

УДК: 524.77

ДОСТАТОЧНО ЛИ СТЕПЕННОГО ВИДА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ГАММА-ФУНКЦИИ ДЛЯ УТВЕРЖДЕНИЯ О НАЛИЧИИ У РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФРАКТАЛЬНЫХ СВОЙСТВ?

А. В. ТИХОНОВ

Поступила 18 июля 2001

Принята к печати 28 сентября 2001

Проведенное исследование указывает на неоднозначность в интерпретации результатов применения аппарата корреляционной Гамма-функции ($\Gamma(r)$ и $\Gamma^*(r)$) для анализа пространственного распределения объектов из некоторой выборки. Наличие линейного участка в зависимостях $\log(\Gamma)$ от $\log(r)$ и $\log(\Gamma^*)$ от $\log(r)$ оказывается недостаточно для утверждения о присутствии у распределения фрактальных свойств (самоподобия). Показана возможность влияния изменения геометрических границ выборки на вид зависимостей $\log(\Gamma)$ от $\log(r)$ и $\log(\Gamma^*)$ от $\log(r)$.

1. *Введение.* Скучивание вещества наблюдается на большом интервале масштабов. Описание вида и амплитуды скучивания вещества на масштабах скоплений и сверхскоплений галактик налагает ограничения на количество космологических теорий, так как каждая теория, исходя из принятой в ней картины эволюции, объясняет многообразие наблюдаемых структур.

Ни один математический аппарат, применяемый для анализа свойств структур, видимо, не приводит к однозначной интерпретации получаемых результатов. Как будет показано ниже, это относится и к корреляционной Гамма-функции, использование которой как метода анализа крупномасштабной структуры предложил Л. Пьетронеро [1,2].

Дифференциальная $\Gamma(r)$ и интегральная $\Gamma^*(r)$ Гамма-функции определяются следующими формулами:

$$\Gamma(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi r^2 \Delta} \int_r^{r+\Delta} n(r_1 - r) dr, \quad (1)$$

$$\Gamma^*(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{3}{4\pi r^3} \int_0^r n(r_1 - r) dr, \quad (2)$$

где $n(\hat{r}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\bar{N}} \delta(r_1 - \hat{r})$ - численная плотность, r - рабочий радиус, N - число центров сфер, участвующих в подсчетах, \bar{N} - количество объектов в выборке, Δ - толщина сферического слоя (в определении считается малой величиной).

При практической реализации толщина сферического слоя имеет конечное

значение ($\Delta = 1 + 3$ Мпк, в зависимости от выборки) и подсчет Гамма-функции для внегалактических объектов происходит следующим образом:

1. Обозначаются границы области наибольшей полноты (обычно исключаются зона неполноты по радиальной координате и область сильного межзвездного поглощения).

2. Вычисляется плотность объектов, попадающих в сферический слой $r_0 < r < r_0 + \Delta$ вокруг каждого объекта, то есть плотность на данном расстоянии от объекта выборки для дифференциальной Гамма, и плотность в сферах радиуса r с центрами в объектах выборки для интегральной Гамма (центры сфер не включаются в подсчеты, то есть измеряется плотность "соседей").

3. Подсчеты усредняются. Если часть какой-либо сферы при увеличении рабочего радиуса r выходит за границы выборки, то эта сфера исключается из подсчетов. Таким образом, с увеличением рабочего радиуса в подсчетах участвуют только сферы с центрами, все более и более приближающимися к центру объема, содержащего выборку. Подсчеты прекращаются при количестве оставшихся сфер $N_s < 10$.

Масштаб использования Гамма ограничен радиусом R_s максимальной сферы с центром в объекте выборки, вписывающейся в геометрические границы выборки.

Способ подсчета, реализуемый в данной работе, отличается от варианта, используемого Л.Пьетронеро с сотрудниками лишь в несущественных деталях (шаг увеличения рабочего радиуса, количество предельных сфер, при котором прекращаются подсчеты и др.).

Результат представляется в логарифмическом масштабе в виде зависимостей $\log(\Gamma)$ от $\log(r)$ и $\log(\Gamma')$ от $\log(r)$. Угловым коэффициентом $-\gamma$ аппроксимирующей прямой, которая строится по выбранному участку изменения $\log(r)$, определяет корреляционную размерность распределения (ко-размерность) $D = 3 - \gamma$ ($\gamma \geq 0$).

В общем случае больший наклон (большее значение γ , соответствующее меньшей размерности) означает более сильное среднее падение плотности и, следовательно, большую скученность объектов. Горизонтальные участки графика указывают на равномерность распределения объектов в выборке на соответствующих масштабах ($D = 3$).

Первые работы с использованием такого метода анализа показали линейное падение $\log(\Gamma)$ и $\log(\Gamma')$ с $\log(r)$ на всех рассматриваемых масштабах [3-5]. Это падение рассматривалось как указание на степенное падение средней плотности объектов (галактик, скоплений) с увеличением объема - поведение, свойственное фрактальным структурам, которые определил Мандельброт [6,7]. Наклон логарифмической зависимости (в дальнейшем наклон Гамма) $\gamma \approx 1$, интерпретируемый как степенной закон падения плотности с расстоянием в среднем от каждого объекта выборки, дал повод сделать предположение о том, что до границ построенных выборок

присутствует фрактальная структура с единым законом степенного падения плотности (ранее такое предположение высказывалось на основании подсчетов галактик до некоторой звездной величины [8]). Были построены космологические модели, учитывающие фрактальность как существенный компонент картины Вселенной [9].

В литературе уже есть указания на необходимость значительной протяженности участка степенного падения плотности с расстоянием (около 3 порядков по масштабу) для заключения о фрактальности некоторого распределения [10].

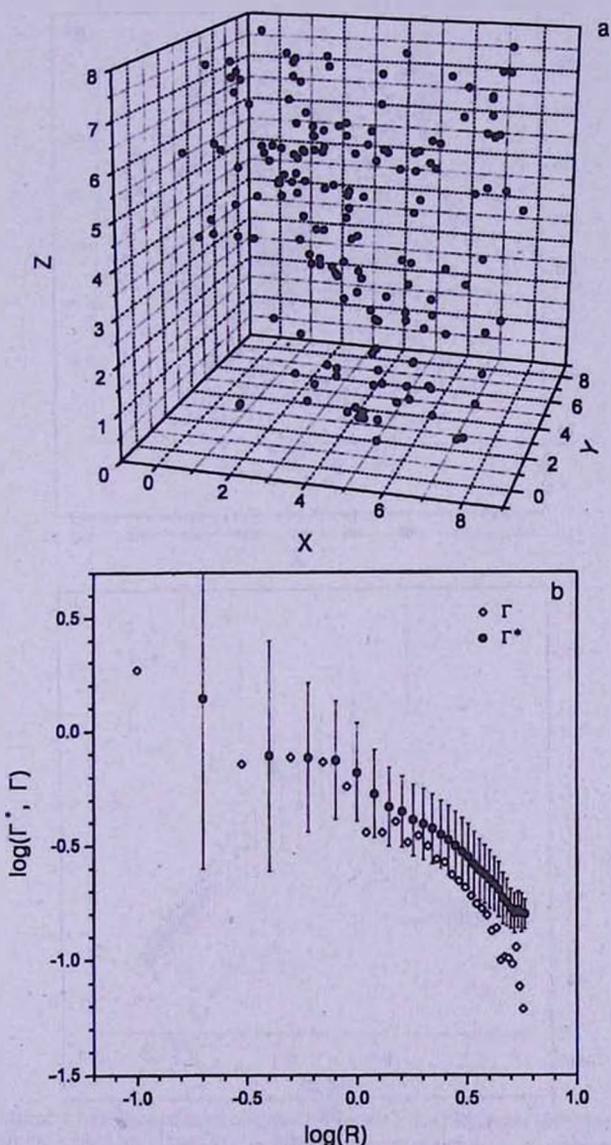


Рис.1. Результаты, полученные с помощью процедуры β -каскада. а) - Фрактальное распределение, построенное в кубе; б) - Гамма-функция.

В данной работе выясняется, всегда ли наклон Гамма означает наличие фрактальных свойств распределения материи. Исследование проводилось посредством анализа искусственных распределений с заданными свойствами.

2. *Результаты.* Для того, чтобы получить фрактальное распределение, было выбрано построение, известное в литературе как β -каскад и используемое для описания турбулентности [11]. В общем случае процедура формирования структуры β -каскада состоит в итеративном делении начального куба на кубические части, с объемом меньшим в 2^n раз на n -й итерации и случайным

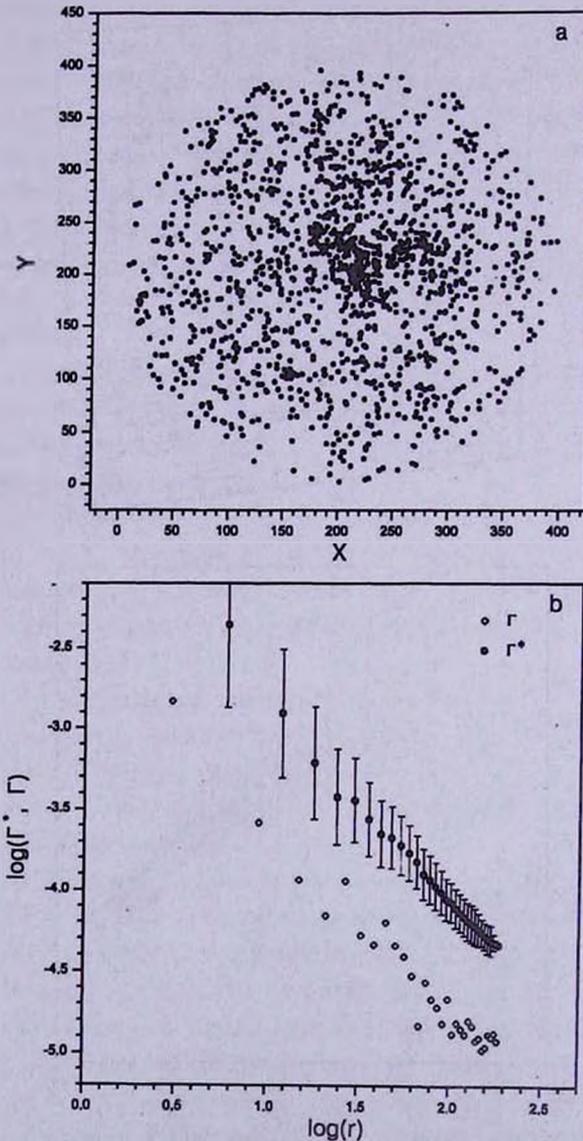


Рис.2. Данные для однородного распределения в сфере с кластером в центре, $N = 1500$, $R_s = 198$. а) - проекция распределения на плоскость XY ; б) - Гамма-функция.

заполнением точками только некоторой доли кубов данной итерации. В получившемся распределении (в котором по построению присутствуют пустоты всех масштабов) видны скученность и пустые области - атрибуты фрактала, определенного как образование, в котором структурные особенности статистически повторяются при изменении масштаба рассмотрения (рис.1а). Рис.1б демонстрирует соответствующее степенное падение плотности.

Выяснилось, что подобный наклон можно получить, применяя метод Гамма-функции к достаточно произвольному распределению, например,

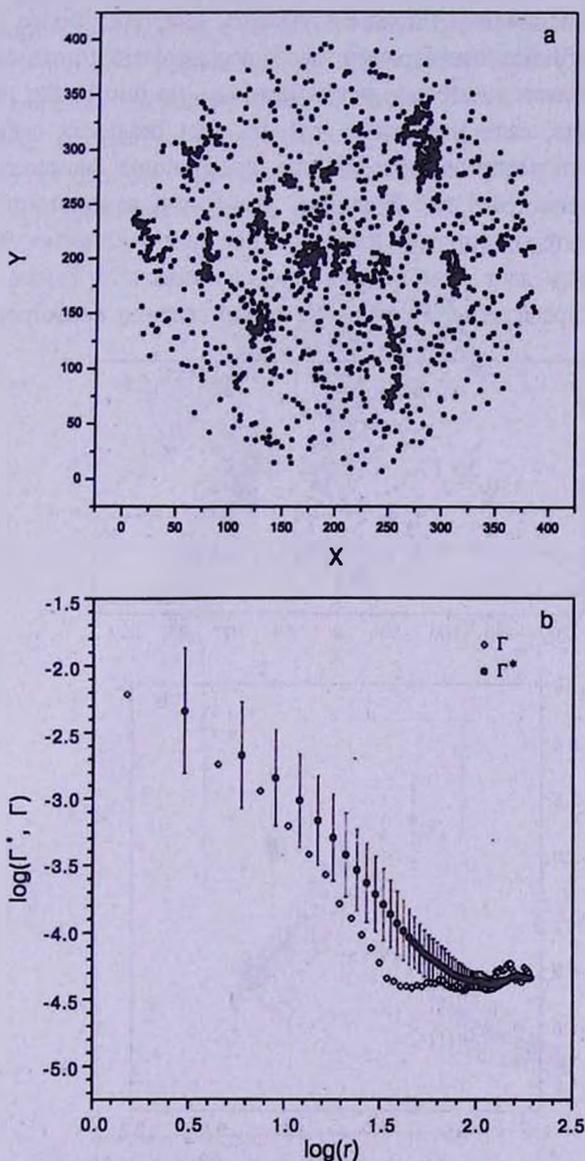


Рис.3. Результаты для распределения, построенного посредством наложения кластеров на однородный фон, $N=1500$, $R_s=198$. а) - проекция распределения на плоскость XY ; б) - Гамма-функция выходит на плато.

используя алгоритм, при котором часть точек помещалась в сферу, равномерно заполняя объем, а другая часть помещалась в соответствии с алгоритмом случайного блуждания. Начало второго процесса происходит из центра. Каждый следующий шаг делается в соответствии с правилом: направление выбирается случайно, длина шага $l = l_{min} + (l_{max} - l_{min})Q$, где Q - случайное число из интервала $[0,1]$, l_{max} меньше размера сферы, в которую помещаются точки. Второй процесс можно прерывать в некотором месте и начинать снова из случайной точки - таким образом можно получить несколько кластеров на однородном фоне. Варьируя параметры, можно создавать кластеры более или менее разреженные и протяженные. Пример такого распределения показан на рис.2а. Это построение является довольно искусственным, но оно может имитировать реальную ситуацию, если учитывать, что границы реальных выборок могут вырезать из общего распределения области, содержащие, например, в центре выделенную структуру. Из рис.2б видно, что Гамма демонстрирует наклон, который можно интерпретировать как степенное падение плотности. На самом деле такой эффект дает комбинация способа подсчета Гамма и свойств построенного распределения. Полученное распределение не изотропно, у него

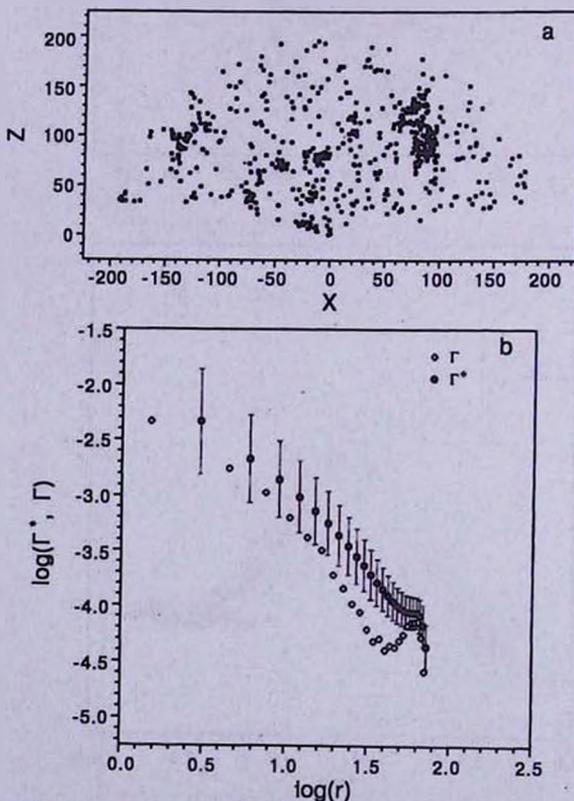


Рис.4. Имитация построения реальной выборки из распределения, показанного на рис.3, $b > 10^4$, $N = 621$, $R_1 = 97$. а) - выделенный из сферического распределения конус; б) - Гамма-функция (плато не наблюдается).

есть выделенный центр, но при построении реальной выборки подобная ситуация возможна, если, например, выбрать объекты в конусе, содержащем скопление галактик Virgo.

Таким образом, наклон Гамма в ограниченном диапазоне - необходимое, но не достаточное условие фрактальности исследуемого распределения. Тем не менее, аппарат Гамма-функция является довольно чувствительным к смене типа распределения и хорошо фиксирует масштаб смены типа распределения.

Рис.3 и рис.4 показывают, как может измениться вид Гамма-функции при вырезании части (конуса с вершиной в центре сферы) из распределения, помещенного в сферу. Распределение представляет собой набор кластеров, случайным образом расположенных в сфере. Часть точек (примерно 2/3 общего числа), в кластеры не входящая, распределена в сфере равномерно. В таком распределении сгущивание должно наблюдаться до некоторого масштаба, определяемого средним размером кластеров (наклон графика на

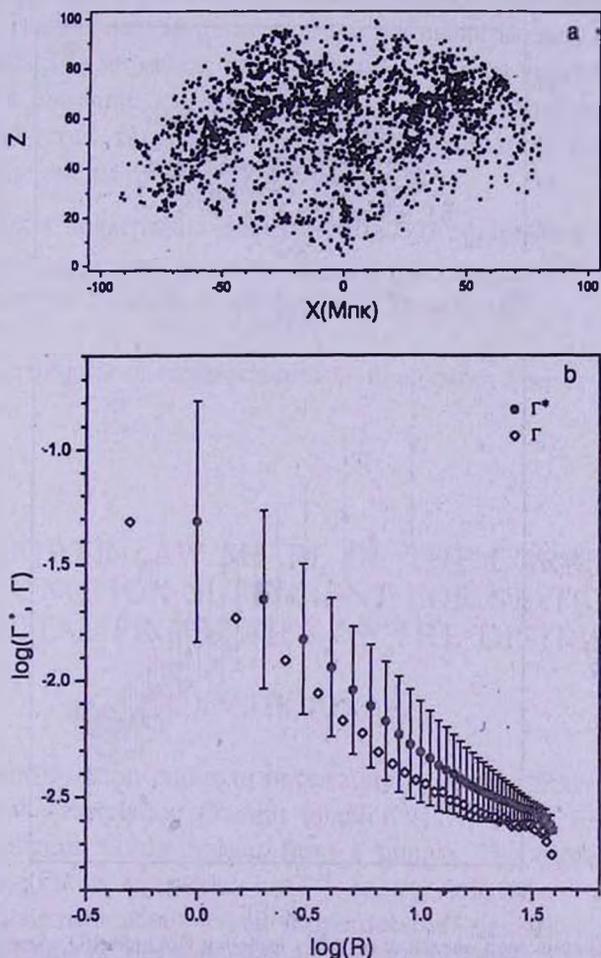


Рис.5. а) - проекция распределения галактик выборки CfA2+SSRS2 ($R_{\text{view}} = 100$, $b'' > 15''$, $N = 2586$, $R_c = 43$ Мпк) на плоскость XZ ; б) - Гамма-функция.

рис.3б) с выходом на равномерное крупномасштабное распределение (плато графика). При вырезании конуса с раствором, аналогичным раствору границ реальных 3D-выборок, определяемому галактическим поглощением (рис.4а), попавшие в конус кластеры или части кластеров располагаются таким образом, что плато отсутствует (оно лишь намечается на пределе подсчетов) (рис.4б) и наблюдается только наклон Гамма. Таким образом, в ограниченном объеме степенной вид Гамма-функции не является однозначным указанием на фрактальность исследуемого распределения.

Еще один интересный эффект изменения хода Гамма из-за изменения параметров выборки можно увидеть по реальному распределению галактик в северной галактической полусфере. В объединенной выборке галактик из обзоров CfA2 [12] и SSRS2 [13] выделяются сверхскопление Coma и образование, названное "Великой Стеной" (Great Wall) [14,15].

Границы выборки: CfA2 ($0^\circ < \delta < 90^\circ$, $7^h < \alpha < 18^h$, $b^{II} > 15^\circ$) + SSRS2 ($\delta < 0^\circ$, $b^{II} > 35^\circ$).

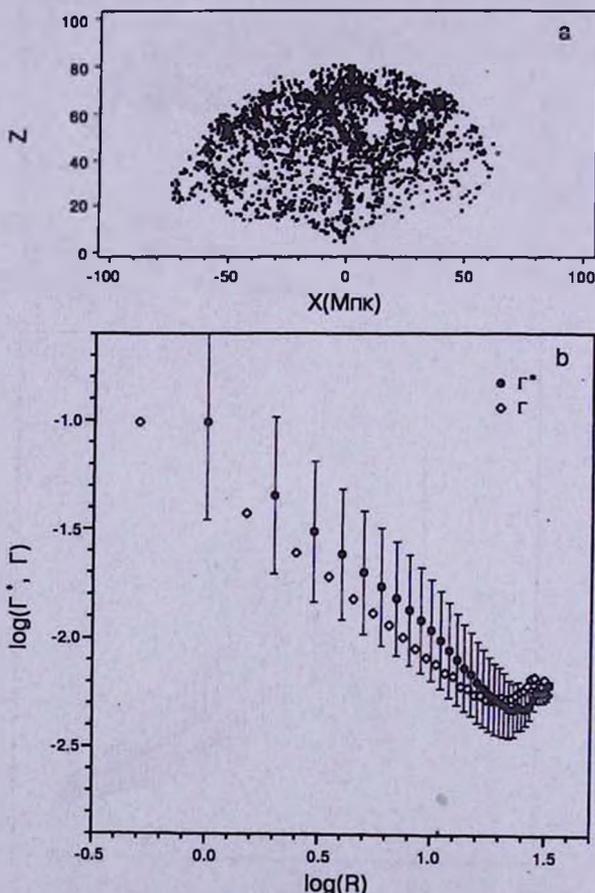


Рис.6. а) - проекция распределения галактик выборки CfA2+SSRS2 с меньшей глубиной $R_{\text{зад}} = 80$, $b^{II} > 15^\circ$, $N = 2802$, $R_s = 35$ Мпк на плоскость XZ; б) - Гамма-функция (заметно влияние изменения глубины).

При построении подвыборок, ограниченных по объему (volume limited), в выборке из общего списка остаются только объекты с $M_{abs} > M_{abs}^0$, то есть более яркие, чем самый слабый и самый дальний объект выборки с абсолютной звездной величиной M_{abs}^0 . Тем самым обеспечивается однородность выборки по светимости (с каждого объекта виден любой другой объект выборки). Как видно из сравнения рис.5 и рис.6, вид Гамма-функции у дальней границы подсчета существенно зависит от расположения внутри объема выборки, который определяется выбранной глубиной R_{rand} Великой Стены, расположенной по радиальной координате на расстоянии ~70-80 Мпк.

3. *Выводы.* Проведенное исследование указывает на то, что линейный вид зависимостей $\log(\Gamma')$ и $\log(\Gamma)$ от $\log(r)$ в ограниченном интервале масштабов - необходимое, но не достаточное условие для утверждения о фрактальности некоторого распределения. Распределения произвольного вида (по некоторым свойствам напоминающие реальные) могут при проведении Гамма-анализа показывать те же свойства, что и фрактальное распределение. Тем не менее, наклон Гамма - прямое указание на наличие скучивания и значение изменения его амплитуды с расстоянием. Гамма-функция является также довольно чувствительным аппаратом для фиксирования смены режима скучивания.

Работа была поддержана грантом No.A0007 программы "Интеграция". Автор выражает благодарность В.А.Гаген-Торну, А.И.Копылову и Ю.В.Барышеву за помощь и интересные дискуссии.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

IS THE POWER-LAW SHAPE OF THE CORRELATION GAMMA-FUNCTION SUFFICIENT FOR STATEMENT ON THE FRACTAL PROPERTIES OF THE DISTRIBUTION?

A.V.TIKHONOV

Detailed consideration points to uncertainty in interpretation of the results obtained with the correlation Gamma-function ($\Gamma(r)$, $\Gamma'(r)$) for the analysis of spatial distribution of the objects from a sample. The existence of linear dependences $\log(\Gamma)$ on $\log(r)$ and $\log(\Gamma')$ on $\log(r)$ is shown to be insufficient for the statement about fractal properties (self-similarity) of the distribution. A possibility of the influence of sample boundary variations on the shape of dependences $\log(\Gamma)$ on $\log(r)$ and $\log(\Gamma')$ on $\log(r)$ is demonstrated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L.Pietronero*, *Physica A*, **144**, 257, 1987.
2. *P.H.Coleman*, *L.Pietronero*, *Phys. Reports*, **213**, 311, 1992.
3. *L.Pietronero*, *M.Montuori*, *F.Sylos Labini*, in "Critical Dialogues in Cosmology", Proceedings of a Conference held at Princeton, ed. Nail Turok, Singapore, World Scientific, 1997, p.24.
4. *F.Sylos Labini*, *M.Montuori*, *L.Pietronero*, *Phys. Reports*, **293**, 61, 1998.
5. *F.Sylos Labini et al.*, *Physica A*, **226**, 195, 1996.
6. *B.Mandelbrot*, *Fractals: Form, Chance and Dimensions*, San Francisco, Freeman, 1977.
7. *B.Mandelbrot*, *The Fractal Geometry of Nature*, New York, Freeman, 1982.
8. *Ю.В.Барышев*, *Астрофиз. исследования (Изв. САО)*, **14**, 24, 1981.
9. *Y.U.Baryshev et al.*, *Vistas in Astronomy*, **38**, 419, 1994.
10. *J.L.McCauley*, *SISSA* (www.babbage.sissa.it), astro-ph/9703046.
11. *G.Paladin*, *A.Vulpiani*, *Phys. Reports*, **156**, 147, 1987.
12. *E.E.Falco et al.*, *Publ. Astron. Soc. Pacif.*, **111**, 438, 1999.
13. *L.N. da Costa et al.*, *Astron. J.*, **116**, 1, 1998.
14. *J.Huchra et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **52**, 89, 1983.
15. *M.J.Geller*, *J.P.Huchra*, *Science*, **246**, 897, 1989.