АСТРОФИЗИКА

ТОМ 44 НОЯБРЬ, 2001 ВЫПУСК 4

УДК: 52+530.145+519.222

РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ, ОГРАНИЧЕННОМ С ОБЕИХ СТОРОН ДВУМЯ РАЗЛИЧНЫМИ ОДНОРОДНЫМИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ СРЕДАМИ

А.Ж.ХАЧАТРЯН[1], Д.М.СЕДРАКЯН[2], Н.М.ИСПИРЯН[2]

Поступила 1 июня 2001

В настоящей работе рассматривается задача прохождения плоской электромагнитной волны через произвольный неоднородный диэлектрический слой, граничащий с обеих сторон с двумя различными однородными полубесконечными средами. Получены алгебраические соотношения между амплитудами прохождения и отражения (амплитуды рассеяния) для рассматриваемой задачи и амплитудами рассеяния волны, когда слой граничит с обеих сторон с вакуумом. Доказано, что для s и p поляризованных полей задача рассеяния (граничная задача) может быть сформулирована как задача Коши непосредственно для s и p волновых уравнений. Показано также, что задача нахождения значения поля внутри слоя, в общем случае, также сводится к задаче Коши.

1. *Введение*. Как известно, разработка методов описания переноса лучистой энергии в среде со сложно меняющимися характеристиками является одной из актуальных задач теории волн [1-4] и имеет важное значение для различных прикладных задач астрофизики [1,2]. Основываясь на методе В.А.Амбарцумяна "о добавлении слоя к среде", в работах [5,6] была рассмотрена задача рассеяния плоской электромагнитной волны, падающей наклонно на произвольный одномерный диэлектрический слой, граничащий с обеих сторон с вакуумом.

В данной работе нами рассматривается та же самая задача для случая, когда одномерный диэлектрический слой граничит с обеих сторон с двумя однородными диэлектрическими средами. Более того, в работе предлагается метод для определения значения поля внутри слоя. Диэлектрическая константа для рассматриваемой задачи может быть представлена как

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}\varepsilon_1, & x<0,\\ \varepsilon(x), & 0<x<d,\\ \varepsilon_2, & x>d,\end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon(x)$ - произвольная функция и, в общем случае ε_1, ε_2 различны.

Пусть волновой вектор падающей волны $\bar{k}$ расположен в плоскости (x, y). Тогда, рассматривая электрическую и магнитную компоненты поля как реальные части комплексных векторов $\bar{E}\exp\{-i\omega t\}$ и $\bar{H}\exp\{-i\omega t\}$, пространственную зависимость $\bar{E}$ и $\bar{H}$ можно записать в виде

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{E}_0 \exp\{i\vec{k}\vec{r}\} + \vec{E}_r \exp\{i\vec{k}_r\vec{r}\}, & x < 0, \\ \vec{E}_t \exp\{i\vec{k}_t\vec{r}\}, & x > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\vec{E}_0$, $\vec{E}_r$ и $\vec{E}_t$ являются амплитудами падающей, отраженной и прошедшей волн соответственно. Отметим, что аналогичное (2) поведение имеет также магнитная компонента поля. Обозначая угол падения через α, волновые векторы падающей и отраженной волн можно представить

$$\vec{k} = k_1 \cos\alpha\, \vec{e}_1 + k_1 \sin\alpha\, \vec{e}_2 \quad \text{и} \quad \vec{k}_r = -k_1 \cos\alpha\, \vec{e}_1 + k_1 \sin\alpha\, \vec{e}_2, \tag{3}$$

где $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1}/c$ и $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ являются базисными векторами. Вследствие сохранения плотности потока энергии электромагнитной волны, волновой вектор прошедшей волны не зависит от показателя преломления слоя и определяется только углом падения и показателями преломления первой и второй полубесконечных сред:

$$\vec{k}_t = k_2 \cos\beta\, \vec{e}_1 + k_2 \sin\beta\, \vec{e}_2, \tag{4}$$

где β - угол преломления $\left(\sqrt{\varepsilon_1}\sin\alpha = \sqrt{\varepsilon_2}\sin\beta\right)$ и $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2}/c$.

Как известно, произвольно поляризованная плоская волна может быть представлена как суперпозиция так называемых *s* и *p* - поляризованных волн. Для *s* - поля вектор электрического поля находится в плоскости, параллельной плоскости слоя $\left(\vec{E} = (0,0,E)\right)$. В случае *p* - поля электрический вектор расположен в плоскости падения, соответственно магнитная компонента параллельна плоскости слоя $\left(\vec{H} = (0,0,H)\right)$. Рассматривая для *s* и *p* волн $E = E^s(x)V(y)$ и $H = H^p(x)U(y)$, из уравнений Максвелла и асимптотического условия (2), можно для $E^s(x)$ и $H^p(x)$ записать следующие волновые уравнения [1]:

$$\frac{d^2E^s(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon(x) - \varepsilon_1\sin^2\alpha\right)E^s(x) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varepsilon(x)}\frac{dH^p(x)}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_1\sin^2\alpha}{\varepsilon(x)}\right)H^p(x) = 0. \tag{6}$$

Отметим, что, согласно закону преломления, член $\varepsilon_1\sin^2\alpha$ в (5) и (6) можно было записать в виде $\varepsilon_2\sin^2\beta$. Последнее обстоятельство выражает тот факт, что угол преломления β не зависит от параметров слоя (толщины слоя и его показателя преломления) и определяется исключительно только углом падения α и диэлектрическими константами первой и второй полубесконечных сред ε_1, ε_2.

Используя граничные условия (2), для комплексных амплитуд прохождения и отражения для *s* и *p* волн можно записать

$$T^s_{1,2} = \frac{E^s_t}{E^s_0}, \quad R^s_{1,2} = \frac{E^s_r}{E^s_0}, \quad \text{и} \quad T^p_{1,2} = \frac{H^p_t}{H^p_0}, \quad R^p_{1,2} = \frac{H^p_r}{H^p_0}. \tag{7}$$

Задача заключается в определении амплитуд рассеяния (7) в зависимости от угла падения α для произвольно заданного показателя преломления

$n(x) = \sqrt{\varepsilon(x)}$ (1). Используя уравнения (5), (6), легко убедиться, что следующие величины, составленные из электрической и магнитной компонент поля для s и p волн, не зависят от x:

$$E^s \frac{d(E^s)^*}{dx} - (E^s)^* \frac{dE^s}{dx} = \text{const}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\varepsilon(x)}\left[H^p \frac{d(H^p)^*}{dx} - (H^p)^* \frac{dH^p}{dx}\right] = \text{const}. \tag{9}$$

Условия (8), (9) выражают закон сохранения плотности потока электромагнитной волны для s и p волн соответственно. Используя асимптотическое поведение поля левее и правее от слоя, из (8), (9) между амплитудами прошедшей и отраженных волн могут быть установлены следующие соотношения:

$$k_1 \cos\alpha\left(\left|E_0^s\right|^2 - \left|E_r^s\right|^2\right) = k_2 \cos\beta\left|E_t^s\right|^2, \tag{10}$$

$$\frac{k_1 \cos\alpha}{\varepsilon_1}\left(\left|H_0^p\right|^2 - \left|H_r^p\right|^2\right) = \frac{k_2 \cos\beta}{\varepsilon_2}\left|H_t^p\right|^2. \tag{11}$$

Обозначая через $T_{s,p}$ и $R_{s,p}$ коэффициенты прохождения и отражения для s и p волн, из (10), (11) и (7) получим

$$R_s = \left|R_{1,2}^s\right|^2,\ R_p = \left|R_{1,2}^p\right|^2 \text{ и } T_s = \frac{k_2 \cos\beta}{k_1 \cos\alpha}\left|T_{1,2}^s\right|^2,\ T_p = \frac{k_1 \cos\beta}{k_2 \cos\alpha}\left|T_{1,2}^p\right|^2. \tag{12}$$

Во втором разделе показано, что задача рассеяния электромагнитной волны на диэлектрическом слое, расположенном между двумя однородными полубесконечными средами, может быть сведена к задаче рассеяния волны на том же слое, граничащем с обеих сторон с вакуумом. Получены алгебраические соотношения между амплитудами рассеяния волны для этих двух задач. Далее, в третьем разделе показано, что рассматриваемая задача в общем виде может быть сформулирована как задача Коши для волнового уравнения. В четвертом разделе рассматривается задача определения волнового поля во всем пространстве. В заключении обсуждаются результаты работы.

2. *Задача рассеяния на диэлектрическом слое, находящемся между двумя однородными полубесконечными средами.* Рассмотрим задачу рассеяния плоской электромагнитной волны на слое с произвольной диэлектрической константой $\varepsilon(x)$, заключенной между двумя различными полубесконечными средами с диэлектрическими константами ε_1 и ε_2 (1). Общие решения уравнений (5) и (6) в областях $x<0$ и $x>d$ можно записать в виде

$$\begin{cases} A^{s,p} \exp\{ik_{1x}x\} + B^{s,p} \exp\{-ik_{1x}x\}, & x < 0, \\ C^{s,p} \exp\{ik_{2x}x\} + D^{s,p} \exp\{-ik_{2x}x\}, & x > d, \end{cases} \tag{13}$$

где $k_{1x} = k_1 \cos\alpha$, $k_{2x} = k_2 \cos\beta$. Тогда, согласно методу матриц переноса [3,4], между коэффициентами решения (13) существует линейная связь:

$$\begin{pmatrix} C^{s,p} \\ D^{s,p} \end{pmatrix} = \frac{k_{1,x}^{s,p}}{k_{2,x}^{s,p}} \begin{pmatrix} \left(1/T_{1,2}^{s,p}\right)^{*} & \left(-R_{1,2}^{s,p}/T_{1,2}^{s,p}\right)^{*} \\ -R_{1,2}^{s,p}/T_{1,2}^{s,p} & 1/T_{1,2}^{s,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{s,p} \\ B^{s,p} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $T_{1,2}^{s,p}$ и $R_{1,2}^{s,p}$ являются амплитудами прохождения и отражения для s и p волн (7), соответственно. Заметим, что в случае s поляризованной $k_{1.x}^{s} = k_{1,x}$, $k_{2.x}^{s} = k_{2,x}$ и для p - волны $k_{1.x}^{p} = k_{1.x}/\varepsilon_1$ и $k_{2.x}^{p} = k_{2x}/\varepsilon_2$.

Введем следующие матрицы переноса:

$$Q_{1,0}^{s,p} = \frac{k_{1x}}{k_{0x}} \begin{pmatrix} \left(1/t_{1,0}^{s,p}\right)^{*} & \left(-r_{1,0}^{s,p}/t_{1,0}^{s,p}\right)^{*} \\ -r_{1,0}^{s,p}/t_{1,0}^{s,p} & 1/t_{1,0}^{s,p} \end{pmatrix} \text{ и } Q_{0,2}^{s,p} = \frac{k_{0x}}{k_{2x}} \begin{pmatrix} \left(1/t_{0,2}^{s,p}\right)^{*} & \left(-r_{0,2}^{s,p}/t_{0,2}^{s,p}\right)^{*} \\ -r_{0,2}^{s,p}/t_{0,2}^{s,p} & 1/t_{0,2}^{s,p} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $k_{0x} = \omega/c\cos\gamma$ и $\sin\gamma = \sqrt{\varepsilon_1}\sin\alpha = \sqrt{\varepsilon_2}\sin\beta$. В (15) $t_{1,0}$, $r_{1,0}$ ($t_{0,2}$, $r_{0,2}$) являются амплитудами прохождения и отражения электромагнитной волны для первой полубесконечной среды, когда справа от нее вакуум (для второй полубесконечной среды, когда слева от нее вакуум). Амплитуды $t_{1,0}^{s,p}$, $r_{1,0}^{s,p}$ и $t_{0,2}^{s,p}$, $r_{0,2}^{s,p}$ можно записать в виде

$$\frac{1}{t_{0,2}^{s}} = \frac{k_{0x}+k_{2x}}{2k_{0x}} \exp\{i(k_{2x}-k_{0x})d\}, \quad \frac{r_{0,2}^{s}}{t_{0,2}^{s}} = \frac{k_{0x}-k_{2x}}{2k_{0x}} \exp\{i(k_{2x}+k_{0x})d\}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{t_{0,2}^{p}} = \frac{\varepsilon_2 k_{0x}+k_{2x}}{2\varepsilon_2 k_{0x}} \exp\{i(k_{2x}-k_{0x})d\}, \quad \frac{r_{0,2}^{p}}{t_{0,2}^{p}} = \frac{\varepsilon_2 k_{0x}-k_{2x}}{2\varepsilon_2 k_{0x}} \exp\{i(k_{2x}+k_{0x})d\}. \tag{17}$$

Выражения для $t_{1,0}^{s}$, $r_{1,0}^{s}$ получаются из (16) подстановкой $d=0$, с последующей заменой k_{0x} на k_{1x} и k_{2x} на k_{0x}. Выражения для $t_{1,0}^{p}$, $r_{1,0}^{p}$ получаются из (17) подстановкой $d=0$, с последующей заменой $\varepsilon_2 k_{0x}$ на k_{1x} и k_{2x} на $\varepsilon_1 k_{0x}$.

Согласно подходу, развитому в работах [5,7], матрица переноса для всей системы (14) может быть представлена как произведение матриц (15) и матрицы переноса слоя, граничащего с обеих сторон с вакуумом:

$$U_{1,2}^{s,p} = Q_{0,2}^{s,p} U^{s,p} Q_{1,0}^{s,p}, \tag{18}$$

где $U^{s,p}$ - матрица переноса для слоя, граничащего с обеих сторон с вакуумом:

$$U^{s,p} = \begin{pmatrix} \left(1/T^{s,p}\right)^{*} & \left(-R^{s,p}/T^{s,p}\right)^{*} \\ -R^{s,p}/T^{s,p} & 1/T^{s,p} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где $T^{s,p}$, $R^{s,p}$ являются амплитудами прохождения и прохождения s и p волн для слоя, граничащего с обеих сторон с вакуумом.

Используя (16)-(19), между амплитудами рассеяния $T_{1,2}^{s,p}$, $R_{1,2}^{s,p}$ и $T^{s,p}$, $R^{s,p}$ можно установить алгебраические соотношения. Для случая s - волн эти соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{1,2}^{s}} = \frac{\exp\{ik_{2x}d\}}{4k_{1x}k_{0x}} \Big[&(k_{2x}-k_{0x})(k_{0x}-k_{1x})a^{s} + (k_{2x}+k_{0x})(k_{0x}+k_{1x})\left(a^{s}\right)^{*} + \\ &+ (k_{0x}+k_{2x})(k_{1x}-k_{0x})b^{s} + (k_{0x}-k_{2x})(k_{0x}+k_{1x})\left(b^{s}\right)^{*} \Big], \end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{R^s_{1,2}}{T^s_{1,2}}=\frac{\exp\{ik_{2x}d\}}{4k_{1x}k_{0x}}\Big[(k_{0x}-k_{2x})(k_{0x}+k_{1x})a^s+(k_{1x}-k_{0x})(k_{0x}+k_{2x})\big(a^s\big)^*+$$
$$+(k_{0x}+k_{2x})(k_{0x}+k_{1x})b^s+(k_{2x}-k_{0x})(k_{0x}-k_{1x})\big(b^s\big)^*\Big], \tag{21}$$

где

$$a^s=\exp\{ik_{0x}d\}/\big(T^s\big)^*,\quad b^s=R^s\exp\{-ik_{0x}d\}/T^s. \tag{22}$$

Для случая p - волн соотношения имеют вид

$$\frac{1}{T^p_{1,2}}=\frac{\exp\{ik_{2x}d\}}{4\varepsilon_2 k_{1x}k_{0x}}\Big[(k_{2x}-\varepsilon_2 k_{0x})(\varepsilon_1 k_{0x}-k_{1x})a^p+$$
$$+(k_{2x}+\varepsilon_2 k_{0x})(\varepsilon_1 k_{0x}+k_{1x})\big(a^p\big)^*+(\varepsilon_2 k_{0x}+k_{2x})(k_{1x}-\varepsilon_1 k_{0x})b^p+ \tag{23}$$
$$+(\varepsilon_2 k_{0x}-k_{2x})(\varepsilon_1 k_{0x}+k_{1x})\big(b^p\big)^*\Big],$$

$$\frac{R^p_{1,2}}{T^p_{1,2}}=\frac{\exp\{ik_{2x}d\}}{4\varepsilon_2 k_{1x}k_{0x}}\Big[(\varepsilon_2 k_{0x}-k_{2x})(\varepsilon_1 k_{0x}+k_{1x})a^p+$$
$$+(k_{1x}-\varepsilon_1 k_{0x})(\varepsilon_2 k_{0x}+k_{2x})\big(a^p\big)^*+(\varepsilon_2 k_{0x}+k_{2x})(\varepsilon_1 k_{0x}+k_{1x})b^p+ \tag{24}$$
$$+(k_{2x}-\varepsilon_2 k_{0x})(\varepsilon_1 k_{0x}-k_{1x})(b)^{p^*}\Big],$$

где

$$a^p=\exp\{ik_{0x}d\}/\big(T^p\big)^*,\quad b^p=R^p\exp\{-ik_{0x}d\}/T^p. \tag{25}$$

Как следует из полученного результата (20) - (25), задача определения амплитуд рассеяния $T^{s,p}_{1,2}$, $R^{s,p}_{1,2}$ для слоя, заключенного между двумя различными однородными полубесконечными средами, сводится к задаче определения амплитуд рассеяния $T^{s,p}$, $R^{s,p}$ для того же слоя, граничащего с обеих сторон с вакуумом. Заметим, что в случае нормального падения $(R^s=-R^p, T^s=T^p)$ между амплитудами рассеяния электрической компоненты s - волны $T^s_{1,2}$, $R^s_{1,2}$ и амплитудами рассеяния магнитной компоненты p - волны $T^p_{1,2}$, $R^p_{1,2}$ существует связь $R^s_{1,2}=-R^p_{1,2}$, $\sqrt{\varepsilon_2}\,T^s_{1,2}=\sqrt{\varepsilon_1}\,T^p_{1,2}$. Из последнего непосредственно следует, что в случае нормального падения $\alpha=\beta$ коэффициенты прохождения и отражения для s и p (12) волн равны друг другу.

3. *Задача рассеяния как задача Коши для волнового уравнения.* В разделе 2 было показано, что между амплитудами рассеяния электромагнитной волны, падающей на диэлектрический слой, помещенный между двумя однородными полубесконечными средами, и амплитудами рассеяния волны, когда слой граничит с обеих сторон с вакуумом, существуют алгебраические соотношения (см. формулы (20)-(25)). Как будет показано ниже, задача определения $T^{s,p}_{1,2}$, $R^{s,p}_{1,2}$, в общем виде, может быть сформулирована как задача Коши непосредственно для волновых уравнений (5), (6).

Согласно подходу, развитому в [5,6], амплитуды рассеяния $T^{s,p}$, $R^{s,p}$ слоя с непрерывным показателем преломления ($\varepsilon(x)$ - непрерывная функция) и граничащего с обеих сторон с вакуумом могут быть выражены через значения реальных функций $P_{1,2}^{s,p}(x)$, $N_{1,2}^{s,p}(x)$ в точке $x=d$ с помощью следующих формул [9]:

$$\frac{1}{T^{s,p}}=\frac{1}{2}\exp\{ik_{0x}d\}\left[\left(P_1^{s,p}(d)+N_2^{s,p}(d)\right)-i\left(N_1^{s,p}(d)-P_2^{s,p}(d)\right)\right], \qquad (26)$$

$$\frac{R^{s,p}}{T^{s,p}}=-\frac{1}{2}\exp\{ik_{0x}d\}\left[\left(H_1^{s,p}(d)-P_2^{s,p}(d)\right)-i\left(N_1^{s,p}(d)+P_2^{s,p}(d)\right)\right]. \qquad (27)$$

Функции $P_{1,2}^{s,p}$, $N_{1,2}^{s,p}$ определяются решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dN_{1,2}^s}{dx}=\frac{\omega^2}{c^2}\left[\frac{\varepsilon_1\sin^2\alpha-\varepsilon(x)}{k_{0x}}\right]P_{1,2}^s \quad \text{и} \quad \frac{dP_{1,2}^s}{dx}=-k_{0x}N_{1,2}^s, \qquad (28)$$

$$\frac{dN_{1,2}^p}{dx}=\frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{k_{0x}}\left[1-\frac{\varepsilon_1\sin^2\alpha}{\varepsilon(x)}\right]P_{1,2}^p \quad \text{и} \quad \frac{d\,P_{1,2}^p}{dx}=-\varepsilon(x)k_{0x}N_{1,2}^p, \qquad (29)$$

с начальными условиями

$$P_1^{s,p}=1, \quad P_2^{s,p}=0 \quad \text{и} \quad N_1^{s,p}=0, \quad N_2^{s,p}=1. \qquad (30)$$

Из (28), (29) легко увидеть, что функции $P_{1,2}^s(x)$ и $P_{1,2}^p(x)$ удовлетворяют уравнениям (5), (6). Заметим, что в (28), (29) $k_{0x}=\omega/c\cos\gamma$, где γ является углом падения волны из вакуума на слой и для определения $T^{s,p}$, $R^{s,p}$ из (20)-(25) необходимо учитывать, что $\sin\gamma=\sqrt{\varepsilon_1}\sin\alpha=\sqrt{\varepsilon_2}\sin\beta$.

Используя (28), (29) и (23)-(25), амплитуды рассеяния $T_{1,2}^{s,p}$, $R_{1,2}^{s,p}$ для слоя, заключенного между двумя различными однородными полубесконечными средами, также могут быть выражены через значения функций $P_{1,2}^{s,p}(x)$, $N_{1,2}^{s,p}(x)$ в точке $x=d$;

$$\frac{1}{T_{1,2}^s}=\frac{1}{2}\exp\{ik_{2x}d\}\left[\left(\frac{k_{2x}}{k_{1x}}H_1^s(d)+P_2^s(d)\right)-i\left(\frac{k_{0x}}{k_{1x}}N_1^s(d)-\frac{k_{2x}}{k_{0x}}P_2^s(d)\right)\right], \qquad (31)$$

$$\frac{R_{1,2}^s}{T_{1,2}^s}=-\frac{1}{2}\exp\{ik_{2x}d\}\left[\left(\frac{k_{2x}}{k_{1x}}P_1^s(d)-N_2^s(d)\right)-i\left(\frac{k_{0x}}{k_{1x}}N_1^s(d)+\frac{k_{2x}}{k_{0x}}P_2^s(d)\right)\right], \qquad (32)$$

$$\frac{1}{T_{1,2}^p}=\frac{1}{2}\exp\{ik_{2x}d\}\left[\left(\frac{\varepsilon_1 k_{2x}}{\varepsilon_2 k_{1x}}P_1^p(d)+N_2^p(d)\right)-i\left(\frac{\varepsilon_1 k_{0x}}{k_{1x}}N_1^p(d)-\frac{k_{2x}}{\varepsilon_2 k_{0x}}P_2^p(d)\right)\right], \qquad (33)$$

$$\frac{R_{1,2}^p}{T_{1,2}^p}=-\frac{1}{2}\exp\{ik_{2x}d\}\left[\left(\frac{\varepsilon_1 k_{2x}}{\varepsilon_2 k_{1x}}P_1^p(d)-N_2^p(d)\right)-i\left(\frac{\varepsilon_1 k_{0x}}{k_{1x}}N_1^p(d)+\frac{k_{2x}}{\varepsilon_2 k_{0x}}P_2^p(d)\right)\right]. \qquad (34)$$

Как следует из полученного результата (31)-(34) и (28)-(30), задача определения амплитуд рассеяния для s и p волн $T_{1,2}^{s,p}=T_{1,2}^{s,p}(x=d)$, $R_{1,2}^{s,p}=R_{1,2}^{s,p}(x=d)$ сводится к задаче Коши для "s и p" волновых уравнений (5), (6) соответственно.

Интересно применение результата (28)-(34) для простого случая, когда слой между двумя полубесконечными средами является однородным ($\varepsilon(x)=\varepsilon=\text{const}$). В этом случае для функций $P_{1,2}^{s,p}(x)$, $N_{1,2}^{s,p}(x)$ из (28)-(30) имеем

$$P_1^s = \cos k_x x,\ N_1^s = \frac{k_x}{k_{0x}}\sin k_x x,\ P_2^s = -\frac{k_{0x}}{k_x}\sin k_x x,\ N_2^s = \cos k_x x, \tag{35}$$

$$P_1^p = \cos k_x x,\ N_1^s = \frac{k_x}{\varepsilon k_{0x}}\sin k_x x,\ P_2^s = -\frac{\varepsilon k_{0x}}{k_x}\sin k_x x,\ N_2^s = \cos k_x x, \tag{36}$$

где $k_x = \omega/c\sqrt{\varepsilon}\cos\varphi$ и $\varepsilon \sin\varphi = \sin\gamma$. Подставляя (35) в (31), (32) и (36) в (33), (34), получим

$$\frac{1}{T_{1,2}^s} = \exp\{ik_{2x}d\}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{k_{2x}}{k_{1x}}\right)\cos\{k_x d\} - i\frac{k_{2x}k_{1x}+k_x^2}{2k_{1x}k_x}\sin\{k_x d\}\right], \tag{37}$$

$$\frac{R_{1,2}^s}{T_{1,2}^s} = \exp\{ik_{2x}d\}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{k_{2x}}{k_{1x}}\right)\cos\{k_x d\} + i\frac{k_x^2-k_{1x}k_{2x}}{2k_{1x}k_x}\sin\{k_x d\}\right], \tag{38}$$

$$\frac{1}{T_{1,2}^p} = \exp\{ik_{2x}d\}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon_1 k_{2x}}{\varepsilon_2 k_{1x}}\right)\cos\{k_x d\} - i\frac{\varepsilon^2 k_{2x}k_{1x}+\varepsilon_2\varepsilon_1 k_x^2}{2\varepsilon\varepsilon_2 k_{1x}k_x}\sin\{k_x d\}\right], \tag{39}$$

$$\frac{R_{1,2}^p}{T_{1,2}^p} = \exp\{ik_{2x}d\}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon_1 k_{2x}}{\varepsilon_2 k_{1x}}\right)\cos\{k_x d\} + i\frac{\varepsilon_2\varepsilon_1 k_{0x}^2-\varepsilon^2 k_{1x}k_{2x}}{2\varepsilon\varepsilon_2 k_{1x}k_x}\sin\{k_x d\}\right]. \tag{40}$$

и $\sqrt{\varepsilon_1}\sin\alpha = \sqrt{\varepsilon}\sin\varphi = \sqrt{\varepsilon_2}\sin\beta$, где α является углом падения волны из первой полубесконечной среды на слой, φ есть угол преломления волны в слое, β является углом преломления волны во второй полубесконечной среде.

Выражения (37)-(40) определяют амплитуды отражения и прохождения для s и p поляризованных волн, в случае однородного слоя, заключенного между двумя различными полубесконечными средами.

Пусть для определенности в (37)-(40) величина k_{2x} реальная, т.е. будем полагать, что $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ или же при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ угол падения α меньше предельного угла полного внутреннего отражения α' $\left(\sin\alpha' = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\right)$ для соприкасающихся друг с другом первой и второй полубесконечных сред. Из (37)-(40) можно получить условие полного прохождения для s и p волн. Заметим, что в случае, когда k_x мнимая величина ($\varepsilon_1 < \varepsilon$ или же $\alpha > \alpha''$ и $\sin\alpha'' = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_1}$), как для s, так и для p поляризаций всегда существуют отраженная и прошедшая волны.

Когда k_x реальная величина, условие $R_{1,2}^s = 0$ равносильно тому, что параметры задачи должны одновременно удовлетворять следующим двум уравнениям:

$$k_{1x} = k_{2x} \quad \text{и} \quad \sin k_x d = 0. \tag{41}$$

Из (41) следует, что полное прохождение s - волны через слой возможно только, когда первая и вторая полубесконечные среды идентичны ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) и $k_x d = \pi n$, где $n = 1,\ 2,\ \ldots$

В случае p - поляризации, из (40) для условия $R^p = 0$ получим следующие два уравнения:

$$\varepsilon_2 k_{1x} = \varepsilon_1 k_{2x} \quad \text{и} \quad \sin k_x d = 0. \tag{42}$$

Заметим, что первое уравнение (42) совпадает с известным условием

Брюстера для полного прохождения p поляризованной волны для соприкасающихся друг с другом первой и второй полубесконечных сред ($\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}$) [1]. Как следует из (42), условие $R^p = 0$ возможно только в случае, когда угол падения $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}$ и $k_x d = \pi n$, где $n = 1, 2, \ldots$

4. *Волновое поле внутри слоя.* Для определения поля внутри слоя мы поступим аналогично методу, развитому в работе [9] для определения волновой функции электрона внутри слоя с произвольным неоднородным потенциалом. Будем искать волновое поле во всем пространстве в следующем виде:

$$\psi^{s,p}(x) = A^{s,p}(x)\exp\{ik_x(x)x\} + B^{s,p}(x)\exp\{-ik_x(x)x\}, \tag{43}$$

где $k_x(x) = \omega/c\sqrt{\varepsilon(x)}\cos\varphi(x)$ и $\sqrt{\varepsilon(x)}\sin\varphi(x) = \sqrt{\varepsilon_1}\sin\alpha$. Заметим, что в (43) через $\psi^s(x)$ обозначена электрическая компонента s поляризованного поля $E^s(x)$ (5) и через $\psi^p(x)$ обозначена магнитная компонента p поляризованного поля $H^p(x)$ (6). Как следует из (13), при $x < 0$, $A^{s,p}(x) = A^{s,p}$, $B^{s,p}(x) = B^{s,p}$ и при $x > d$ $A^{s,p}(x) = C^{s,p}$, $B^{s,p}(x) = D^{s,p}$.

Для описания волнового поля внутри слоя предположим, что в малой области возле точки x среда однородна и характеризуется постоянной диэлектрической константой $\varepsilon(x)$. Тогда, согласно подходу, развитому в разделах 2, 3 и методу матриц переноса [3,4], между амплитудами поля левее точки $x=0$ $A^{s,p}$, $B^{s,p}$ и амплитудами поля внутри слоя в точке x $(0 < x < d)$ $A^{s,p}(x)$, $B^{s,p}(x)$ существуют линейные соотношения. Для s волны

$$\begin{pmatrix} A^s(x) \\ B^s(x) \end{pmatrix} = \frac{k_{1x}}{k_x(x)} \begin{pmatrix} \left(\delta^s_{1,2}(x)\right)^* & \left(\gamma^s_{1,2}(x)\right)^* \\ \gamma^s_{1,2}(x) & \delta^s_{1,2}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^s \\ B^s \end{pmatrix}, \tag{44}$$

где

$$\delta^s_{1,2}(x) = \frac{1}{2}\exp\{ik_x(x)x\}\left[\left(\frac{k_x(x)}{k_{1x}}P^s_1(x) + N^s_2(x)\right) - i\left(\frac{k_{0x}}{k_{1x}}N^s_1(x) - \frac{k_x(x)}{k_{0x}}P^s_2(x)\right)\right], \tag{45}$$

$$\gamma^s_{1,2}(x) = \frac{1}{2}\exp\{ik_x(x)x\}\left[\left(\frac{k_x(x)}{k_{1x}}P^s_1(x) - N^s_2(x)\right) - i\left(\frac{k_{0x}}{k_{1x}}N^s_1(x) + \frac{k_x(x)}{k_{0x}}P^s_2(d)\right)\right]. \tag{46}$$

Для p - волны

$$\begin{pmatrix} A^p(x) \\ B^p(x) \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon(x)k_{1x}}{\varepsilon_1 k_x(x)} \begin{pmatrix} \left(\delta^p_{1,2}(x)\right)^* & \left(\gamma^p_{1,2}(x)\right)^* \\ \gamma^p_{1,2}(x) & \delta^p_{1,2}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^p \\ B^p \end{pmatrix}, \tag{47}$$

где

$$\delta^p_{1,2}(x) = \frac{1}{2}\exp\{ik_x(x)x\}\left[\left(\frac{\varepsilon_1 k_x(x)}{\varepsilon(x)k_{1x}}P^p_1(x) + N^p_2(x)\right) - i\left(\frac{\varepsilon_1 k_{0x}}{k_{1x}}N^p_1(x) - \frac{k_x(x)}{\varepsilon(x)k_{0x}}P^p_2(x)\right)\right], \tag{48}$$

$$\gamma^p_{1,2}(x) = \frac{1}{2}\exp\{ik_x(x)x\}\left[\left(\frac{\varepsilon_1 k_x(x)}{\varepsilon(x)k_{1x}}P^p_1(x) - N^p_2(x)\right) - i\left(\frac{\varepsilon_1 k_{0x}}{k_{1x}}N^p_1(x) + \frac{k_x(x)}{\varepsilon(x)k_{0x}}P^p_2(x)\right)\right]. \tag{49}$$

Подставляя (44) в (43) и используя (45), (46), для электрической компоненты s поляризованной волны получим

$$E^s(x)=A^s\exp\{ik_{1,x}x\}+B^s\exp\{-ik_{1,x}x\},\quad x\le 0,\tag{50}$$

$$E^s(x)=\left\{P_1^s(x)-i\frac{k_{1x}}{k_{0x}}P_2^s(x)\right\}A^s+\left\{P_1^s(x)+i\frac{k_{1x}}{k_{0x}}P_2^s(x)\right\}B^s,\quad 0<x<d,\tag{51}$$

$$E^s(x)=\frac{k_{1,x}}{k_{2,x}}\left[\frac{A^s-\left(R_{1,2}^s\right)^*B^s}{\left(T_{1,2}^s\right)^*}\exp\{ik_{2,x}x\}+\frac{B^s-R_{1,2}^sA^s}{T_{1,2}^s}\exp\{-ik_{2,x}x\}\right],\quad x\ge d,\tag{52}$$

где $T_{1,2}^s$, $R_{1,2}^s$ выражаются через значения функций $P_{1,2}^s(x)$, $N_{1,2}^s(x)$ в точке $x=d$ с помощью формул (31), (32).

Подставляя (47) в (43) и используя (48), (49), получим магнитную компоненту для p поляризованной волны

$$H^p(x)=A^p\exp\{ik_{1,x}x\}+B^p\exp\{-ik_{1,x}x\},\quad x\le 0,\tag{53}$$

$$H^p(x)=\left\{P_1^p(x)-i\frac{k_{1x}}{\varepsilon_1 k_{0x}}P_2^p(x)\right\}A^p+\left\{P_1^p(x)+i\frac{k_{1x}}{\varepsilon_1 k_{0x}}P_2^p(x)\right\}B^p,\quad 0<x<d,\tag{54}$$

$$H^p(x)=\frac{\varepsilon_2 k_{1,x}}{\varepsilon_1 k_{2,x}}\left[\frac{A^p-\left(R_{1,2}^p\right)^*B^p}{\left(T_{1,2}^p\right)^*}\exp\{ik_{2,x}x\}+\frac{B^p-R_{1,2}^pA^p}{T_{1,2}^p}\exp\{-ik_{2,x}x\}\right],\quad x\ge d,\tag{55}$$

где $T_{1,2}^p$, $R_{1,2}^p$ выражаются через значения функций $P_{1,2}^p(x)$, $N_{1,2}^p(x)$ с помощью формул (33), (34). Как следует из вышеизложенного, при $A^{s,p}=1$, $B^{s,p}=R_{1,2}^{s,p}$ выражения (50)-(52) и (53)-(55) определяют поля s и p поляризованных волн, падающих на слой справа.

Таким образом, мы показали, что задача определения как s, так и p поляризованных волновых полей во всем пространстве, в общем виде, может быть сведена к задаче Коши для s и p волновых уравнений соответственно.

5. *Заключение.* В работе развит новый подход для определения амплитуд рассеяния произвольно поляризованной плоской электромагнитной волны, падающей наклонно на одномерный неоднородный диэлектрический слой, заключенный между двумя различными однородными полубесконечными средами. Показано, что задача определения волнового поля во всем пространстве, в общем виде, сводится к задаче Коши для волнового уравнения. Развитый в работе метод может быть, в частности, использован для исследования распространения волн в неупорядоченном слое в волноводном режиме.

Авторы выражают благодарность профессору О.С.Ерицяну, профессору Д.А.Бадаляну и доценту А.А.Геворгяну за полезное обсуждение результатов работы.

[1]Государственный инженерный университет Армении,
[2]Ереванский государственный университет, Армения

SCATTERING OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE ON THE ONE-DIMENSIONAL LAYER BORDERED FROM TWO SIDES WITH TWO DIFFERENT UNIFORM SEMIINFINITE MEDIA

A.ZH.KHACHATRIAN[1], D.M.SEDRAKIAN[2], N.M.ISPIRYAN[2]

In this work the problem of transmission of a plane electromagnetic wave through arbitrary non-uniform dielectric layer bordered from two sides with two different uniform semiinfinite media is considered. The algebraic relations between transmission and reflection amplitudes for the considered problem and scattering amplitudes of a wave when the layer borders from both sides on vacuum are received. It is proved, that for *s* and *p* polarized fields, scattering problem (the boundary problem) can be formulated as a Cauchy type problem directly for *s* and *p* wave equations. It is also shown, that the problem of the field determination inside a layer, generally, is reduced to Cauchy problem as well.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М.Б.Виноградова, О.В.Руденко, А.П.Сухорукова*, Теория волн, Наука, М., 1979.
2. *В.И.Кляцкин*, Метод инвариантного погружения в теории распространения волн, Наука, М., 1986.
3. *P.Erdos, R.C.Herndon*, Adv. Phys. **31**, 65, 1982.
4. *M.Y.Azbel*, Phys. Rev. **B22**, 4106, 1983.
5. *Д.М.Седракян, А.Ж.Хачатрян*, Астрофизика, **42**, 419, 1999.
6. *Д.М.Седракян, А.А.Геворгян, А.Ж.Хачатрян*, Изв. НАН Армении, Физика, **35**, 267, 2000.
7. *А.Ж.Хачатрян, Д.М.Седракян, Г.М.Андреасян, Ю.Н.Айрапетян*, Изв. НАН Армении, Физика, **36**, 117, 2001.
8. *Д.М.Седракян, А.А.Геворгян, А.Ж.Хачатрян*, Астрофизика, **43**, 269, 2000.
9. *Д.М.Седракян, А.Ж.Хачатрян*, Изв. НАН Армении, Физика (в печати).