}_L$, $L = (k, \alpha = 1, 2)$, запишем функцию Гамильтона в виде

$$H = \frac{1}{2}\sum_L \left(P_L^2 + \omega^2 Q_L^2\right). \tag{76}$$

Теория квантования такой системы хорошо известна, и если перейти в представление чисел заполнения, мы столкнемся с корпускулярной трактовкой квантов возбуждения осцилляторов, т.е. с понятием фотона.

Рассмотрим теперь систему гравитационного и электромагнитного полей и проведем аналогичный переход к осцилляторному дискретному представлению для такой системы.

Прежде всего отметим, что при рождении Вселенной ($\phi = 0$)мы не можем отделить эволюцию глобальной моды скалярного поля (либо пространственного масштаба в ОТО) от эволюции материальных полей. И поэтому для изучения такой системы необходимо классифицировать гамильтониан соответственно предложенной выше классификации времен. Гамильтонова связь соответствует неинвариантному и ненаблюдаемому координатному времени. Канонический импульс, соответствующий глобальной переменной ϕ (параметру эволюции), может быть назван эволюционным гамильтонианом.

Введем также понятие "измеряемого гамильтониана" как вариационную производную действия по "измеряемому" времени. Мы рассматриваем Вселенную вблизи точки ее рождения в приближении свободной квантовой теории поля. Это означает: 1) пренебрежение всеми взаимодействиями; 2) разложение по обратному объему; 3) использование осцилляторноподобных переменных (аналогично квантовой теории поля).

Иначе говоря, рассматривая только фотоны и гравитоны, окончательно получаем набор осцилляторов (K - индекс для фотонов, L - для гравитонов):

$$\int_{V_0} d^3x P^j_{(A)} \dot{A}^\perp_j = \sum_K p_K \dot{q}_K; \quad \int_{V_0} d^3x P^{ij}_{(h)} \dot{h}^\perp_{ij} = \sum_L p_L \dot{q}_L - \frac{\dot{\phi}}{\phi}\sum_L p_L q_L;$$

$$\int d^3x \frac{1}{2}\left(P^2_{(A)} + \left(A^\perp\right)^2\right) = \sum_{K=(k,\alpha)} \frac{1}{2}\left(p_K^2 + \omega_K^2 q_K^2\right);$$

$$\int d^3x \left(\frac{6P^2_{(h)}}{\phi^2} + \frac{\phi^2}{24}\left(h^\perp\right)^2\right) = \sum_{L=(l,\alpha)} \frac{1}{2}\left(p_L^2 + \omega_L^2 q_L^2\right).$$

Расширенное действие приобретает вид

$$W^{ES} = \int dt \left[\sum_I \dot{q}_I p_I - \dot{\lambda}_0\left(P_0 + \sum_L \frac{q_L p_L}{\phi}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\phi P_0}{2}\right) + N_0 H^{ES}\right], \tag{77}$$

где

$$H^{ES} = \left(-\frac{P_0^2}{4V_0} + \sum_{I=K,L} \frac{1}{2}\left(p_I^2 + \omega_I^2 q_I^2\right)\right).$$

Далее редуцируем действие, разрешая связь относительно глобального импульса P_0

$$P_0 = \pm 2\sqrt{V_0 \sum_{I=K,L} \frac{1}{2}\left(p_I^2 + \omega_I^2 q_I^2\right)} \equiv \pm 2V_0\sqrt{\rho_g + \rho_0} \equiv \pm 2V_0\sqrt{\rho_t}\,,$$

$$\rho_g = \sum_{I=L} \frac{1}{2}\left(p_L^2 + \omega_L^2 q_L^2\right); \quad \rho_g = \sum_{I=K} \frac{1}{2}\left(p_K^2 + \omega_K^2 q_K^2\right); \quad \rho_t = \rho_g + \rho_0, \tag{78}$$

и перейдем к динамическому параметру эволюции ϕ

$$W^{RS} = \int d\phi \left[\sum_I \dot{q}_I p_I \mp 2V_0\sqrt{\rho_t} - \sum_L \frac{q_L p_L}{\phi}\right]. \tag{79}$$

Полученное редуцированное действие должно быть дополнено уравнением на дополнительный импульс

$$\frac{d\phi}{dT} \equiv \frac{d\phi}{N_0 dt} = -\frac{P_0}{4V_0} = \mp\sqrt{\rho_t}\,, \tag{80}$$

которое задает связь между измеряемым временем и параметром эволюции. Измеряемая энергия, определенная как

$$H^M_{(hj)} = -\frac{\partial W^{RS}}{\partial T}\,, \tag{81}$$

при больших ϕ совпадает с толмановским определением энергии [22,23].

4.1. *Аналитически-решаемый предел и численное моделирование.* Для качественной оценки поведения рассматриваемой системы рассмотрим детально пример, когда в действии (79) присутствует лишь одна гравитационная мода

$$\frac{\partial q_L}{d\phi} = \frac{p_L}{\sqrt{\rho_t}} + \frac{q_L}{\phi}; \quad \left(\rho_t = \rho_0 + \rho_g\right), \tag{82}$$

$$-\frac{\partial p_L}{d\phi} = \frac{q_L\,\omega_L^2}{\sqrt{\rho_t}} + \frac{p_L}{\phi}; \quad \left(\rho_g = \frac{1}{2V_0}\left(p_L^2 + \omega_L^2 q_L^2\right)\right), \tag{83}$$

здесь ρ_0 - сохраняющаяся плотность энергии фотонной радиации. Дополним эту систему "динамикой" собственного времени

$$T(\phi) = \int_{[0]}^{\phi} \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho_t(\lambda)}}; \quad H_{\text{Hub}} = \frac{1}{\phi}\frac{d\phi}{dT} = \frac{\sqrt{\rho_t(\phi)}}{\phi}. \tag{84}$$

Сравнивая слагаемые в уравнениях (82) и (83), заключаем, что существуют два предельных режима: i) $\phi^2 \gg \rho_t/\omega_L^2$; ii) $\phi^2 < \rho_t/\omega_L^2$.

В первом режиме можно пренебречь последним членом в уравнениях (82) и (83), и тогда получим обычные гравитационные волны с сохраняющейся плотностью энергии $\rho_g \left(\frac{d}{d\lambda}\rho_g = 0\right)$:

$$q_L = \sqrt{2V_0\rho_g}\sin(\omega_L T + \delta_0); \quad p_L = \sqrt{2V_0\rho_g}\cos(\omega_L T + \delta_0); \quad T(\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{\rho_0 + \rho_g}}. \tag{85}$$

Во втором режиме (пренебрегая первыми членами в (82) и (83)) получим

$$\omega_{qL} = \sqrt{2V_0}\,\frac{\phi}{T_0}; \quad p_L = \sqrt{2V_0}\,\frac{A}{\phi} \tag{86}$$

так, что

$$\rho_t = \rho_0 + \frac{A^2}{\phi^2} + \frac{\phi^2}{T_0^2}; \tag{87}$$

$$\phi(T) = \frac{T_0}{\sqrt{2}}\left[\rho_0\left[\cos h\left(\frac{2T}{T_0}\right) - 1\right] + 2\frac{A}{T_0}\sin h\left(\frac{2T}{T_0}\right)\right]^{1/2}, \tag{88}$$

Выражение (87) позволяет трактовать решения (86) как спонтанное "рождение" пространственной неевклидовой геометрии. Из (88) видно, что в конформном времени энергия экспоненциально растет (инфляция). Результат численного решения системы (82) и (83) представлен на рис.1, изображающем зависимость измеряемой энергии

$$E_c = 2\rho_t + \sqrt{\rho_t}\,\frac{p_L q_L}{\phi} - \sqrt{\rho_t}\,\frac{d}{d\phi}\left(\phi\sqrt{\rho_t}\right) \tag{89}$$

от параметра эволюции ϕ (последнее слагаемое в (89) - временной поверхностный член).

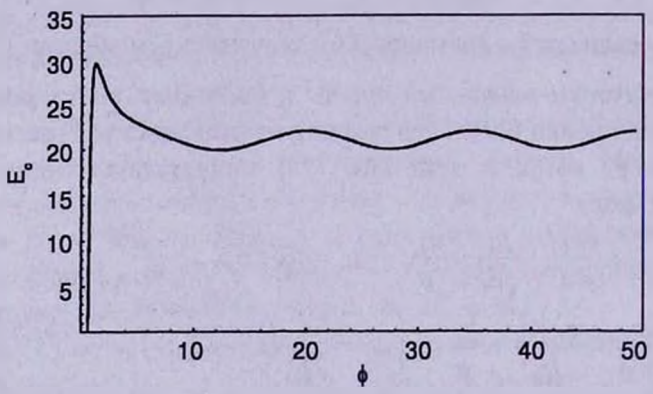

Рис.1. График зависимости измеряемой энергии E_c от параметра эволюции ϕ.

Проанализируем полученный результат. Примем, что при $\phi = 50$

$$\frac{\rho_0}{\rho_g} = 20.$$

Реально плотность энергии реликтового излучения фотонов должна быть много больше, чем $20\rho_g$, но для качественной оценки динамического поведения это не существенно. Примем также, что $\omega = 1$ и $V_0 = 1$.

В асимптотическом режиме достаточно больших ϕ измеряемая энергия осциллирует вокруг среднего значения, равного $(\rho_0 + \rho_g)\big|_{\phi\to\infty}$. Эти осцилляции обусловлены гравитационным вкладом в измеряемую энергию E_c при больших λ, который в точности равен удвоенной кинетической энергии "гравитационного" осциллятора. Отметим, что если в выражении (89) не учитывать временной поверхностный член, то асимптотически при больших ϕ получается константа. Отметим еще одну важную особенность: наблюдаемая энергия при обратной эволюции (от больших ϕ к 0) обязательно обращается

в нуль при некотором малом значении ϕ (которое мы будем обозначать как $\phi(0)$). Кроме того, в следующем подразделе будет показано, что фаза осцилляций при $\phi \to \infty$ существенно зависит от $\phi(0)$.

4.2. *Рождение Вселенной и фазовые корреляции для гравитонов.* На рис.2-4 изображены фазовые портреты рассматриваемой системы при различных значениях фазы осцилляций на "бесконечности" (при достаточно больших фиксированных значениях ϕ). Легко заметить, что фазовый портрет существенно зависит от фазы на бесконечности, а именно от того, когда и куда начнется "сваливание" с эллипса осцилляций. Особый интерес представляет график зависимости $\phi(0)$ от фазы бесконечности (см. рис.5), из которого видно, что точка "рождения" Вселенной ϕ может существенно зависеть от фазы на бесконечности.

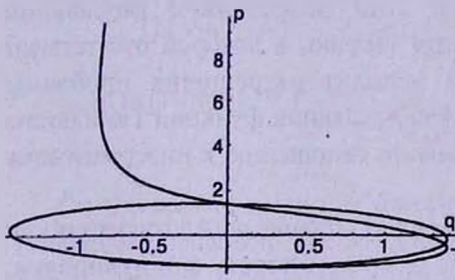

Рис.2.

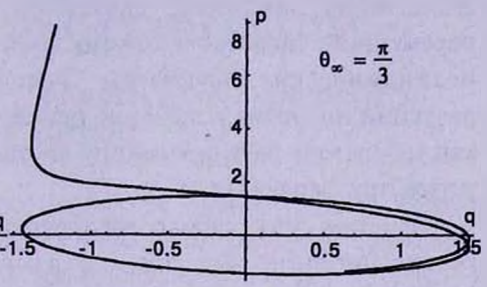

Рис.3.

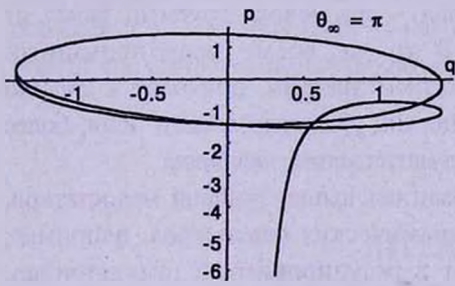

Рис.4.

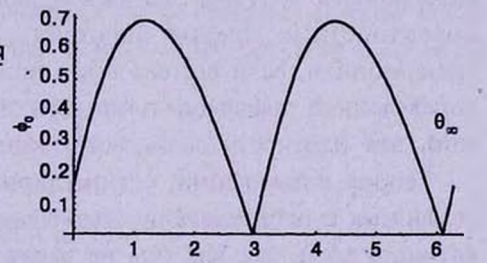

Рис.5.

Интересно, что такое качественное поведение не меняется в случае системы из многих осцилляторов (численно проверялось порядка 100 осцилляторов). Различные поправки, следующие из учета членов более высокого порядка по гравитационному полю, также не меняют качественного поведения в целом.

Зависимость точки рождения Вселенной от фазы гравитационных волн на "бесконечности" может иметь интересные физические следствия. Предположим, что Вселенная родилась с размером, большим планковского, тогда плотность энергии будет меньше планковской 10^{27}-10^{28} эВ (предположим на несколько порядков), квантовые поправки станут несущественными для гравитационного поля (в силу малости гравитационной постоянной) и

гравитационное поле будет хорошо описываться классическими уравнениями, а это, в свою очередь, приведет к жесткой фазовой корреляции в реликтовом гравитационном излучении. Эта фазовая корреляция в некоторой степени передается в "наследство" электромагнитному реликтовому излучению, поскольку фотоны распространяются в поле реликтовых гравитонов. Возможно, такой механизм объясняет наличие угловых шумовых корреляций в реликтовом радиоизлучении. Если это так, то по информации о свойствах таких корреляций, в принципе, можно было бы восстановить свойства реликтового гравитационного излучения, а значит ответить на вопрос, каковы были размеры и изначальная геометрия при рождении Вселенной.

5. *Заключение*. Глобальное расслоение 4-многообразия на семейство пространственно-подобных гиперповерхностей и выделение из уравнений Эйнштейна динамики, связанной с этим расслоением глобальной переменной, позволило сформулировать теорию, в которой отсутствуют нединамические параметры. Такой вариант разрешения проблемы редукции приводит к наличию ненулевой локальной функции Гамильтона как генератору редуцированной системы по отношению к инвариантному параметру эволюции ϕ.

Отметим, что широко распространенное мнение о нелокализуемости гравитационной энергии, на языке гамильтоновой формулировки, апеллирует к тому факту, что гамильтониан, сопряженный неинвариантному времени t, равен нулю на уравнениях движения, и единственная возможность получить ненулевой вклад - это нелокализуемый вклад от поверхностных членов действия. В то же время редуцированный гамильтониан, если его связать с понятием энергии, приводит к хорошо определенной локальной плотности энергии гравитационного поля, более того, эта плотность оказывается кинематическим скаляром.

Теория возмущений, сформулированная выше, лишена недостатков, связанных с неопределенностью нединамических параметров, например, функции хода, так как она не входит в редуцированный гамильтониан. Функция хода, как локальный нединамический параметр, определяется через редуцированный гамильтониан на уравнениях движения.

Анализ линеаризованной теории показывает, что не существует волновых возбуждений гравитационного поля, которые дают отрицательный вклад в гамильтониан, а поскольку именно гамильтониан определяет спектр частиц в квантованной теории, то можно утверждать, что не существует частицеподобных гравитационных возбуждений, привносящих отрицательный вклад в энергию.

Динамический анализ редуцированного гамильтониана классической (не квантовой) теории в пределе малых значений ϕ приводит к еще одному интересному заключению: эффективным уравнением состояния

гравитационной материи является предельно жесткое уравнение состояния $\varepsilon = p$.

Работа выполнена в рамках программы Боголюбов-Инфельд, а один из авторов (В.В.П.) работал при поддержке Армянского Национального Фонда науки и образования (ANSEF грант N PS14-00).

[1]Объединенный институт ядерных исследований, Россия
[2]Ереванский государственный университет, Армения

GRAVITATIONAL WAVES AND REPARAMETRIZATION-INVARIANT HAMILTONIAN FORMALIZM

A.BOROVEC[1], V.PAPOYAN[2], V.PERVUSHIN[1], M.RZYANIN[1], V.SMIRICHINSKI[1]

On the base of a recently developed method of reparametrization-invariant Hamiltonian reduction, a noncontradictory perturbation theory is formulated, and a linearized limit in the oscillator approximation of General Relativity is considered. Possible physical consequences of the interpretation of a nonzero local Hamiltonian as the energy of the gravitation field are discussed. The dependence of the distribution of the phases of relict gravitational waves in the present era on the initial conditions at the moment of the Big Bang is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R.Arnovit*, *S.Deser*, *C.W.Misner*, Phys. Rev., **117**, 1595, 1960.
2. *S.Deser*, Ann. Inst. H.Poincare, **7**, 149, 1969.
3. *M.Berger*, *D.J.Ebin*, Diff. Geom., **3**, 379, 1969.
4. *J.W.York*, Ann. Inst. H.Poincare, **21**, 319, 1974.
5. *J.W.J.York*, J. Math. Phys., **14**, 456, 1973.
6. *A.J.Lichnerovicz*, Math. Pure Appl., **23**, 37, 1944.
7. *J.W.York*, Phys. Rev. Lett., **26**, 1656, 1971.
8. *J.W.York*, Phys. Rev. Lett., **28**, 1982, 1972.
9. *N.O.Murchanda*, *J.W.York*, Phys. Rev. D., **10**, 428, 1974.
10. *T.Regge*, *C.Teitelboim*, Ann. Phys. (NY), **88**, 286, 1974.
11. *V.N.Pervushin et al.*, Phys. Lett., **B365**, 35, 1996.
12. *K.Kuchar*, J. Math. Phys., **11**, 3322, 1970.

13. *А.Л.Зельманов*, Докл. АН СССР, **227**, 78, 1976.
14. *Ю.С.Владимиров*, Системы отсчета в теории гравитации, Энергоиздат, 1982.
15. *V.N.Pervushin*, *V.I.Smirichinski*, Phys. Atom. Nuclei, **61**, 133, 1998.
16. *L.N.Gyngazov*, *M.Pawtowski*, *V.N.Pervushin*, *V.I.Smirichinski*, General Relativ. Gravitation, **30**, 1749, 1998.
17. *V.N.Pervushin*, *V.I.Smirichinski*, Phys. Atom. Nuclei, **61**, 2180, 1998.
18. *V.N.Pervushin*, *V.I.Smirichinski*, J. Phys. A: Mathem. and General, **32**, 6191, 1999.
19. *Л.Д.Ландау*, *Е.М.Лифшиц*, Теория поля, Наука М., 1989.
20. *В.Б.Берестецкий*, *Е.М.Лифшиц*, *Л.П.Питаевский*, Квантовая электродинамика, Наука, М., 1989.
21. *Н.Н.Боголюбов*, *Д.В.Ширков*, Квантовые поля, Наука, М., 1980.
22. *R.C.Tolman*, Relativ. Thermodynamics and Gravitation, Calderon Press, Oxford, 1989.
23. *R.C.Tolman*, Phys. Rev., **35**, 875, 1930.
24. *А.Боровец*, *В.И.Смиричинский*, Ядерная физика, **64**, 405, 2001.