АСТРОФИЗИКА

ТОМ 45 ФЕВРАЛЬ, 2002 ВЫПУСК 1

УДК: 524.354.6-337

ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А.Г.БАГДОЕВ[1], Д.М.СЕДРАКЯН[2]

Поступила 25 июля 2001

Рассмотрено распространение осесимметричных магнитогидродинамических волн вблизи экваториальной плоскости коры нейтронной звезды, находящейся в поперечном магнитном поле. Магнитное поле перпендикулярно экваториальной плоскости. Определены магнитные поля и электрические токи, возбужденные этим волновым пучком на поверхности звезды.

1. *Введение*. В работе [1] изучены линейные одномерные задачи о волновых движениях в плазме коры нейтронной звезды. Ряд работ [2-5] посвящены изучению движения пучков в слое вязкой упругой среды или электропроводящей жидкости с учетом неоднородностей, конечной теплопроводности и химической активности этих сред. В работе [6] рассматривалось распространение радиальных магнитогидродинамических волн вблизи экваториальной плоскости коры нейтронной звезды, находящейся в поперечном магнитном поле. Эти волны возбуждаются пространственно-ограниченным возбуждением в форме поперечного магнитного поля, приложенного к внутренней границе коры нейтронной звезды. В этой работе предполагалось, что плазма в коре звезды однородная. Однако плотность вещества в коре нейтронной звезды быстро падает с приближением к границе звезды. Следовательно, плазма в коре сильно неоднородная. Поэтому в настоящей статье мы будем обобщать результаты статьи [6] на учет неоднородности исходного состояния плазмы.

2. *Эволюционные уравнения*. Рассмотрим распространение квазимонохроматических волн модуляции в ионизированной плазме, занимающей слой $0 \le x \le l$ в перпендикулярном магнитном поле $H_x = 0$, $H_z = 0$ и $H_y = H_0$, где ось x направлена по нормали к невозмущенной волне в противоположном к движению волны направлении, y - поперечная координата в основной плоскости движения, нормальная к экваториальной плоскости звезды. Уравнения движения релаксирующей плазмы приведены в работе [6]. Их решения в форме двух волн, распространяющихся в слое навстречу друг другу, можно, как показано в [2,6], искать в виде:

$$u = u_1(\tau_1, y, z, t) + u_2(\tau_2, y, z, t), \tag{1}$$

где в качестве u выбрана компонента h_y возмущенного магнитного поля,

$\tau_{1,2}$ есть эйконалы невозмущенных следующих слева и справа волн, причем в отличие от [6], в случае неоднородной среды:

$$\tau_{1,2} = \tau'_{1,2} - t = \int_{\pm x}^{t} \frac{dx}{c_n} - t, \tag{2}$$

$c_n = c_n(x)$ - нормальная скорость линейной волны. Для дифракционных задач о стационарных пучках в квазимонохроматических волнах можно показать, что эволюционные уравнения для u_{12} имеют вид [2-6]:

$$\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial\tau'_{12}\partial\tau_{12}} - \frac{1}{2}\hat{L}u_{12} - \frac{\partial u_{12}}{\partial\tau_{12}}\frac{d\ln\Phi}{d\tau'_{12}} = -\frac{1}{c_n}\frac{\partial}{\partial\tau_{12}}\left(\Gamma u_{12}\frac{\partial u_{12}}{\partial\tau_{12}} + D\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial\tau_{12}^2} + E\frac{\partial^3 u_{12}}{\partial\tau_{12}^3}\right). \tag{3}$$

Здесь Г, D, E есть коэффициенты нелинейности, диссипации и дисперсии, которые для релаксирующей плазмы имеют вид [6]

$$\Gamma = \frac{c_n}{H_y}\left(\frac{\gamma+1}{2}\frac{c_s^2}{c_n^2} + \frac{3}{2}\frac{c_A^2}{c_n^2}\right),$$

$$D = -\frac{1}{2c_n}\left\{\frac{1}{\rho}\left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right) + \frac{c_A^2}{c_n^2}\nu_m + \frac{(\gamma-1)^2 Tk}{\rho c_n}\right\}, \tag{4}$$

$$E = -\frac{\tau_0}{c_n}\frac{(\gamma-1)^2 Tk}{\rho c_n^2}.$$

Заметим, что эти коэффициенты есть функции от x. Условия совместимости на линейных волнах имеют вид:

$$\nu_y = 0,\ h_x = 0,\ \nu_z = 0,\ h_z = 0,\ h_y = \mp\frac{H_y}{c_n}\nu_x,\ \rho' = \mp\frac{\rho}{c_n}\nu_x,\ P' = c_s^2\rho', \tag{5}$$

где верхние знаки соответствуют волне 1, а нижние - волне 2. Для невозмущенного магнитного поля H_y можно получить поперечный оператор в [3] в виде

$$\hat{L} = -c_n^2\left[\left(1 + \frac{c_A^2 c_s^2}{c_n^4}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right], \quad c_A^2 = \frac{H_y^2}{4\pi\rho} \tag{6}$$

Как было показано в работе [1], для плазмы в коре нейтронной звезды хорошо выполняется условие:

$$\frac{c_A^2 c_s^2}{c_n^2} \ll 1, \tag{7}$$

следовательно из (6) вытекает:

$$\hat{L} = -c_n^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -c_n^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right). \tag{8}$$

Здесь введена радиальная координата $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Из [8] видим, что имеющие круговую начальную форму пучки являются осесимметричными.

Входящее в (3) одномерное по нормали к волне линейное или лучевое решение Ф можно определить из закона сохранения энергии возмущений в волне [3-5], которое для одномерной задачи имеет вид:

$$\rho c_n \nu_x^2 = \text{const} \tag{9}$$

или, используя (5) и переходя от ν_x к h_y, можно получить

$$\frac{\rho c_n^3}{H_y^2}\Phi^2 = \text{const},$$

откуда получится:

$$\Phi^2 = \frac{\rho(0)c_n^3(0)H_y^2\left(\tau_{12}'\right)}{H_y^2(0)\rho\left(\tau_{12}'\right)c_n^3\left(\tau_{12}'\right)}. \tag{10}$$

Для неоднородной среды в области $0 \le x \le l$ $c_n = c_n(x)$, $\rho = \rho(x)$, $H_y = H_y(x)$ или соответствующие функции от τ_{12}'. В силу того, что поставленная задача может быть заменена [2] на задачу о симметричных акустических зеркалах, левое из которых $x = l$ совпадает с внутренней границей слоя, а правое, заданное в точке $x = -l$, есть симметричное отражение левого торца относительно плоскости $x = 0$, естественно продолжать невозмущенные значения $c_n(x)$, $\rho(x)$ и $H_y(x)$ в область $-l \le x \le 0$ четным образом, а в остальную область с периодом $2l$. Тогда можно считать $c_n\left(\tau_1'\right) = c_n\left(\tau_2'\right)$, $\rho\left(\tau_1'\right) = \rho\left(\tau_2'\right)$, $H_y\left(\tau_1'\right) = H_y\left(\tau_2'\right)$ и эйконалы τ_{12}' и лучевое решение определены всюду.

3. *Решение эволюционного уравнения.* Ищем решение уравнений (3),(8) в виде квазимонохроматических волн в неоднородной по координате x среде

$$u_{12} = \frac{1}{2}\left(U_{12}\, e^{i\theta_{12} - \omega^2\lambda_{12}} + V_{12}\, e^{2i\theta_{12} - 2\omega^2\lambda_{12}} + \text{k.c.}\right), \tag{11}$$

где U_{12}, V_{12} есть функции τ_{12}', τ_{12}; $\theta_{12} = \omega\tau_{12} - s_{12}\left(\tau_{12}'\right)$, ω - основная частота волн, ω' - модулированная частота, ν - коэффициент затухания:

$$\omega' = \frac{ds_{12}}{d\tau_{12}'}, \quad \nu = \frac{d\lambda_{12}}{d\tau_{12}'}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (3), (8) и приравнивая линейные недифференцируемые члены с первой гармоникой, можно получить:

$$\omega' = -\frac{1}{c_n}E\omega^3, \quad \nu = -\frac{D}{c_n}. \tag{13}$$

Уравнения для амплитуд вторых гармоник имеют вид [3]:

$$2i\omega\frac{\partial V_{12}}{\partial\tau_{12}'} + \frac{c_n^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V_{12}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_{12}}{\partial r}\right) + 4\omega\left(i\omega^2\nu - 3\omega'\right)V_{12} = \frac{\Gamma\omega^2}{c_n}u_{12}^2. \tag{14}$$

Так как u_{12} малы по сравнению с невозмущенным магнитным полем, то, как видно из уравнений (14), V_{12} должно быть более высокого порядка малости, чем u_{12}. Для нахождения приближенного решения для V_{12}, как это делается в работах [2,4], мы пренебрегаем производными V_{12}, и тогда из (14) получаем:

$$V_{12} = \frac{\Gamma\omega u_{12}^2}{4c_n\left(i\omega^2\nu - 3\omega'\right)}. \tag{15}$$

Заметим, что для плазмы в коре нейтронной звезды $\dfrac{|\upsilon_{12}|}{|u_{12}|} \ll 1$, что подтверждает вышеуказанное допущение. Отметим также, что точные решения уравнений для первой и второй гармоник сводятся к восьми обыкновенным дифференциальным уравнениям по τ_1' и даны в работе [2], причем численное решение показало качественное соответствие с приближенным решением, данным в нашей статье. Исключая V_{12} из уравнения для первой гармоники, можно получить нелинейное уравнение Шредингера для амплитуды U_{12} первой гармоники:

$$i\omega\frac{\partial U_{12}}{\partial\tau_{12}'}+\frac{L}{2}\left(\frac{\partial^2 U_{12}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_{12}}{\partial r}\right)-i\omega U_{12}\frac{d\ln\Phi}{d\tau_{12}'}=(\kappa_1+i\kappa_2)|U_{12}|^2U_{12}, \quad (16)$$

где $L=c_n^2$,

$$\kappa_1=3E\omega^2\zeta, \quad \kappa_2=\omega D\zeta, \quad \zeta=\frac{1}{8c_n}\frac{\Gamma^2e^{-2\omega^2\lambda_{12}}}{9E^2\omega^2+D^2}. \quad (17)$$

Сделав замену $U_{12}=\Phi\Psi_{12}$, можно получить уравнение (16) без лучевого слагаемого и κ_{12} в правой части уравнения, умноженных на Φ^2. Для уравнения (16) стационарные решения, удовлетворяющие условию $\frac{\partial U_{12}}{\partial t}=0$, устанавливаются, когда энергия возмущений, подаваемая на левой границе слоя, затрачивается на диссипацию и излучение волн с правого конца $x=0$. В качестве граничного условия для искомого решения на границе $x=l$ выбираем функцию $h_{y1}=U_1$ для идущей направо волны в виде гауссовского пучка [2]:

$$\psi_1e^{-i\omega t}=K_0\exp\left\{-\frac{r^2}{2r_0^2}+i\frac{r^2}{2R_1(0)}\right\} \quad K_0=|K_0|e^{-i\omega t}, \quad (18)$$

где r_0 - начальный радиус пучка, $R_1(0)\omega c_n^{-1}$ есть радиус кривизны поверхности левого торца слоя. Тогда решение можно искать в виде:

$$\psi_{12}=A_{12}e^{-i\varphi_{12}},$$

где

$$A_{12}=\frac{b_{12}}{f_{12}(\tau_{12}')}e^{-\frac{r^2}{2r_0^2f_{12}^2(\tau_{12}')}},$$
$$\varphi_{12}=\sigma_{12}(\tau_{12}')+\frac{r^2}{2R_{12}(\tau_{12}')}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (16) и приравняв в членах с r^0 и r^2 действительные и мнимые части, можно получить уравнения для безразмерных радиусов пучков, радиусов кривизны волн и фаз σ_{12}:

$$\frac{d^2f_{12}}{d\tau_{12}^2}=\frac{\xi_1}{f_{12}^3}-\frac{b_{12}^2}{\omega}\frac{d}{d\tau_{12}'}\left(\kappa_2\Phi^2\right)/f_{12}, \quad (20)$$

$$\frac{1}{f_{12}}\frac{df_{12}}{d\tau_{12}'}=-\frac{1}{\omega}\left(-\frac{1}{R_{12}}+\frac{b_{12}^2}{f_{12}^2}\kappa_2\Phi^2\right), \quad (21)$$

$$\frac{d\sigma_{12}}{d\tau_{12}'}=G\frac{1}{f_{12}^2}, \quad G=-\frac{2L}{\omega\tau_0^2}-\frac{\kappa_1\Phi^2b_{12}^2}{\omega}, \quad (22)$$

где

$$\xi_1 = \frac{L^2}{r_0^4\,\omega^2} + \frac{2\,Lb_{12}^2\,\kappa_1\Phi^2}{\tau_0^2\omega^2} - \frac{\kappa_2^2\Phi^4\,b_{12}^4}{\omega^2}. \qquad (23)$$

В однородной среде $\Phi = 1$ и из (20)-(23) получаются уравнения, приведенные в работе [6]. Граничное условие (18) при $x = l$ и $\tau_1' = 0$ дает начальные условия для (20) с учетом (21)

$$f_1 = 0, \quad \frac{df_1(0)}{d\tau_1'} = F = -\frac{1}{\omega}\left\{-\frac{c_n^2(0)}{R_1(0)} + \kappa_2(0)b_1^2\right\}, \qquad (24)$$

причем $b_1 = |K_0|$. Уравнение (20) для f_1 можно численно решить при условиях (24) методом Рунге-Кутта.

Естественным условием будет требование свободной границы на поверхности звезды, т.е. при $x = 0$, $p' = 0$. Это условие в силу (5) и уравнений магнитогидродинамики [6] дает при $x = 0$

$$h_y = 0 \quad \text{и} \quad U_1 = U_2. \qquad (25)$$

Согласно (19)-(22) условие (25) выполняется при требовании:

$$\tau_1(\tau^0) = \tau_2(\tau^0), \quad b_2 = -b_1, \quad f_2(\tau^0) = f_1(\tau_0) = f(\tau_0),$$
$$\frac{df_2}{d\tau_2'} = \frac{df_1}{d\tau_1'}, \quad \tau^0 = \int_0^l \frac{dx}{c_n}. \qquad (26)$$

Здесь l - продольная длина рассматриваемого слоя.

Таким образом, полученные нами решения позволяют определить интересующие нас физические параметры на правой границе слоя, т.е. при $x = l$ или $\tau_{12}' = \tau^0$. Заметим также, что $p' = \frac{dV_x}{dx} = h_y = 0$ при $\tau_{12}' = \tau_0$.

Если ввести обозначение $\Lambda = \omega^2 \int_0^{\tau^0} \nu\, d\tau$, то окончательно получим:

$$v_x = Re\,V_x, \quad j_z = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial h_y}{\partial x} = Re\,J_z, \qquad (27)$$

где

$$|V_x| = \frac{2\,b_1 c_n\,\Phi}{H_y f(\tau^0)} \exp\left\{-\Lambda - \frac{r^2}{2r_0^2 f^2(\tau^0)}\right\},$$
$$|J_z| = \frac{c}{2\pi}\frac{b_1\,\omega\Phi}{c_n f(\tau^0)} \exp\left\{-\Lambda - \frac{r^2}{2r_0^2 f^2(\tau^0)}\right\}. \qquad (28)$$

Как видно из (27) и (28), полученные выражения амплитуд $|V_x|$ и $|J_z|$ зависят от значения амплитуды возбуждения магнитного поля на внутренней границе коры нейтронной звезды: $b_1 = |K_0|$. Последняя будет определяться из физического механизма возбуждения магнитного поля на поверхности ядра нейтронной звезды.

Как ожидается, в нейтронных звездах K_0/H_0 пренебрежимо мало и поэтому достаточно брать вместо (16) линейное уравнение, т.е. взять $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. Тогда без предположений (15) решение дается (19)-(28), где следует полагать $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

4. *Заключение*. Основная цель данной статьи заключалась в получении простых зависимостей для определения физических параметров пучков на поверхности нейтронной звезды в случае неоднородной плазмы. Как видно из получаемых формул (27), (28) для неоднородной среды можно получить распределение амплитуд плотности тока и скорость частиц на внешней границе звезды, зная $f(\tau^0)$, которое можно численно найти решая уравнение для f_1 при начальных условиях (24).

Один из авторов (Д.С.) благодарит грант МНТЦ А-353 за финансовую поддержку при выполнении этой работы.

[1]Институт механики НАН Армении
[2]Ереванский государственный университет, Армения

THE WAVE BEAMS IN THE INHOMOGENEOUS PLASMA IN TRANSVERSAL MAGNETIC FIELD

A.G.BAGDOEV[1], D.M.SEDRAKIAN[2]

Propagation of axisymmetrical magnetohydrodynamic waves near the equatorial plane of the crust of a neutron star is considered. The magnetic field is perpendicular to the equatorial plane. The magnetic fields and electric currents generated by the wave beams on the surface of the star are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д.М.Седракян*, Астрофизика, 31, 101, 1989.
2. *А.Г.Багдоев*, *А.В.Шекоян*, Изв. АН Арм. ССР, Механика, 40, 14, 1987.
3. *А.Г.Багдоев*, *Л.Г.Петросян*, Изв. АН Арм. ССР, Механика, 36, 3, 1983.
4. *А.Г.Багдоев*, *А.А.Гургенян*, Изв. АН Арм. ССР, Механика, 39, 16, 1986.
5. *М.М.Минасян*, Докл. АН Арм. ССР, 55, 183, 1972.
6. *А.Г.Багдоев*, *Д.М.Седракян*, Астрофизика, 44, 139, 2001.