

УДК: 52-6/-7

НОВЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА
ИЗЛУЧЕНИЯ

С.И.ГРАЧЕВ

Поступила 27 марта 2001

Принята к печати 20 июня 2001

Предлагается новый метод численного решения нестационарных задач теории переноса излучения. Метод состоит в том, что если известно решение в некоторый момент времени t (например, в начальный момент), то, представляя интенсивность излучения, а также все величины, зависящие от времени (населенности уровней, кинетическую температуру и т.д.), в виде разложений в ряды Тейлора в окрестности t , можно из уравнения переноса и сопутствующих ему уравнений (уравнения для населенностей, уравнение энергетического баланса и т.д.) найти по некоторым рекуррентным соотношениям и все производные этого решения в тот же момент. Затем по ряду Тейлора можно вычислить решение в некоторый следующий момент $t + \Delta t$ и так далее. Метод позволяет рассматривать нестационарный перенос излучения как в стационарных средах, так и в средах, характеристики которых меняются со временем заданным образом. Более того, этим методом можно решать и нелинейные задачи, т.е. такие задачи, в которых поле излучения существенным образом влияет на характеристики среды. При этом не используются какие-либо итерации - все сводится к вычислениям по рекуррентным формулам. В качестве примеров получены решения нескольких задач как линейных, так и нелинейных.

1. *Введение.* В теории нестационарного переноса излучения изучается многократное рассеяние фотонов с учетом конечности времени пребывания между рассеяниями и в поглощенном состоянии. При этом все задачи по степени их сложности можно разбить на три типа. Первый тип - это задачи о нестационарном поле излучения в стационарных средах с неизменными физическими характеристиками. В задачах второго типа учитывается изменение этих характеристик со временем по заданному закону. Наконец, в задачах третьего типа существенно взаимное влияние с течением времени поля излучения и параметров среды. Задачи этого типа существенно нелинейны. Для решения задач первого типа имеется наиболее разработанная теория (см. Соболев [1], Амбарцумян [2], Кейз и Цвайфель [3], Минин [4]). Что касается задач второго и, особенно, третьего типов, то вряд ли можно построить достаточно общую теорию их решения (отдельные примеры решений см., например, в обзорах Нагирнера [5] и Гринина [6]). Что касается численных решений нелинейных нестационарных задач, то они получаются, как правило, методом возмущений, который включает в себя линеаризацию уравнений с последующими итерациями (см. примеры в [6]).

Мы предлагаем общий метод численного решения нестационарных задач.

Метод состоит в том, что если известно решение в некоторый момент времени t (например, в начальный момент), то, представляя интенсивность излучения, а также все величины, зависящие от времени (населенности уровней, кинетическую температуру и т.д.), в виде разложений в ряды Тейлора в окрестности t , можно из уравнения переноса и сопутствующих ему уравнений (уравнения для населенностей, уравнение баланса энергии и т.д.) найти по некоторым рекуррентным соотношениям и все производные этого решения в тот же момент. Затем по ряду Тейлора вычисляется решение в некоторый следующий момент $t + \Delta t$ и так далее. Метод позволяет рассматривать нестационарный перенос излучения "как в стационарных средах, так и в средах, характеристики которых меняются со временем заданным образом. Более того, этим методом можно решать и нелинейные задачи, т.е. такие задачи, в которых поле излучения существенным образом влияет на характеристики среды. При этом не используются какие-либо итерации - все сводится к вычислениям по рекуррентным формулам. В качестве примеров получены решения нескольких задач. В разделах 2-4 рассмотрен нестационарный перенос излучения в изолированной спектральной линии в бесконечных однородных и изотропных средах. При этом учитывалось расширение пространства. В приближении полного перераспределения по частоте (ППЧ) при рассеянии решения найдены как в линейном приближении (разд.2), так и для исходной нелинейной задачи (разд.3). При частичном перераспределении по частоте (ЧПЧ) с функцией R_{ij} решения получены в линейном приближении (разд.4). В качестве примера пространственно-неоднородных задач в разделе 5 рассмотрен нестационарный перенос монохроматического излучения в конечном плоском слое с переменным внешним освещением.

2. Рассеяние в линии при ППЧ: линейное приближение.

Основные уравнения для интенсивности излучения $I(x, t)$ и функции источников $S(t)$ в приближении ППЧ:

$$t_2 \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} - \gamma \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -\phi(x)[I(x, t) - S(t)], \quad (1)$$

$$S(t) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x') dx' \int_0^{t_1} e^{-(t-t')\gamma_1} I(x', t') \frac{dt'}{t_1} + \tilde{S}_0(t), \quad (2)$$

где $x = (v - v_0)/\Delta v_D$ - смещение от центра линии, измеренное в доплеровских ширинах, $t_2 = 1/(cn_1 k_{12})$ - среднее время между двумя последовательными рассеяниями, γ - безразмерный градиент скорости расширения, $\phi(x)$ - профиль коэффициента поглощения в линии, λ - альбеда однократного рассеяния, t_1 - среднее время, проводимое фотоном в поглощенном состоянии, $\tilde{S}_0(t)$ - функция первичных источников. Вместо уравнения (2) удобнее использовать следующее:

$$t_1 \frac{dS(t)}{dt} = -S(t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) I(x, t) dx + S_0(t), \quad (3)$$

из которого (2) получается интегрированием, причем

$$\tilde{S}_0(t) = S_0(0)e^{-t/t_1} + \int_0^t S_0(t')e^{-(t-t')\gamma/t_1} \frac{dt'}{t_1}. \quad (4)$$

Начальное и граничное условия к уравнению (1): $I(x, 0) = I_0(x)$, $I(+\infty, t) = 0$.

Пусть в некоторый момент времени t_i (например, в начальный момент) известны $I(x, t_i)$ и $S(t_i)$. Запишем при $t > t_i$ разложения в ряд Тейлора

$$I(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^n}{n!} a_n(x), \quad S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^n}{n!} s_n, \quad (5)$$

где, очевидно, $a_0(x) = I(x, t_i)$, $s_0 = S(t_i)$. Подстановка этих разложений в уравнения (1) и (3) дает следующие рекуррентные соотношения для совместного определения коэффициентов разложений:

$$a_{n+1}(x) = \gamma \frac{da_n(x)}{dx} - \phi(x) [a_n(x) - s_n], \quad (6)$$

$$as_{n+1} = -s_n + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) a_n(x) dx + S_0^{(n)}(t_i), \quad (7)$$

где время измеряется в единицах t_2 , и через a обозначено $a = t_1/t_2$. Для $a_n(x)$ как функции x использовалось представление в виде квадратичного сплайна. После определения коэффициентов разложений интенсивность излучения и функция источников вычисляются в следующей точке $t = t_{i+1}$ и процедура повторяется.

Все расчеты проводились для случая доплеровского профиля $\phi(x) = \pi^{-1/2} e^{-x^2}$. На рис. 1 и 2 приведены результаты для двух типов начальных условий:

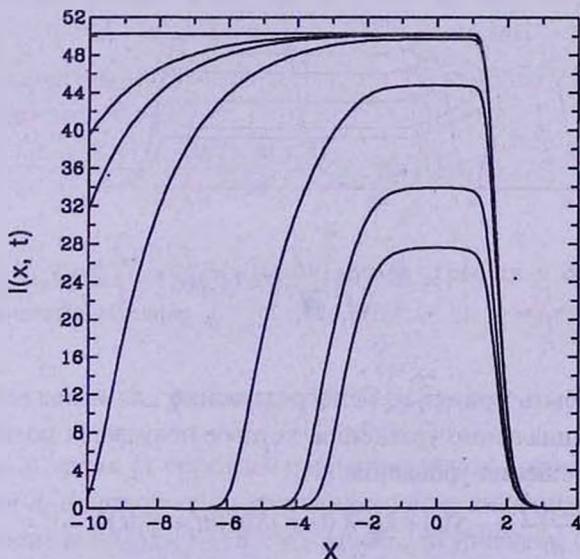


Рис.1. Эволюция профиля интенсивности излучения при резонансном рассеянии с ППЧ в бесконечной однородно расширяющейся среде. Начальный профиль $I(x, 0) = 0$, функция первичных источников $S_0(t) = 0$ при $t < 0$ и $S_0(t) = 1$ при $t \geq 0$, $t_1 = 0$, $\gamma = 10^{-2}$, $\epsilon = 1 - \lambda = 10^{-2}$. Различные кривые относятся к моментам времени $t/(10^2 t_1) = 1.4, 2, 4, 8, 10, 11, 22$ - в порядке роста интенсивности.

- 1) $I(x, 0) = 0$, $S_0(t) = 0$ при $t < 0$ и $S_0(t) = 1$ при $t \geq 0$,
 2) $I(x, 0) = \phi(x - x_1)$, $S_0(t) = 0$.

Условие 1 соответствует включению первичных источников в момент $t=0$, так что со временем устанавливается стационарное распределение

$$I(x, \infty) = \frac{1 - \exp\left[-\frac{1}{\gamma} \int_x^{+\infty} \phi(x') dx'\right]}{1 - \lambda + \lambda\gamma(1 - e^{-1/\gamma})}. \quad (8)$$

На рис.1 прослежен выход на стационарное распределение на больших временах при $t_1 = 0$.

Условие 2 соответствует "расплыванию" начального распределения со временем. Результаты расчетов для этого случая представлены на рис.2 при $t_1 = 0$. Формирование "горба" на длинноволновом крае профиля связано с "красным" смещением фотонов в расширяющейся среде.

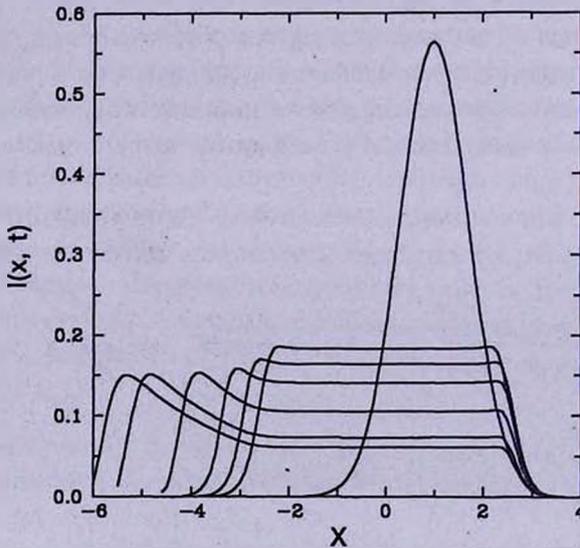


Рис.2. То же, что и на рис.1, но при $I(x, 0) = \pi^{-1/2} e^{-(x-1)^2}$, $S_0(t) = 0$, $\gamma = 10^{-4}$, $\epsilon = 1 - \lambda = 10^{-4}$ ($t/(10^3 t_1) = 0, 1, 3, 7, 15, 25, 30$ - в порядке уменьшения высоты центрального плато).

Метод может быть применен непосредственно для нахождения $S(t)$ из интегро-дифференциального уравнения, которое получается подстановкой в (3) формального решения уравнения (1):

$$t_1 \frac{dS(t)}{dt} = -S(t) + \lambda \int_0^t K(t-t') S(t') dt' + S_0(t), \quad (9)$$

где

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \phi(x+\gamma\tau) \exp\left[-\frac{1}{\gamma} \int_x^{x+\gamma\tau} \phi(y) dy\right] dx. \quad (10)$$

Из (9) получается следующее рекуррентное соотношение:

$$as_{n+1} = -s_n + S_0^{(n)}(t) + \lambda \int_0^t K^{(n)}(y)S(t-y)dy + \lambda \sum_{m=0}^{n-1} s_m K^{(n-m)}(0), \quad (11)$$

где $K^{(n)}(y)$ - n -ая производная $K(y)$, $n=0, 1, \dots$, причем при $n=0$ последняя сумма отбрасывается.

Метод легко обобщается на случай, когда параметры среды (в рассматриваемой задаче это γ, a и λ) зависят от времени заданным образом. Надо эти параметры также разложить по времени в ряды Тейлора в окрестности t , и подставить их вместе с разложениями (5) в исходные уравнения. В результате вместо соотношений (6) и (7) получатся аналогичные, но с заменой произведений $\gamma a_n(x)$, as_{n+1} и $\lambda a_n(x)$ на свертки коэффициентов разложений соответствующих параметров с коэффициентами разложений интенсивности и функции источников.

3. *Рассеяние в линии при ППЧ: нелинейная задача.* Пусть имеются двухуровневые атомы и максвелловские электроны в плоском слое толщиной z_0 . Предполагается полное перераспределение по частоте при рассеянии. Уравнение переноса:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I(z, \mu, x, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial I(z, \mu, x, t)}{\partial z} = [-n_1 B_{12} I + n_2 (A_{21} + B_{21} I)] \phi(x) \frac{hc}{4\pi v_{th}}, \quad (12)$$

уравнение для населенностей уровней:

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -n_2 (A_{21} + B_{21} J_{12} + n_e C_{21}) + n_1 (B_{12} J_{12} + n_e C_{12}), \quad (13)$$

где

$$J_{12} = (1/2) \int_{-1}^{+1} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) I(z, \mu, x, t) dx. \quad (14)$$

Полная концентрация атомов $n_1 + n_2 = n$. Уравнение (12) в стандартной записи имеет вид

$$t_2 \frac{\partial I(\tau, \mu, x, t)}{\partial t} - \mu \frac{\partial I(\tau, \mu, x, t)}{\partial \tau} = -\phi(x) [I(\tau, \mu, x, t) - S(\tau, t)], \quad (15)$$

где

$$t_2^{-1} = ck_{12} n_1 \left(1 - \frac{n_2 g_1}{n_1 g_2} \right), \quad S(\tau, t) = \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \left(\frac{n_1 g_2}{n_2 g_1} - 1 \right)^{-1}, \quad k_{12} = \frac{hc}{4\pi v_{th}} B_{12}, \quad (16)$$

и

$$d\tau = -k_{12} n_1 \left(1 - \frac{n_2 g_1}{n_1 g_2} \right) dz. \quad (17)$$

Согласно (13) время t_1 , определяемое как величина, обратная выражению в скобках при n_2 в правой части уравнения, также зависит от поля излучения.

Если ввести $\tilde{t}_2 = (cnk_{12})^{-1}$, $d\tilde{\tau} = -nk_{12} dz$, то уравнение (12) переписывается в виде

$$\tilde{t}_2 \frac{\partial I}{\partial t} - \mu \frac{\partial I}{\partial \tilde{\tau}} = -\phi(x) I + \phi(x) \frac{n_2}{n} \left[\left(1 + \frac{g_1}{g_2} \right) I + \frac{g_1}{g_2} \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \right]. \quad (18)$$

Уравнение (13) можно переписать в виде

$$\tilde{t}_1 \frac{\partial n_2/n}{\partial t} = -\frac{n_2}{n} \left[1 + \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \right) \bar{n}_{12} + n_e \frac{C_{21} + C_{12}}{A_{21}} \right] + \frac{g_2}{g_1} \bar{n}_{12} + n_e \frac{C_{12}}{A_{21}}, \quad (19)$$

где $\tilde{t}_1 = 1/A_{21}$, $\bar{n}_{12} = \frac{c^2}{2h\nu_{12}^3} J_{12}$, $C_{12} = C_{21}(g_2/g_1)\exp(-h\nu_{12}/kT)$.

Подстановка разложений n_2/n и $(c^2/2h\nu_{12}^3)I$ в ряды Тейлора по времени в окрестности $t=t_1$ дает для определения этих коэффициентов следующие рекуррентные соотношения:

$$a_{m+1}(\bar{\tau}, \mu, x) = \mu \frac{\partial a_m(\bar{\tau}, \mu, x)}{\partial \bar{\tau}} + \left(1 + \frac{g_1}{g_2} \right) \phi(x) \sum_{k=0}^m C_m^k s_k(\bar{\tau}) a_{m-k}(\bar{\tau}, \mu, x) + \phi(x) \left[\frac{g_1}{g_2} s_m(\bar{\tau}) - a_m(\bar{\tau}, \mu, x) \right] \quad (20)$$

$$\bar{a}_{s_{m+1}}(\bar{\tau}) = -\left(1 + \frac{g_1}{g_2} \right) \sum_{k=0}^m C_m^k s_k(\bar{\tau}) \bar{a}_{m-k}(\bar{\tau}) - \left[1 + n_e \frac{C_{21} + C_{12}}{A_{21}} \right] s_m(\bar{\tau}) + \frac{g_2}{g_1} \bar{a}_m(\bar{\tau}) + n_e \frac{C_{12}}{A_{21}} \delta_{m0}, \quad (21)$$

где $\bar{a} = \tilde{t}_1/\tilde{t}_2$, δ_{m0} - символ Кронекера,

$$\bar{a}_m(\bar{\tau}) = (1/2) \int_{-1}^{+1} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) a_m(\bar{\tau}, \mu, x) dx. \quad (22)$$

Начальные значения

$$a_0(\bar{\tau}, \mu, x) = \frac{c^2}{2h\nu_{12}^3} I(\bar{\tau}, \mu, x, t_1), \quad s_0(\bar{\tau}) = \frac{n_2}{n} \Big|_{t=t_1}. \quad (23)$$

Параметры: \bar{a} , $\varepsilon = n_e C_{21}/A_{21}$, g_2/g_1 и $h\nu_{12}/kT$.

Для бесконечной однородной изотропно расширяющейся среды с равномерно распределенными температурой и концентрацией атомов и электронов вместо соотношений (20) и (21) имеем

$$a_{m+1}(x) = \gamma \frac{\partial a_m(x)}{\partial x} + \left(1 + \frac{g_1}{g_2} \right) \phi(x) \sum_{k=0}^m C_m^k s_k a_{m-k}(x) + \phi(x) \left[\frac{g_1}{g_2} s_m - a_m(x) \right], \quad (24)$$

$$\bar{a}_{s_{m+1}} = -\left(1 + \frac{g_1}{g_2} \right) \sum_{k=0}^m C_m^k s_k \bar{a}_{m-k} - \left[1 + n_e \frac{C_{21} + C_{12}}{A_{21}} \right] s_m + \frac{g_2}{g_1} \bar{a}_m + n_e \frac{C_{12}}{A_{21}} \delta_{m0}. \quad (25)$$

Результаты расчетов для этого более простого (пространственно однородного)

Таблица 1

ЗАВИСИМОСТЬ НАСЕЛЕННОСТИ ВТОРОГО УРОВНЯ
ОТ ВРЕМЕНИ t (В ЕД. t_2)

t	n_2/n	t	n_2/n	t	n_2/n	t	n_2/n	t	n_2/n
0	0	1000	0.0563	2998	0.1343	10006	0.2824	22000	0.3861
100	0.0076	1400	0.0744	3996	0.1644	12002	0.3075	30000	0.4201
200	0.0139	1800	0.0911	5014	0.1910	14000	0.3284	50000	0.4626
400	0.0256	2000	0.0989	6012	0.2138	16000	0.3462	97457	0.4911
800	0.0466	2398	0.1138	8010	0.2518	18000	0.3614	117457	0.4944

случая приведены в табл.1 для начального условия $I(x, 0) = 0$, $n_2/n = 0$ и при следующих значениях параметров: $h\nu_{12}/kT = 0.1$, $\gamma = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-4}$, $\bar{a} = 1$, $g_2/g_1 = 4$. Видно, что на больших временах устанавливается стационарное распределение, причем около половины атомов находится на втором уровне.

4. *Рассеяние в линии при ЧПЧ с функцией перераспределения R_{II}* . В качестве примера решения нестационарных задач при частичном перераспределении по частоте мы рассмотрим случай функции перераспределения R_{II} , причем пренебрежем для простоты временем нахождения фотона в поглощенном состоянии, хотя это и не принципиально. Распределение первичных источников по частоте возьмем пропорциональным профилю коэффициента поглощения. Тогда в линейном приближении основное уравнение для интенсивности излучения $I(x, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} - \gamma \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -\phi(x)I(x, t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} R_{II}(x, x')I(x', t)dx' + S_0(t)\phi(x), \quad (26)$$

где функция перераспределения (см., например, [7])

$$R_{II}(x, x') = \pi^{-3/2} \int_{|x-x'|/2}^{\infty} e^{-u^2} [\arctg((x+u)/a) - \arctg((x-u)/a)] du, \quad (27)$$

где $\bar{x}(x)$ - большее (меньшее) из x и x' , a - фойгтовский параметр. Профиль коэффициента поглощения фойгтовский:

$$\phi(x) = \frac{a}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{(y-x)^2 + a^2}. \quad (28)$$

Время t в уравнении (26) измерено в единицах $(ck_{12}n_1)^{-1}$, где n_1 - населенность нижнего уровня, k_{12} - проинтегрированный по профилю линии коэффициент поглощения (см. в предыдущем разделе), γ - безразмерный градиент скорости расширения среды. Функция R_{II} симметрична: $R_{II}(x, x_1) = R_{II}(x_1, x)$, и нормирована так, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{II}(x, x')dx' = \phi(x). \quad (29)$$

Для вычисления интеграла в правой части основного уравнения (26) использовалось представление $I(x, t)$ как функции x в виде квадратичного сплайна:

$$I(x, t) = I_j + b_j(x-x_j) + c_j(x-x_j)^2, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}, \quad j=0, 1, \dots, N, \quad c_j = \frac{b_{j+1} - b_j}{2(x_{j+1} - x_j)}, \quad (30)$$

причем для определения коэффициентов b_j имеется рекуррентное соотношение

$$b_j = -b_{j+1} + 2 \frac{I_{j+1} - I_j}{x_{j+1} - x_j}. \quad (31)$$

Начальная точка по частоте $x_0 < 0$ берется достаточно далекой в длинноволновом крыле. Мы полагаем в последней точке $b_N = 0$. В итоге имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{II}(x_k, x)I(x, t)dx = \sum_{m=0}^N q_{km} I_m, \quad (32)$$

где

$$q_{k0} = \Delta x_0 (A_{k0} - 2B_{k0} + C_{k0}), \quad (33)$$

$$q_{km} = \Delta x_m (A_{km} - 2B_{km} + C_{km}) + \Delta x_{m-1} C_{km-1} - 2(-1)^m \frac{\Delta x_m + \Delta x_{m-1}}{\Delta x_m \Delta x_{m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j (\Delta x_j)^2 (B_{kj} - C_{kj}), \quad 1 \leq m \leq N-1, \quad (34)$$

$$q_{kN} = \Delta x_{N-1} C_{kN-1} - 2 \frac{(-1)^N}{\Delta x_{N-1}} \sum_{j=0}^{N-1} (\Delta x_j)^2 (B_{kj} - C_{kj}). \quad (35)$$

Здесь $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, а коэффициенты

$$\{A_{kj}, B_{kj}, C_{kj}\} \equiv \int_0^1 R_{II}(x_k, x_j + t \Delta x_j) [1, t, t^2] dt. \quad (36)$$

Входящие сюда интегралы рассчитывались по квадратурной формуле Гаусса с 12-ю узлами.

В результате уравнение (26) принимает вид

$$\frac{dI_k(t)}{dt} = \gamma b_k(t) - \phi_k [I_k(t) - S_0(t)] + \lambda \sum_{m=0}^N q_{km} I_m(t), \quad (37)$$

где $I_k(t) = I(x_k, t)$, $b_k(t) = \partial I(x, t) / \partial x|_{x=x_k}$, $\phi_k = \phi(x_k)$. В последней по частоте точке x_N (в коротковолновом крыле линии) производная интенсивности по частоте b_N полагается равной нулю. Это условие позволяет однозначно определить коэффициенты квадратичного сплайна (которым представляется $I(x, t)$ как функция x) через значения в узлах. В частности имеем

$$b_k(t) = -2 \sum_{m=k}^N (-1)^{m+k} p_{km} I_m(t), \quad (38)$$

где

$$p_{km} = \begin{cases} 0, & m < k, \\ (\Delta x_k)^{-1}, & m = k, \\ (\Delta x_m)^{-1} + (\Delta x_{m-1})^{-1}, & k < m < N, \\ (\Delta x_{N-1})^{-1}, & m = N, \end{cases} \quad (39)$$

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m.$$

Подстановка в (37) разложения $I_k(t)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторого момента времени t_i

$$I_k(t) = I_k(t_i) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \frac{(t-t_i)^n}{n!}, \quad t > t_i, \quad (40)$$

дает для определения коэффициентов a_{nk} следующее рекуррентное (по n) соотношение:

$$a_{n+1k} = -\phi_k (a_{nk} - s_n) + \sum_{m=0}^N \bar{q}_{km} a_{nm}, \quad a_{0k} = I_k(t_i), \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (41)$$

где

$$\bar{q}_{km} = \lambda q_{km} - 2\gamma (-1)^{k+m} p_{km}, \quad s_n = \left. \frac{d^n S_0(t)}{dt^n} \right|_{t=t_i}. \quad (42)$$

Функция $R_{II}(x, x')$ рассчитывалась по программе А.Б.Шнейвайса, который использовал алгоритм, описанный в работе Адамса и др. [8].

Решались две задачи: 1) $I(x, 0) = \pi^{-1/2} e^{-x^2}$, $S_0(t) = 0$ и 2) $I(x, 0) = 0$, $S_0(t) = \gamma\theta(t)$, где $\theta(t)$ - функция единичного скачка. Первая соответствует "расплыванию" начального распределения по частоте в результате многократных рассеяний, вторая - включению стационарных первичных источников и

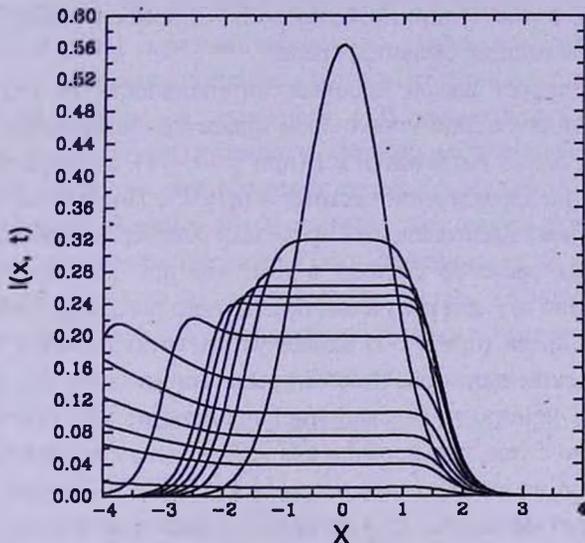


Рис.3. Эволюция профиля интенсивности излучения при резонансном рассеянии с ЧПЧ в бесконечной однородно расширяющейся среде. Начальный профиль $I(x, 0) = \pi^{-1/2} e^{-x^2}$, функция первичных источников $S_0(t) = 0$, $\gamma = 0.01$, $\lambda = 1$, $a = 0.01$. Различные кривые относятся к моментам времени $t/t_1 = 0, 12.5, 25, 37.5, 50, 62.5, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 1250$ - в порядке уменьшения высоты центрального плато.

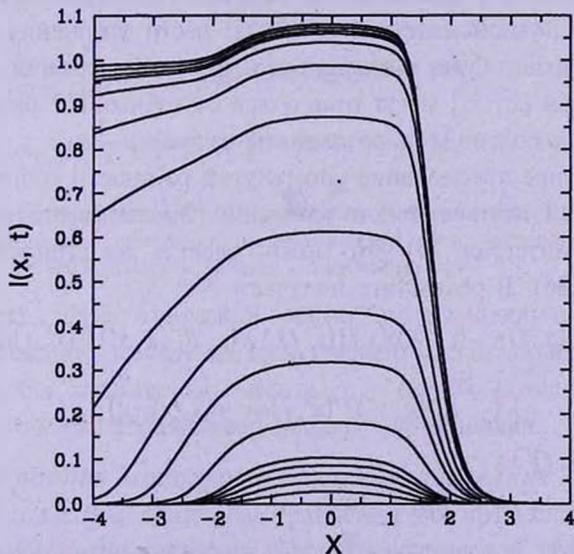


Рис.4. То же, что и на рис.3, но при $I(x, 0) = 0$ и $S_0(t) = 0$ при $t < 0$ и $S_0(t) = \gamma$ при $t \geq 0$ ($t/t_1 = 6.25, 12.5, 18.75, 25, 31.25, 62.5, 125, 188, 312, 625, 938, 1250, 1500-3750$ - в порядке увеличения высоты центрального плато).

установлению со временем стационарного распределения интенсивности излучения по частоте. На рис.3 представлено решение первой задачи, а на рис.4 - второй.

Как видно из рис.3, расширение среды препятствует расплыванию профиля в коротковолновую сторону и приводит к появлению "горба" в длинноволновой части профиля. Это связано с перекачкой фотонов из коротковолнового крыла в длинноволновое из-за доплеровского смещения частоты фотонов в расширяющейся среде.

Рис.4 демонстрирует выход профиля интенсивности на стационарное распределение, которое в длинноволновом крыле при выбранных значениях параметров ($\lambda = 1, S_0 = \gamma$) стремится к 1 (при $x \rightarrow -\infty$), а в коротковолновом резко обрывается на характерной частоте $\propto (a/\gamma)^{1/3}$. Подробные численные расчеты стационарных распределений проделали Хаммер и Райбики [9]. Одна из трудностей этих расчетов состоит в том, что при достаточно больших величинах отношения a/γ для получения правильного поведения интенсивности в длинноволновом крыле (при $x < -2$) начальную точку по частоте x_0 приходится брать в очень далеком длинноволновом крыле линии ($x_0 \ll -2$), хотя выход интенсивности на константу (насыщение) происходит уже при $x > -2$ (при $\lambda = 1$). Это связано с тем, что нормировка (29) должна выполняться с очень высокой точностью на выбранном интервале $[x_0, x_N]$, а поскольку в крыльях функция R_{II} убывает медленно, то и приходится выбирать начальную точку в очень далеком длинноволновом крыле (положение конечной точки в коротковолновом крыле не так существенно, так как здесь интенсивность резко убывает к нулю). Правильность такого вывода была подтверждена следующим численным экспериментом. Если рассчитывать $\phi(x)$ не по отдельной программе, а использовать ее представление (29) через функцию R_{II} и вычислять так же, как и основной интеграл в правой части уравнения (26), тогда упомянутая нормировка будет выполняться точно (хотя значения $\phi(x)$ вблизи концов промежутка $[x_0, x_N]$ могут отличаться от точных в 2 раза) и можно выбрать x_0 не очень большим по абсолютной величине.

Более аккуратное преодоление упомянутой трудности состоит в явном выделении в правой части основного уравнения (26) слагаемого, содержащего нормировочный интеграл (29). Это можно сделать, интегрируя по частям в правой части (26). В результате получаем

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} - \gamma I'(x, t) = -(1 - \lambda)\phi(x)I(x, t) - \lambda \int_{-\infty}^x R_1^-(x, x') I'(x', t) dx' + \\ + \lambda \int_x^{+\infty} R_1^+(x, x') I'(x', t) dx' + S_0(t)\phi(x), \quad (43)$$

где $I'(x, t) = \partial I(x, t) / \partial x$,

$$R_1^-(x, x') \equiv \int_{-\infty}^{x'} R_{II}(x, y) dy = \\ = \pi^{-3/2} \int_{(x-x)/2}^{\infty} e^{-u^2} \left[(x'+u) \left(\arctg \frac{x'+u}{a} - \arctg \frac{x-u}{a} \right) - \frac{a}{2} \ln \frac{(x'+u)^2 + a^2}{(x-u)^2 + a^2} \right] du, \quad x' \leq x, \quad (44)$$

$$R_1^{\pm}(x, x') \equiv \int_x^{x'} R_{II}(x, y) dy =$$

$$= \pi^{-3/2} \int_{|x'-x|/2}^{\infty} e^{-u^2} \left[(u-x') \left(\operatorname{arctg} \frac{x+u}{a} - \operatorname{arctg} \frac{x'-u}{a} \right) - \frac{a}{2} \ln \frac{(x+u)^2 + a^2}{(x'-u)^2 + a^2} \right] du, \quad x' \geq x. \quad (45)$$

При численном решении уравнения (43) уже не возникает упомянутых выше потерь точности. Результаты решения в стационарном случае при $S_0 = \gamma, \lambda = 1, a = 0.01$ и разных значениях γ приведены на рис.5. При этом интенсивность излучения представлялась квадратичным сплайном по частоте, интегралы по сплайну в уравнении (43) вычислялись аналитически, а оставшиеся однократные интегралы (входящие в определения $R_1^{\pm}(x, x')$) вычислялись численно при помощи стандартной адаптивной программы QUANC8. Следует отметить, что в стационарном случае при $\lambda = 1$ уравнение (43) содержит только производную $\Gamma(x)$ интенсивности по частоте. Обращает на себя внимание немонотонность поведения $\Gamma(x)$ при $-4 < \log \gamma < 0$, отмеченная в [9], где указано, что аналогичная немонотонность имеет место и при $a=0$.

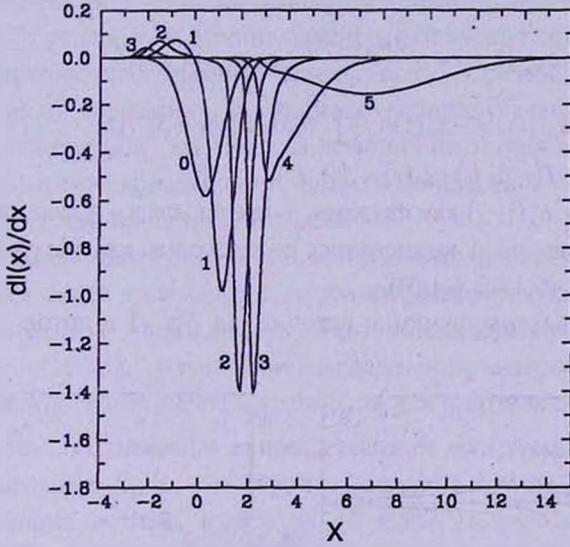


Рис.5. Профили производной интенсивности излучения при резонансном рассеянии с ЧПЧ в бесконечной однородно расширяющейся среде (стационарный случай) при $S_0 = \gamma, \lambda = 1, a = 0.01$. Числа у кривых - значения $-\log \gamma$.

Из рис.5 также следует, что резкий "обрыв" интенсивности в коротковолновую сторону происходит в том случае, когда градиент достаточно мал, но не слишком мал, так чтобы характерная частота $x_{\gamma} \propto (a/\gamma)^{1/3}$ находилась в пределах доплеровского ядра профиля коэффициента поглощения.

5. *Изотропное монохроматическое рассеяние в плоском слое конечной толщины.* Основные уравнения для интенсивности излучения $I(\tau, \mu, t)$ и функции источников $S(\tau, t)$ на оптической глубине τ в момент времени t :

$$t_2 \frac{\partial I(\tau, \mu, t)}{\partial t} - \mu \frac{\partial I(\tau, \mu, t)}{\partial \tau} = -I(\tau, \mu, t) + S(\tau, t), \quad (46)$$

$$t_1 \frac{\partial S(\tau, t)}{\partial t} = -S(\tau, t) + \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu, t) d\mu + S_0(\tau, t), \quad (47)$$

где μ - косинус угла с внешней нормалью, t_1 и t_2 - средние времена пребывания фотона в поглощенном состоянии и между рассеяниями соответственно, $S_0(\tau, t)$ - функция первичных источников. Использовались начальные и граничные условия двух типов:

- 1) $S_0(\tau, t) \neq 0$, $I(0, \mu, t) = 0$ при $\mu < 0$, $I(\tau_0, \mu, t) = 0$ при $\mu > 0$,
- 2) $S_0(\tau, t) = 0$, а $I(0, \mu, t)$ при $\mu < 0$ и $I(\tau_0, \mu, t)$ при $\mu > 0$ - заданные функции t и μ .

Подстановка разложений

$$I(\tau, \mu, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_1)^n}{n!} a_n(\tau, \mu), \quad S(\tau, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_1)^n}{n!} s_n(\tau) \quad (48)$$

в уравнения дает для определения коэффициентов следующие рекуррентные соотношения:

$$a_{n+1}(\tau, \mu) = \mu \frac{\partial a_n(\tau, \mu)}{\partial \tau} - a_n(\tau, \mu) + s_n(\tau), \quad (49)$$

$$as_{n+1}(\tau) = -s_n(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} a_n(\tau, \mu) d\mu + S_0^{(n)}(\tau), \quad (50)$$

причем $a_0(\tau, \mu) = I(\tau, \mu, t_1)$, $s_0(\tau) = S(\tau, t_1)$.

Коэффициент $a_n(\tau, \mu)$ как функция τ представлялся в виде квадратичного сплайна. Интегралы по μ вычислялись по гауссовым квадратурам (раздельно по промежуткам $(0, 1)$ и $(-1, 0)$).

На рис.6 приведены функция источников $S(\tau, t)$ и поток $F(\tau)$

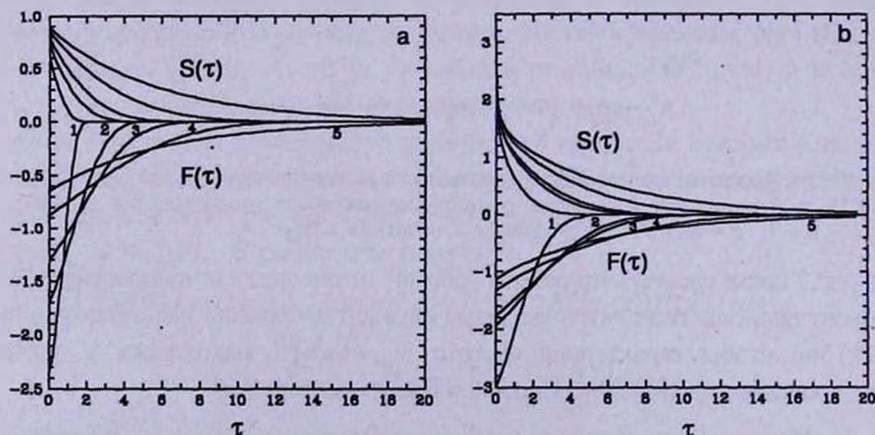


Рис.6. Эволюция распределений функции источников $S(\tau)$ и потока $F(\tau)$ при монохроматическом изотропном рассеянии в слое оптической толщины $\tau_0 = 100$ с $\epsilon = 10^{-2}$, $t_1 = 0$ при включении в момент $t=0$ внешнего освещения границы $\tau=0$ излучением с интенсивностью: а) $\lambda(\mu) = 1$, б) $\lambda(\mu) = 1/|\mu|$. Числа 1, 2, 3, 4 и 5 у кривых соответствуют моментам времени $t/t_1 = 1.87, 5.15, 10.2, 30.3, 257$ (случай а) и $5.14, 15.2, 19.5, 51.5, 275$ (случай б).

$$F(\tau, t) = 2\pi \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu, t) \mu d\mu \quad (51)$$

как функции τ в слое оптической толщины $\tau_0 = 100$ без внутренних источников при $\epsilon = 1 - \lambda = 0.01$ для случая включения в момент $t=0$ внешнего освещения на границе $\tau = 0$ (кривые с отрицательными ординатами соответствуют потоку, а с положительными - функции источников). Рис.6а соответствует изотропному освещению с единичной интенсивностью, а рис.6б - анизотропному освещению с интенсивностью $I(0, \mu, t) = 1/|\mu|$. С течением времени функция источников растет, а поток на границе уменьшается по абсолютной величине. На достаточно больших временах решения выходят с высокой точностью на стационарный режим.

6. *Заключение.* Из рассмотренных выше примеров видно, что в отличие от аналитических решений численные решения нестационарных задач (особенно нелинейных) оказывается получить проще, чем решения соответствующих стационарных задач. Объяснение с математической точки зрения состоит в том, что нестационарные решения - это решения эволюционного типа: текущее решение целиком определяется решением в предыдущий момент, тогда как стационарные решения в теории переноса излучения это, как правило, - решения двухточечных краевых задач. Таким образом, может оказаться целесообразным получение численного решения стационарной задачи (особенно, нелинейной) как предела решения нестационарной задачи. При этом для уменьшения времени счета можно использовать в качестве начального какое-либо хорошее приближенное решение.

Предложенный нами численный метод можно применять и для решения других кинетических уравнений, а не только уравнения переноса излучения. Например, в задаче о многократном комптоновском рассеянии можно учесть взаимное влияние поля излучения и распределения электронов по скоростям, решив совместно кинетические уравнения для фотонов и электронов.

Благодарю А.Б.Шнейвайса за предоставление программы расчета функции перераспределения $R_{II}(x, x')$. Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ "Ведущие научные школы" 00-15-96607, по федеральной программе "Астрономия" и по программе "Интеграция".

Астрономический институт им. В.В.Соболева, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

NEW METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF
NONSTATIONARY RADIATIVE TRANSFER PROBLEMS

S.I.GRACHEV

We propose a general numerical method to solve any nonstationary radiative transfer problem. The essence of the method is as follows. Suppose we know solution at some time moment t (for example, at the initial moment). Then, we represent radiation intensity, as well as all quantities depending on time (occupation numbers, kinetic temperature, etc.), as Taylor expansions in the vicinity of t . By substituting these expansions into the transfer equation and related equations (for occupation numbers, energy balance, etc.) we get some recurrent relations to obtain all the coefficients of the expansions, i.e. all time derivatives of all time dependent quantities at the moment t . So, using Taylor expansions, we can calculate solution at some next moment $t + \Delta t$ and so on. The method allows to consider nonstationary radiative transfer in stationary media as well as in media with properties depending on time by given law. Moreover this method allows to solve nonlinear problems, i.e. the problems in which the radiation field has an essential effect on the properties of the medium. It must be stressed that there are no iterations in this method: all that we do are the calculations through some recurrent relations. As the examples we present solutions of several problems both linear and nonlinear.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.В.Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
2. *В.А.Амбарцумян*, Научные труды, т.3, Ереван, 1988.
3. *К.Кейз, П.Цвайфель*, Линейная теория переноса, Мир, М., 1972. (Пер. с англ.: *K.M.Case, P.F.Zweifel*, Linear Transport Theory, Addison-Wesley. Reading. Mass. 1967.)
4. *И.Н.Минин*, Теория переноса излучения в атмосферах планет, Наука, М., 1988.
5. *Д.И.Нагурнер*, *Астрофизика*, **10**, 445, 1974.
6. *В.П.Гринин*, Труды астрон. обсерв. СПбГУ, **44**, 236, 1994.
7. *D.G.Hummer*, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, **125**, 21, 1962.
8. *T.F.Adams, D.G.Hummer, G.B.Rybicki*, *JQSRT*, **11**, 1365, 1971.
9. *D.G.Hummer, G.B.Rybicki*, *Astrophys. J.*, **387**, 248, 1992.