АСТРОФИЗИКА

ТОМ 45 ФЕВРАЛЬ, 2002 ВЫПУСК 1

УДК: 52-857

ЭЛЛИПСОИДЫ РИМАНА СО СФЕРИЧЕСКИМ ГАЛО

М.Г.АБРАМЯН

Поступила 7 сентября 2001
Принята к печати 23 ноября 2001

Получены возможные эллипсоидальные фигуры равновесия вращающейся гравитирующей жидкой массы с внутренними течениями вещества постоянной завихренности, вложенной внутри гравитирующей однородной сферы. Обобщены классические эллипсоидальные фигуры равновесия и получены новые S-эллипсоиды и эллипсоиды с наклонным вращением. Исследован вопрос устойчивости вложенных S-эллипсоидов, получен критерий их устойчивости. Внутри относительно плотного гало существование эллипсоидов с наклонным вращением типа II становится невозможным.

1. *Введение.* В наиболее общем виде проблема эллипсоидальных фигур равновесия вращающейся гравитирующей массы была поставлена в работах Дирихле и Римана. Дальнейшее развитие и систематизация этой теории, включая бесстолкновительные гравитирующие системы, можно найти в монографиях [1-3].

С точки зрения астрофизических приложений более привлекательной представляется теория вложенных фигур равновесия, учитывающая составную структуру астрономических объектов [4-7]. Результаты, полученные в рамках этой теории, во многом способствуют пониманию динамики различных подсистем галактик [4,8-12]. Здесь принципиально новыми являются легкие вложенные фигуры равновесия, моделирующие формы распределения подсистем гравитирующей системы, самогравитацией которых можно пренебречь [4,6,10,13,14].

Настоящая работа посвящена решению задачи Дирихле для вращающейся однородной гравитирующей массы, с линейным полем скоростей внутренних течений, внутри гравитирующего сферического гало.

2. *Основные уравнения.* Пусть внутри гравитирующей сферы однородной плотности массы ρ_* вращается эллипсоидальная масса плотности ρ, главные оси которой неподвижны во вращающейся с угловой скоростью Ω системе отсчета, начало декартовых координат которой помещено в общем центре эллипсоида и сферы. Внутренние гравитационные потенциалы сферического гало и вложенного эллипсоида выражаются известными формулами[1]

$$V(\bar{x}) = -\pi G \rho A_i x_i x_i; \quad V^*(\bar{x}) = -\frac{2}{3}\pi G \rho_* A_i x_i x_i, \qquad (2.1)$$

[1] *Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам производится суммирование.*

где

$$A_i = a_1 a_2 a_3 \int\limits_0^{\infty} \frac{ds}{\left(a_i^2 + s\right)\Delta(s)}; \quad \Delta^2(s) = \prod_{l=1}^{3}\left(a_l^2 + s\right). \tag{2.2}$$

Во вращающейся системе отсчета эллипсоид имеет внутренние течения вещества с линейным полем скоростей

$$u_i = \varepsilon_{ijk} \nu_k \frac{a_i}{a_j} x_j, \quad (k, j, i = 1, 2, 3), \tag{2.3}$$

где ε_{ijk} - единичный тензор Леви-Чивиты, a_i - полуоси эллипсоида, ν_k - частота внутренней циркуляции вокруг оси x_k.

Относительное равновесие вложенного эллипсоида определяется уравнением

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} = -u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\vec{\Omega}\,\vec{x}\right]^2 + 2\varepsilon_{ilm} u_l \Omega_m + \frac{\partial\left(V + V^{*}\right)}{\partial x_i}, \tag{2.4}$$

где p - парциальное давление вещества эллипсоида.

В классической теории фигур гравитирующей массы с внутренними течениями вещества типа (2.3) равновесие требует (теорема Римана), чтобы или $\vec{\Omega}$ и $\vec{\nu}$ были параллельны и оба направлены вдоль одной из главных осей эллипсоида (S-эллипсоиды), или не параллельны, но лежали в одной из главных плоскостей эллипсоида (эллипсоиды типа I, II, III). Очевидно, теорема Римана справедлива для всех конфигураций с полем скоростей (2.3), как гравитирующих, так и легких подсистем в поле с квадратичным потенциалом [6,7].

Выбирая в качестве отличных от нуля компонентов $\vec{\Omega}$ и $\vec{\nu}$

$$\Omega_2, \Omega_3 \quad \text{и} \quad \nu_2 = \delta\Omega_2; \quad \nu_3 = \lambda\Omega_3, \tag{2.5}$$

где δ и λ произвольные постоянные, поле скоростей (2.3) примет вид

$$u_1 = -\lambda\Omega_3 \frac{a_1}{a_2} x_2 + \delta\Omega_2 \frac{a_1}{a_3} x_3, \; u_2 = \lambda\Omega_3 \frac{a_2}{a_1} x_1, \; u_3 = -\delta\Omega_2 \frac{a_3}{a_1} x_1, \tag{2.6}$$

а уравнение относительного равновесия (2.4) с учетом (2.1) и (2.6) представится в виде

$$\begin{aligned}\nabla\frac{p}{\rho} = -\nabla\Bigg\{&\left[2\left(A_1 + \frac{2}{3}\kappa\right) - \Omega_2^2\left(\delta^2 + 2\frac{a_3}{a_1}\delta + 1\right) - \Omega_3^2\left(\lambda^2 + 2\frac{a_3}{a_1}\lambda + 1\right)\right]\frac{x_1^2}{2} + \\ &+ \left[2\left(A_2 + \frac{2}{3}\kappa\right) - \Omega_3^2\left(\lambda^2 + 2\frac{a_1}{a_2}\lambda + 1\right)\right]\frac{x_2^2}{2} + \left[2\left(A_3 + \frac{2}{3}\kappa\right) - \Omega_2^2\left(\delta^2 + 2\frac{a_1}{a_3}\delta + 1\right)\right]\frac{x_3^2}{2}\Bigg\} - \\ &- \Omega_2\Omega_3\left[\hat{i}\left(1 + 2\frac{a_1}{a_3}\delta + \frac{a_2}{a_3}\lambda\delta\right)x_3 + \hat{k}\left(1 + 2\frac{a_1}{a_2}\lambda + \frac{a_3}{a_2}\lambda\delta\right)x_2\right],\end{aligned} \tag{2.7}$$

где Ω^2 измеряется в единицах $\pi G\rho$ и введено обозначение

$$\kappa = \rho_{*}/\rho. \tag{2.8}$$

Ввиду произвольности δ и λ потребуем обращения в нуль неградиентных членов в уравнении (2.7):

$$\delta\lambda + 2a_1/a_2\,\delta + a_3/a_2 = 0; \qquad \delta\lambda + 2a_1/a_3\,\lambda + a_2/a_3 = 0, \tag{2.9}$$

которые совпадают с соответствующими соотношениями одиночных эллипсоидов Римана [1,2]. При этом эллипсоидальные уровенные поверхности для парциального давления вложенной подсистемы получаются при условии

$$\frac{2p_c}{\rho} = a_1^2\left[2\left(A_1+\frac{2}{3}\kappa\right)-\Omega_2^2\left(\delta^2+2\frac{a_3}{a_1}\delta+1\right)-\Omega_3^2\left(\lambda^2+2\frac{a_3}{a_1}\lambda+1\right)\right]= \tag{2.10}$$

$$= a_2^2\left[2\left(A_2+\frac{2}{3}\kappa\right)-\Omega_3^2\left(\lambda^2+2\frac{a_1}{a_2}\lambda+1\right)\right]= a_3^2\left[2\left(A_3+\frac{2}{3}\kappa\right)-\Omega_2^2\left(\delta^2+2\frac{a_1}{a_3}\delta+1\right)\right],$$

где p_c - парциальное давление в центре эллипсоида.

Учитывая решения уравнений (2.9)

$$\delta = -\frac{1}{4a_1a_3}\left\{4a_1^2+a_3^2-a_2^2\pm\sqrt{\left[4a_1^2-(a_2+a_3)^2\right]\left[4a_1^2-(a_2-a_3)^2\right]}\right\}, \tag{2.11}$$

$$\lambda = -\frac{1}{4a_1a_2}\left\{4a_1^2+a_2^2-a_3^2\pm\sqrt{\left[4a_1^2-(a_2+a_3)^2\right]\left[4a_1^2-(a_2-a_3)^2\right]}\right\}, \tag{2.12}$$

(знакам ± соответствуют сопряженные эллипсоиды [1,2]) и решая уравнения (2.10) относительно компонентов угловой скорости и давления, получим

$$\Omega_2^2 = -\frac{4a_1a_3}{\delta}\,\frac{a_2^2-a_1^2}{a_2^2-a_3^2}\,\frac{\left(4a_1^2+a_2^2-a_3^2\right)B_{23}-a_2^2B_{12}+\left(4a_1^2-a_3^2\right)\frac{2}{3}\kappa}{a_1^2\left(4a_1^2-a_2^2-a_3^2\right)+a_2^2a_3^2}, \tag{2.13}$$

$$\Omega_3^2 = -\frac{4a_1a_2}{\lambda}\,\frac{a_1^2-a_3^2}{a_2^2-a_3^2}\,\frac{\left(4a_1^2+a_3^2-a_2^2\right)B_{23}-a_3^2B_{13}+\left(4a_1^2-a_2^2\right)\frac{2}{3}\kappa}{a_1^2\left(4a_1^2-a_2^2-a_3^2\right)+a_2^2a_3^2}, \tag{2.14}$$

$$\frac{p_c}{\rho a_1^2a_2^2a_3^2} = \frac{A_1+2B_{23}+\left(4a_1^2-a_2^2-a_3^2\right)A_{23}+2\kappa}{a_1^2\left(4a_1^2-a_2^2-a_3^2\right)+a_2^2a_3^2}, \tag{2.15}$$

где

$$A_{ik} = a_1a_2a_3\int_0^\infty\frac{ds}{\left(a_i^2+s\right)\left(a_k^2+s\right)\Delta(s)}; \qquad B_{ik} = a_1a_2a_3\int_0^\infty\frac{s\,ds}{\left(a_i^2+s\right)\left(a_k^2+s\right)\Delta(s)}. \tag{2.16}$$

Соотношения (2.11)-(2.15) определяют физические и геометрические свойства вложенных эллипсоидов Римана. В случае $\kappa=0$ уравнения (2.13)-(2.15) переходят в уравнения для одиночных эллипсоидов Римана [2], а в случае $\kappa \gg 1$ - в уравнения для легких вложенных эллипсоидов [13].

Возможными являются лишь те эллипсоиды, которым соответствуют действительные значения δ, λ, Ω_2, Ω_3 и неотрицательные p_c.

Теперь отдельно рассмотрим случаи, различаемые теоремой Римана.

3. *Вложенные S-эллипсоиды*. Эти эллипсоиды вращаются вокруг одной из главных осей. Пусть

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0; \quad \Omega_3 \equiv \Omega; \quad \nu_3 \equiv \lambda\Omega. \tag{3.1}$$

Вещество внутри *S*-эллипсоида циркулирует по эллиптическим линиям тока, подобным и концентрическим граничному эллипсу в плоскости вращения. Притом вещество циркулирует в сторону вращения, если $\lambda > 0$ и в обратную сторону - если $\lambda < 0$.

Уравнения (2.10) в случае (3.1) дают

$$\Omega^2\left(1+\lambda^2\right) = 2B_{12} + 4\kappa/3 \equiv \Omega^2 + \nu^2 \quad , \tag{3.2}$$

$$a_{21}\lambda\Omega^2 = a_2^2 A_{12} - a_{31}^2\left(A_3 + 2\kappa/3\right) \equiv a_{21}\Omega\nu, \tag{3.3}$$

где введено обозначение

$$a_{ij} = a_i/a_j . \tag{3.4}$$

Разрешая систему уравнений (3.2), (3.3) относительно λ, получим уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda\frac{a_{21}\left(B_{12} + \frac{2}{3}\kappa\right)}{\left(1-a_{31}^2\right)B_{13} - B_{12} - \frac{2}{3}\kappa a_{31}^2} + 1 = 0. \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) инвариантно относительно замены λ на $1/\lambda$. Это соответствует теореме Дедекинда о сопряженных конфигурациях [1,2]: если эллипсоид с данными значениями ν и Ω является фигурой равновесия, то эллипсоид с $\nu^+ = \Omega$ и $\Omega^+ = \nu$, называемый сопряженным, также является фигурой равновесия. В частности, таковыми являются эллипсоиды Якоби $(\nu = 0, \Omega)$ и Дедекинда $(\nu^+ = \Omega,\ \Omega^+ = 0)$ - $\lambda = 0, \lambda^+ = \infty$; безмоментные и безвихревые эллипсоиды $-\lambda = -2a_{21}/\left(1 + a_{21}^2\right), \lambda^+ = 1/\lambda$.

Эллипсоиды с $\lambda = \pm 1$ называются самосопряженными.

Возможная геометрия вложенных S-эллипсоидов в плоскости $(a_{21},\ a_{31})$ определяется условием действительности λ:

$$a_{21}\left(B_1 + 2\kappa/3\right) \geq \left|\left(1-a_{31}^2\right)B_{13} - B_{12} - 2\kappa a_{31}^2/3\right|. \tag{3.6}$$

Изучение конкретных свойств вложенных эллипсоидов начнем со сфероидов Маклорена ($a_{21} = 1,\ \lambda = 0$), которые описываются двумя уравнениями (см. (2.10)):

$$2A_1 + \frac{4}{3}\kappa - \Omega_{Mc}^2 = \left(2A_3 + \frac{4}{3}\kappa\right)a_{31}^2 = \frac{2p_c}{\rho a_1^2}. \tag{3.7}$$

Из этих уравнений, с учетом выражений A_1 и A_3 из [1], получаем

$$\Omega_{Mc}^2 = \frac{2a_{31}}{1-a_{31}^2}\left[\frac{1+2a_{31}^2}{\sqrt{1-a_{31}^2}}\arcsin\sqrt{1-a_{31}^2} - 3a_{31}\right] + \frac{4}{3}\kappa\left(1-a_{31}^2\right), \tag{3.8}$$

$$\frac{p_c}{\tilde{p}_c} = \frac{a_{31}^{4/3}}{1+\kappa}\left[\frac{3}{1-a_{31}^2}\left(1 - \frac{a_{31}}{\sqrt{1-a_{31}^2}}\arcsin\sqrt{1-a_{31}^2}\right) + \kappa\right], \tag{3.9}$$

а для углового момента вращения -

$$\frac{L_{Mc}}{\sqrt{GM^3\tilde{R}}} = \frac{\sqrt{3}}{5}\frac{\Omega_{Mc}}{a_{31}^{2/3}}, \tag{3.10}$$

где M - масса вложенного сфероида; $\tilde{p}_c, \tilde{R}$ - центральное парциальное давление и радиус равновеликой со сфероидом сферы, соответственно.

На графиках рис.1a,b представлены зависимости (3.8) и (3.10) соответственно для значений относительной плотности гало $\kappa = 0$; 0,2 и 0,5. Центральное же давление модели (3.9) равно нулю при $a_{31} = 0$ (диск)

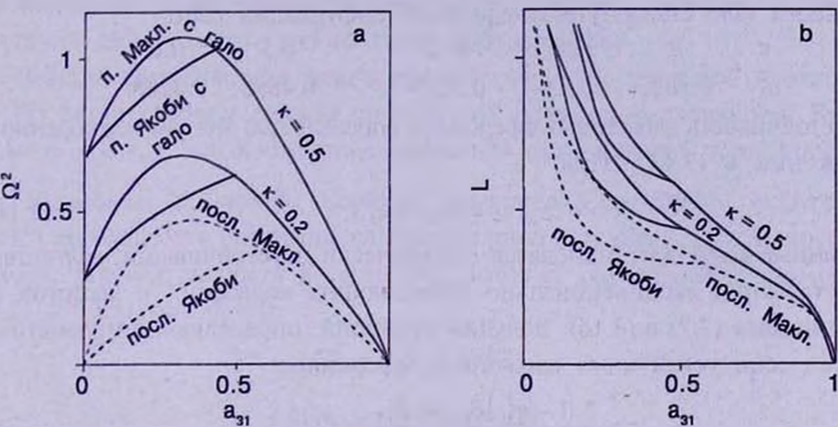

Рис.1. Зависимости квадрата угловой скорости (*a*) и углового момента вращения (*b*) вложенных эллипсоидов Маклорена и Якоби от меры сплюснутости a_{31}, при значениях относительной плотности сферического гало: $\kappa = 0$; 0.2 и 0.5.

и монотонно возрастая обращается в единицу при $a_{31} = 1$ (сфера), при этом зависимость от относительной плотности гало незначительна.

Малые колебания вложенных сфероидов исследованы нами в [15] и для различных форм колебаний получены следующие частоты:

поперечно-скошенные (прецессионные) колебания -

$$\omega_1 = \Omega_{Mc}; \quad \omega_{2,3} = \Omega_{Mc} \pm \sqrt{16\, B_{13} + \Omega_{Mc}^2 + \frac{32}{3}\kappa}\,; \tag{3.11}$$

пульсационные колебания -

$$\omega^2 \left(1/2 + a_{31}^2\right) = 4\, B_{11} + 2\, a_{31}^2 \left(3\, B_{33} - 4\, B_{13}\right) + 8\,\kappa/3; \tag{3.12}$$

тороидальные колебания -

$$\omega_{1,2} = \Omega_{Mc} \pm \sqrt{4\, B_{11} - \Omega_{Mc}^2 + \frac{8}{3}\kappa}\,. \tag{3.13}$$

Очевидно, относительно поперечно-скошенных и пульсационных форм колебаний неустойчивость не возникает. Что касается тороидальных-барообразующих колебаний (3.13), превращающих сфероид в трехосный эллипсоид, то в этом случае может возникнуть неустойчивость.

Заметим, что сфероид, вращающийся с угловой скоростью

$$\Omega_{Mc}^2 = 2\, B_{11} + 4\,\kappa/3, \tag{3.14}$$

является нейтрально устойчивым и может быть переведен в трехосный эллипсоид. Этот сфероид является бифуркационным, и при наличии диссипации происходит переход к трехосным вложенным эллипсоидам Якоби

[15]. Очевидно, при отсутствии гало (3.14) дает классический маклореновский сфероид бифуркации: $\Omega^2_{Mc} = 2\,B_{11} = 0.3742$, при $a^\delta_{31} = 0.5827$.

Геометрия вложенных сфероидов бифуркации определяется уравнением

$$B_{11} - \left(1 - a^2_{31}\right)B_{13} + 2\,\kappa\, a^2_{31}/3 = 0, \tag{3.15}$$

которое получается из (3.14) с учетом (3.7). С увеличением относительной плотности гало сплюснутость сфероида бифуркации растет:

κ	0	0.075	0.15	0.3	0.6
a^δ_{31}	0.5827	0.5541	0.5229	0.4888	0.4288.

Устойчивость вложенных сфероидов определяется знаком подкоренного выражения в (3.13). При

$$\Omega^2_{Mc} \geq 4\,B_{11} + 4\,\kappa/3, \tag{3.16}$$

вложенные сфероиды становятся динамически неустойчивыми, вследствие существования экспоненциально нарастающих колебаний с частотой Ω.

Учитывая (3.7) в (3.16), получим критерий, определяющий геометрию динамически устойчивых вложенных сфероидов:

$$\kappa \geq \frac{3}{2}\frac{\left(1 - a^2_{31}\right)B_{13} - 2\,B_{11}}{1 + a^2_{31}} \equiv F\left(a_{31}\right). \tag{3.17}$$

Зависимость правой части (3.17) от a_{31} графически представлена на рис.2. Эта функция положительна в области $0 \leq a_{31} \leq 0.033$ и имеет максимум, равный $F_{max} = 0.06918$ при $a_{31} = 0.1307$. Поэтому одиночный маклореновский сфероид неустойчив при $a_{31} \leq 0.033$. Наличие сферического гало стабилизирует вложенный сфероид. При этом, существует критическая относительная плотность сферического гало

$$\kappa_{кр} = 0.06918 \tag{3.18}$$

такая, что при $\kappa < \kappa_{кр}$ динамически устойчивыми являются две ветви

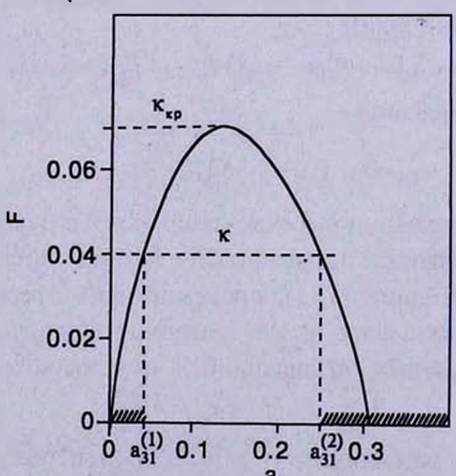

Рис.2. Положительная ветвь функции (3.17). Внутри сферического гало с $\kappa < \kappa_{кр} = 0.06918$ устойчивые области на оси a_{31} сильно и слабо сплюснутых сфероидов заштрихованы.

вложенных сфероидов (см. рис.2):

- ветвь слабо сплюснутых сфероидов с $a_{31} \geq a_{31}^{(2)}$;
- ветвь сильно сплюснутых сфероидов с $0 \leq a_{31} \leq a_{31}^{(1)}$.

Если ветвь слабо сплюснутых сфероидов является расширением области динамически устойчивых сфероидов Маклорена в сторону больших сжатий, то появление ветви сильно сплюснутых сфероидов, имеющее место при наличии даже самого слабого гало, явление новое.

Внутри сферического гало с критической относительной плотностью (3.18) ветви слабо и сильно сплюснутых сфероидов сливаются. Внутри гало с $\kappa \geq \kappa_{кр}$ все вложенные сфероиды динамически устойчивы.

Вложенные эллипсоиды Якоби и Дедекинда. Сфероидами бифуркации (3.15) порождаются последовательности вложенных трехосных эллипсоидов Якоби, угловая скорость и геометрия которых определяются формулами (3.2) и (3.3) при $\lambda = 0$:

$$\Omega_{Я}^2 = 2B_{12} + 4\kappa/3; \tag{3.19}$$

$$a_2^2 A_{12} = a_{31}^2(A_3 + 2\kappa/3). \tag{3.20}$$

На графиках рис.1a,b представлены зависимости Ω^2 и углового момента вращения от a_{31}, откуда видно, что при данном значении a_{31}, независимо от значения относительной плотности гало, всегда $\Omega_{Я} < \Omega_{Mc}$, $L_{Я} < L_{Mc}$.

На плоскости $(a_{31},\ a_{21})$ последовательности вложенных эллипсоидов Якоби $(\lambda = 0)$, описываемые уравнением (3.20), разделяют области вложенных эллипсоидов Римана с $\lambda < 0$ от эллипсоидов с $\lambda > 0$. На графике рис.3 представлены последовательности эллипсоидов Якоби $(\kappa = 0)$ и вложенных эллипсоидов Якоби внутри сферического гало с $\kappa = 0.5$. Очевидно - сферическое гало сплющивает эллипсоиды Якоби вдоль оси вращения. При больших относительных плотностях гало, когда самогравитацией вложенной массы можно пренебречь, последовательность вложенных эллипсоидов Якоби исчезает и возможными становятся лишь эллипсоиды с отрицательной внутренней циркуляцией вещества [13].

Если в (3.2) и (3.3) положить $\Omega = 0$; $\nu \neq 0$ $(\lambda = \infty)$, то получим эллипсоиды Дедекинда, геометрия которых определяется опять уравнением (3.20), однако в инерциальной системе отсчета они покоятся и сохраняют равновесие за счет гравитации и внутренних течений.

Вдоль последовательности вложенных эллипсоидов Дедекинда как завихренность, так и угловой момент растут, однако последнее меньше, чем у конгруэнтных эллипсоидов Якоби. Явление, имеющее место и для соответствующих одиночных фигур [2].

Последовательности самосопряженных вложенных эллипсоидов Римана $\lambda = \pm 1$. Геометрия этих последовательностей определяется условием (3.6) со знаком равенства:

$$\left(1-a_{31}^2\right)B_{13}-\left(1-a_{21}\right)B_{12}+\frac{2}{3}\kappa\left(a_{21}-a_{31}^2\right)=0 \quad \text{для} \quad \lambda=-1, \tag{3.21}$$

$$\left(1-a_{31}^2\right)B_{13}-\left(1+a_{21}\right)B_{12}-\frac{2}{3}\kappa\left(a_{21}+a_{31}^2\right)=0 \quad \text{для} \quad \lambda=+1. \tag{3.22}$$

Самосопряженные эллипсоиды с обратной циркуляцией вещества ($\lambda=-1$) начинаются от сферической фигуры и кончаются иглообразной,' в плоскости вращения, фигурой. Промежуточные фигуры характеризуются вытянутостью вдоль оси вращения ($a_3>a_2$) и в плоскости вращения ($a_1>a_3>a_2$), т.е. вращаются вокруг средней оси. Внутри сферического гало эти эллипсоиды порождаются опять от сферы, но все остальные члены этой последовательности являются более вытянутыми вдоль оси вращения, чем соответствующие одиночные фигуры. Причем, чем больше относительная плотность гало, тем сильнее вытянута фигура. В пределе очень плотного сферического гало, когда вложенная масса является "легкой", эта последовательность определяется кривой

$$a_{31}=\sqrt{a_{21}}\,. \tag{3.23}$$

На графике рис.3 изображены три последовательности самосопряженных эллипсоидов с $\lambda=-1$, соответствующие значениям $\kappa=0;\,0.5$ и ∞.

Более важным и интересным представляется эффект гало на последовательности самосопряженных эллипсоидов с $\lambda=+1$. Последовательность одиночных самосопряженных эллипсоидов начинается от граничного динамически устойчивого сфероида Маклорена с $a_{31}=0.3033$ и заканчивается иглообразной, в плоскости вращения, фигурой (см.

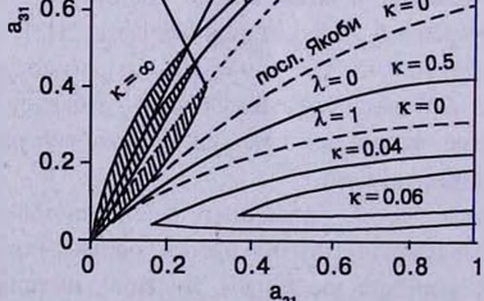

Рис.3. Геометрия возможных S-эллипсоидов внутри сферического гало. Верхние три кривые представляют последовательности самосопряженных эллипсоидов с $\lambda=-1$, при $\kappa=0$ (пунктирная линия), $\kappa=0.5$ и $\kappa=\infty$ (жирная линия). Заштрихованные области представляют неустойчивые эллипсоиды. Следующие две линии изображают последовательности Якоби (Дедекинда) при значениях $\kappa=0$ (пунктирная линия) и $\kappa=0.5$. Оставшиеся линии описывают последовательности самосопряженных эллипсоидов $\lambda=+1$ при $\kappa=0$ (пунктирная линия) $\kappa=0.04$ и $\kappa=0.06$.

пунктирная линия $\lambda = 1; \kappa = 0$ на рис.3). Наличие даже самого слабого гало расщепляет эту последовательность на слабо и сильно сплюснутые по оси вращения эллипсоиды. Если плотность сферического гало меньше критического значения (3.18), то последовательность самосопряженных вложенных эллипсоидов $\lambda = 1$ начинается от граничного слабо сплюснутого сфероида и заканчивается соответствующим сильно сплюснутым сфероидом. Заметим, что условие (3.22) для сфероидальных фигур ($a_{21} = 1$) переходит в критерий (3.17) для гранично устойчивых вложенных сфероидов. По мере увеличения относительной плотности гало запрещенная зона для эллипсоидов с $\lambda > 0$ на плоскости (a_{31}, a_{21}) сужается и внутри гало с критической относительной плотностью (3.18) исчезает, а последовательность $\lambda = 1$ вырождается в точку - во вложенный самосопряженный сфероид с $a_{31} = 0.1307$. Внутри сферического гало с $\kappa \geq \kappa_{kp}$ все эллипсоиды с положительной циркуляцией вещества являются фигурами равновесия.

На графике рис.3 две нижние кривые представляют самосопряженные последовательности вложенных эллипсоидов внутри сферического гало с $\kappa = 0.04$ и $\kappa = 0.06$.

В теории эллипсоидальных фигур равновесия показано, что все последовательности S-эллипсоидов ответвляются от динамически устойчивых сфероидов Маклорена [1,2]. Это утверждение имеет место и для вложенных эллипсоидов. Причем, стабилизируя сфероидальные фигуры, гало тем самым расширяет область существования S - эллипсоидов в плоскости (a_{31}, a_{21}) (см. рис.3).

4. *Эллипсоиды с наклонным вращением*. Перейдем к исследованию условий существования вложенных эллипсоидов с наклонным вращением (2.10)-(2.15). Условия вещественности δ и λ, как видно из формул (2.11), (2.12), те же самые, что у одиночных фигур [1,2]. Поэтому, вложенные наклонно-вращающиеся эллипсоиды тоже разделяются на три типа (I-III), как это имеет место для одиночных фигур.

а) *Вложенные эллипсоиды типа I.* Как и одиночные аналоги, для этих эллипсоидов

$$a_{21} + a_{31} \leq 2; \quad a_2 \geq a_3. \tag{4.1}$$

Последнее неравенство есть следствие того, что все уравнения симметричны относительно индексов 2 и 3. Поэтому, не ограничивая общности, рассмотрим полуплоскость $a_2 \geq a_3$.

Эти эллипсоиды в плоскости (a_{31}, a_{21}) занимают область, ограниченную сфероидами, дисками вдоль оси a_{21} и последовательностью $a_{21} + a_{31} = 2$ (треугольник на рис.4). Последняя последовательность является самосопряженной, так как для этих эллипсоидов (как следует из (2.11) и (2.12)) $\lambda = \delta = -1$. На графике рис.4 указанные области отмечены римской цифрой I. Присутствие гало не изменяет эту область, но меняет физические характеристики эллипсоидов.

Аналогичными выкладками, приведенными в [1,2], можно показать, что эллипсоиды типа I ответвляются от вложенных сфероидов путем нейтрализации поперечно-скошенных (прецессионных) колебаний в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью исходного вложенного эллипсоида Маклорена.

б) *Вложенные эллипсоиды типа II.* Область их существования ограничена осью a_{21} и последовательностью эллипсоидов, определяемых уравнением

$$A_1 + 2B_{23} + \left(4a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right)A_{23} + 2\kappa = 0. \tag{4.2}$$

Из (2.15) видно, что эллипсоиды (4.2) характеризуются нулевым давлением. Для этих эллипсоидов

$$\delta > 0, \quad \lambda < 0; \quad a_{31} < 1, \quad a_{21} \geq 2. \tag{4.3}$$

Для дисков вдоль оси a_{21} ($a_{31} = 0$) получаем

$$a_{21} \geq \frac{2}{\sqrt{1-\kappa}}. \tag{4.4}$$

Присутствие гало оттесняет область существования эллипсоидов типа II, сужая ее вдоль оси a_{31} и удаляя вдоль a_{21} (кривая KK' при $\kappa = 0.5$ на рис.4). На графике рис.4 эти области отмечены римской цифрой II.

Из (4.4) видно, что внутри сферического гало с $\kappa \geq 1$ существование эллипсоидов типа II становится невозможным.

в) *Вложенные эллипсоиды типа III.* Область существования этих эллипсоидов ограничена неравенствами

$$a_{31} \leq a_{21} - 2; \quad \left(4 + a_{21}^2 - a_{31}^2\right)B_{23} - a_{21}^2 B_{12} + \left(4 - a_{31}^2\right)2\kappa/3 \leq 0. \tag{4.5}$$

Эта область на рис.4 отмечена цифрой III, где пунктирной линией TRR' ограничена область одиночных эллипсоидов.

Для этих эллипсоидов

$$\delta > 0, \quad \lambda < 0; \quad a_{31} > 1, \quad a_{21} > 3, \tag{4.6}$$

т.е. a_1 есть наименьшая из полуосей.

Последовательность, ограничивающая область эллипсоидов III снизу (при $\kappa = 0.5$ кривая QQ' на рис.4), определяется вторым соотношением (4.5) при знаке равенства. Из (2.13) следует, что при этом $\Omega_2 = \delta = 0$. Поэтому эллипсоиды этой граничной последовательности вращаются только вокруг оси a_3, и одновременно являются *S*-эллипсоидами.

Наличие сферического гало изменяет область эллипсоидов типа III снизу, поднимая кривую граничной последовательности RR' вверх. В пределе очень плотного гало, как следует из (4.5), эта кривая переходит в прямую $a_{31} = 2$. Эта область соответствует легким эллипсоидам типа III [13].

5. ***Устойчивость вложенных S-эллипсоидов***. Устойчивость по отношению ко вторым гармоникам колебаний может быть исследована на основе линеаризованной формы вириальных уравнений второго порядка [1]:

$$\omega^2 N_{i,j} - i2\omega Q_{jl}N_{i,l} - i2\omega\varepsilon_{il3}N_{l,j} + 2\Omega\varepsilon_{il3}\left(Q_{lk}N_{j,k} - Q_{jk}N_{l,k}\right) -$$
$$- Q_{jl}^2 N_{i,l} - Q_{il}^2 N_{j,l} = 4\kappa N_{ij}/3 - \delta W_{ij} - \Omega^2\left(N_{ij} - N_{3j}\delta_{ij}\right) - \delta U_{ij}\,, \qquad (5.1)$$

где возмущение характеризовано лагранжевым смещением частиц из равновесного положения:

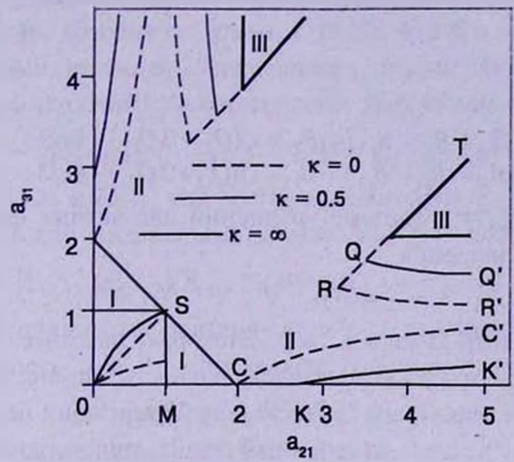

Рис.4. Области на плоскости (a_{21}, a_{31}), занятые вложенными в сферическое гало эллипсоидами Римана. Пунктирными линиями изображены области одиночных эллипсоидов ($\kappa = 0$). Внутри сферического гало возможные S-эллипсоиды заполняют область SOM. Независимо от наличия гало наклонно-вращающиеся эллипсоиды типа I занимают область MSC и симметричную относительно прямой $a_{21} = a_{31}$ область. Гало стабилизирует эти эллипсоиды. Область, заключенная под кривой CC' занимают одиночные эллипсоиды с наклонным вращением типа II. Гало вытесняет область этих эллипсоидов при плотностях гало $\kappa \geq 1$. Кривая KK' ограничивает область эллипсоидов типа II внутри гало с $\kappa = 0.5$. Области TRR', TQQ' заняты эллипсоидами с наклонным вращением типа III, при $\kappa = 0$ и $\kappa = 0.5$, соответственно. Жирными линиями отделена область легких эллипсоидов типа III. Кривые RR', QQ' и $a_{31} = 2$ изображают последовательности эллипсоидов, вращающихся вокруг оси x_1 при $\kappa = 0$; 0,5; ∞, соответственно и, фактически, являются S-эллипсоидами.

$$\bar{\xi}(\bar{x},t) = \bar{\xi}(\bar{x})e^{-i\omega t}, \qquad (5.2)$$

ω - подлежащая определению частота возмущений

$$N_{ij} = \int\rho\left(\xi_i x_j + \xi_j x_i\right)d\bar{x} \equiv N_{i,j} + N_{j,i}\,; \qquad (5.3)$$

$$Q_{ij} = -\lambda\Omega_3\varepsilon_{3ij}\,a_{ij}\,; \qquad (5.4)$$

δU - возмущение внутренней энергии эллипсоида,

$$\delta W_{ij} = -2\,B_{ij}N_{ij} + a_i\,\delta_{ij}\sum_{l=1}^{3}A_{il}N_{il} \qquad (5.5)$$

возмущение гравитационной энергии эллипсоида [1].

Уравнения (5.1) следует дополнить условием соленоидальности возмущений:

$$\frac{N_{11}}{a_1^2} + \frac{N_{22}}{a_2^2} + \frac{N_{33}}{a_3^2} = 0. \qquad (5.6)$$

Стандартную процедуру расчетов решения системы из десяти уравнений (5.1) и (5.6) с учетом (5.2)-(5.5) мы здесь приводить не будем. Сгруппировав эти уравнения в системы четных и нечетных относительно индекса 3 уравнений, получим соответствующие им характеристические уравнения.

Характеристическое уравнение для четных форм колебаний имеет вид

$$\begin{vmatrix} \omega^2/2 - 2B_{12} + \Omega Q_{21} - 3B_{11} + B_{13} & B_{23} - B_{12} + 3\Omega Q_{21} & \alpha \\ B_{13} - B_{12} - 3\Omega Q_{21} & \omega^2/2 - 2B_{12} - \Omega Q_{21} - 3B_{22} + B_{23} & \beta \\ 1 & a_{21}^{-2} & 1 + a_{21}^{-2} + a_{31}^{-2} \end{vmatrix} = 0, \tag{5.7}$$

где

$$\begin{aligned} \beta &= 3(B_{33} - B_{11} - B_{12}) + B_{23} + \Omega(Q_{21} + 3Q_{12}) - 4\kappa/3, \\ \alpha &= 3(B_{33} - B_{11} - B_{12}) + B_{13} + \Omega(Q_{12} + 3Q_{21}) - 4\kappa/3. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Важно отметить, что система уравнений для четных форм колебания для собственного решения

$$N_{11} = N_{22} = N_{33} = 0 \quad \text{и} \quad N_{12} \neq 0 \tag{5.9}$$

допускает тривиальный корень $\omega^2 = 0$. Этот факт находится в соответствии с тем, что, как уже отмечено, последовательность Римана ответвляется от последовательности Маклорена вследствие нейтрализации некоторой четной формы колебания. Кстати, отмеченный выше тривиальный корень (5.9) связан с тем же самым обстоятельством для вложенных эллипсоидальных фигур.

Уравнение (5.7) является биквадратным относительно ω, и его анализ показывает, что неустойчивость от четных форм колебания не возникает.

Исследование же нечетных форм колебания приводит к следующему характеристическому уравнению:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - 2(B_{13} + 2\kappa/3) + \Omega^2 & -2a_{31}^{2}(B_{13} + 2\kappa/3) & -i2\omega\Omega & 0 \\ -2(B_{13} + 2\kappa/3) & \omega^2 - 2(B_{13} + 2\kappa/3) - Q_{12}Q_{21} & 0 & -i2\omega Q_{12} \\ i2\omega\Omega & 0 & \omega^2 - 2(B_{23} + 2\kappa/3) + \Omega^2 & -2a_{32}^{2}(B_{23} + 2\kappa/3) \\ 0 & -i2\omega Q_{21} & -2(B_{23} + 2\kappa/3) & \omega^2 - 2B_{23} - 4\kappa/3 - Q_{12}Q_{21} \end{vmatrix} = 0 \tag{5.10}$$

Преобразуя этот определитель, можно показать, что это уравнение допускает корни

$$\omega^2 = \Omega^2; \quad \omega^2 = \lambda^2\Omega^2. \tag{5.11}$$

Опуская множитель $(\omega^2 - \Omega^2)(\omega^2 - \lambda^2\Omega^2)$, характеристическое уравнение (5.10) представится в виде биквадратного

$$\omega^4 - 2\omega^2(2B_{13} + 2B_{23} + B_{12} + 10\kappa/3) + (4B_{12} - \Omega Q_{12} + 8\kappa/3)(4B_{12} + \Omega Q_{21} + 8\kappa/3) = 0. \tag{5.12}$$

Из общего вида этого уравнения видно, что характеристические частоты колебаний сопряженных конфигураций, принадлежащие вторым гармоникам, одинаковы, так как (5.12) содержат Ω, Q_{12}, Q_{21} лишь в комбинациях $\Omega Q_{12}, \Omega Q_{21}$, которые одни и те же для сопряженных конфигураций. Более того, решения (5.11) также меняются местами при переходе к сопряженным конфигурациям. Так что, справедлива теорема Дедекинда [1] для вложенных в сферическое гало эллипсоидов.

Относительно нечетных форм колебания, как одиночные, так и вложенные эллипсоиды Римана могут оказаться неустойчивыми. Геометрическое место точек границы устойчивых вложенных конфигураций определяется условием обращения в нуль свободного члена в (5.12). Однако, для эллипсоидов с $a_1 \geq a_3$, каковыми являются S-эллипсоиды, вторая скобка положительна, поэтому граница устойчивости определяется уравнением

$$4\,B_{13} + a_1^2 A_{12} - a_{31}^2 A_3 + 2\kappa\left(4 - a_{32}^2\right)/3 = 0, \qquad (5.13)$$

где, пользуясь (3.3) и (5.4), мы преобразовали член ΩQ_{12}, или, используя соотношения между индексными символами [1], получим

$$\left(4\,a_{21}^2 - a_{31}^2 + 1\right)\left(B_{13} + 2\,\kappa/3\right) - \left(B_{12} + 2\,\kappa/3\right) = 0. \qquad (5.14)$$

Граница устойчивости, даваемая (5.14), пересекает самосопряженную последовательность $\lambda = -1$, определяемую уравнением (3.21). Это дает

$$4\,a_{21}\left(B_{13} + 2\,\kappa/3\right) = B_{12} + 2\,\kappa/3. \qquad (5.15)$$

Учитывая это соотношение в (5.14), получим

$$\left(2\,a_{21} - 1 - a_{31}\right)\left(2\,a_{21} - 1 + a_{31}\right) = 0. \qquad (5.16)$$

Следовательно, пересечение может иметь место, когда

$$a_{31} = 2\,a_{21} - 1 \quad \text{или} \quad a_{31} = 1 - 2\,a_{21}. \qquad (5.17)$$

В действительности, пересечение границы неустойчивости с последовательностью самосопряженных эллипсоидов $\lambda = -1$, независимо от значения относительной плотности гало κ, имеет место на прямой

$$a_{31} = 1 - 2\,a_{21}. \qquad (5.18)$$

На графиках рис.3 верхние три кривые представляют последовательности самосопряженных эллипсоидов, соответствующие значениям относительной плотности гало $\kappa = 0; 0.5$ и ∞. Нижние, пересекающиеся с ними кривые, представляют соответствующие границы неустойчивости, вычисленные с помощью (5.13). Области неустойчивых конфигураций заштрихованы. Заметим, что соответствующая граница неустойчивости вложенных "легких" эллипсоидов определяется прямой $a_{31} = 2a_{21}$, что следует из (5.13) при больших значениях κ: $a_{32} = 2$.

Следовательно, новые серии сильно сплюснутых трехосных эллипсоидов с положительной циркуляцией вещества, порожденные присутствием гало, являются устойчивыми образованиями. Неустойчивыми оказываются лишь сильно вытянутые вдоль оси вращения и сильно ассиметричные в плоскости вращения трехосные эллипсоиды с отрицательной внутренней циркуляцией вещества.

Предварительные оценки показывают, что наличие сферического гало стабилизирует и неустойчивые эллипсоиды с наклонным вращением типа I. Об устойчивости этих и других типов эллипсоидов с наклонным вращением - в последующих работах.

Ереванский государственный университет, Армения

RIEMANN ELLIPSOIDS WITH SPHERICAL HALO

M.G.ABRAHAMYAN

Possible ellipsoidal equilibrium figures of rotating gravitating liquid mass with internal circulations of matter of constant vorticity embedded into homogeneous gravitating sphere, are obtained. The classical ellipsoidal equilibrium figures are generalised and new S-ellipsoids and ellipsoids with oblique rotation are found. The stability problem of embedded S-ellipsoids is investigated and the criterion of their stability is established. The existence of oblique rotating ellipsoids of type II, within a relatively dense halo, becomes impossible.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С.Чандрасекар*, Эллипсоидальные фигуры равновесия. Мир, М., 1973, с.288.
2. *Б.П.Кондратьев*, Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. Наука, М., 1989, с.270.
3. *A.M.Fridman*, *V.L.Polyachenko*, Physics of gravitating Systems I, II. Springer-Verlag, New York, 1984, p.826.
4. *М.Г.Абрамян*, *С.А.Каплан*, Астрофизика, **10**, 565, 1974; **11**, 121, 1975.
5. *М.Г.Абрамян*, Ученые записки ЕГУ, 1(138), 62, 1978; 1(152), 44, 1983.
6. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **25**, 173, 1986.
7. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **25**, 357, 1986.
8. *М.Г.Абрамян*, Письма Астрон. ж., **5**, 67, 1979.
9. *М.Г.Абрамян*, *Д.М.Седракян*, Астрон. ж., **63**, 1083, 1986.
10. *J.E.Tohline*, *R.H.Durisen*, Astrophys. J., **257**, 94, 1982.
11. *R.H.Durisen*, Astrophys. J., **224**, 826, 1978.
12. *M.Miyamoto*, Publ. Astron. Soc. Jap., **19**, 242, 1967.
13. *М.Г.Абрамян*, *Х.К.Кокобелян*, Астрофизика, **38**, 55; 311, 1995.
14. *М.Г.Абрамян*, *Х.К.Кокобелян*, Письма в Астрон. ж., **22**, 782, 1996.
15. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **11**, 487, 1975.