АСТРОФИЗИКА

ТОМ 44 НОЯБРЬ, 2001 ВЫПУСК 4

УДК: 524.8:519.1

ПОЛЕВАЯ ПРИРОДА ВРЕМЕНИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В.В.ПАПОЯН, В.Н.ПЕРВУШИН, Д.В.ПРОСКУРИН

Поступила 6 апреля 2001
Принята к печати 5 августа 2001

Работа посвящена описанию динамики общей теории относительности, которая остается инвариантной относительно репараметризации временной координаты риманова пространства, после явного разрешения энергетической связи. Показано, что эволюционный параметр ОТО на поверхности связи совпадает с одной из полевых переменных, но не с координатным временем. В полученных каноническим преобразованием Леви-Чивитта новых полевых переменных, одна из которых, вследствие уравнения движения, совпадает с временным геометрическим интервалом, построена эквивалентная система без связей, где роль эволюционного параметра играет этот интервал. Как физическое следствие квантования исходной полевой системы и канонического преобразования Леви-Чивиты получено, что стрела геометрического времени в общей теории относительности имеет положительное направление. Найдено новое репараметризационно-инвариантное представление причинной функции Грина в виде интеграла по путям, который включает эволюцию Вселенной и в пределе бесконечного пространства-времени переходит в интеграл Фаддеева-Попова.

1. *Введение.* Проблема времени в теории относительности имеет долгую историю [1-7]. Ее корни лежат в несовместимости связей и релятивистской симметрии полевой теории Фарадея-Максвелла с вариационным принципом ньютоновской механики в простейшем случае свободной частицы. Для описания релятивистских систем со связями, в том числе в общей теории относительности (ОТО), был сформулирован обобщенный гамильтонов формализм [1,8-12], где релятивистские связи возникают как результат вариации обобщенного действия по лишним нефизическим переменным. Существуют два различных подхода к исключению нефизических переменных. Первый подход состоит в фиксации нефизических переменных с помощью калибровки, что с самого начала приводит к нарушению геометрических симметрий обобщенного действия (общекоординатной, в том числе симметрии относительно репараметризации времени, и калибровочной) [2,6]. Второй подход заключается в исключении нефизических переменных путем явного разрешения связей. Подстановка явного решения связей в обобщенное действие называется редукцией системы к "эквивалентной" системе без связей [13,14] и рассматривается в качестве обоснования функционального интеграла Фаддеева-Попова [15,16]. Репараметризационно-инвариантная редукция релятивистских систем рассматривалась в работах [3,4,7,17-20], где было показано, что в результате разрешения энергетической связи одна из нефизических переменных превращается в динамический параметр эволюции, а сопряженная ей переменная становится

ненулевым гамильтонианом эволюции.

Существует каноническое преобразование [18,21] обобщенной системы со связями к новой обобщенной системе, в которой энергетическая связь становится новым импульсом, а геометрический инвариантный временной интервал, вследствие новых уравнений движения, совпадает с новым динамическим параметром эволюции [19,20].

Разрешение связей демонстрирует главное отличие репараметризационно-инвариантных релятивистских систем от обычных классических систем без связей. Все физическое содержание релятивистской системы с репараметризационной инвариантностью можно описать двумя системами без связей: динамической (с динамическим параметром эволюции) и геометрической (где параметром эволюции является интервал собственного времени). Преобразования Леви-Чивита между этими системами вскрывают чисто релятивистские эффекты, в число которых входит и эволюция Вселенной.

Настоящая статья посвящена применению метода гамильтоновой редукции систем со связями к "эквивалентным" системам без связей в общей теории относительности, что позволяет формулировать инвариантную динамику в терминах геометрического времени и построить причинную функцию Грина в виде интеграла по траекториям в пространстве динамических переменных, содержащую космологическую эволюцию. Показано, что метод гамильтоновой редукции позволяет обосновать положительную стрелу геометрического времени в ОТО, исходя из принципа положительности энергии дираковского квантования "эквивалентной" динамической системы.

2. *Гамильтонова динамика ОТО.* 2.1. *Действие и метрика.* Сингулярное действие Гильберта - Эйнштейна ОТО

$$W(g/\mu)=\int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{\mu^2}{6}R(g)+L_{matter}\right] \quad \left(\mu^2=M^2_{Planck}\frac{3}{8\pi}\right), \tag{1}$$

определенное на многообразии, наделенном римановой структурой с интервалом

$$(ds)^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \tag{2}$$

практически исчерпывает содержание ОТО. Как (1), так и (2) инвариантны относительно общекоординатных преобразований

$$x_\mu \to x'_\mu = x'_\mu(x_0,x_1,x_2,x_3). \tag{3}$$

2.2. *Переменные и гамильтониан.* Дирак, а затем Арновит, Дезер и Мизнер [2] сформулировали обобщенный гамильтонов формализм ОТО как теорию систем со связями в $3+1$ расслоенном пространстве

$$(ds)^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = N^2dt^2-{}^{(3)}g_{ij}\breve{d}x^i\breve{d}x^j \quad \left(\breve{d}x^i=dx^i+N^idt\right) \tag{4}$$

с функцией хода (lapse function) $N(t,\bar{x})$, тремя компонентами вектора смещения (shift vectors) $N^i(t,\bar{x})$ и шестью пространственными компонентами метрического тензора ${}^{(3)}g_{ij}(t,\bar{x})$ - функциями координатного времени t и пространственных координат $\vec{x}$. Дирак-АДМ параметризация метрики характеризуется семейством гиперповерхностей $t=\text{const}$, единичная нормаль к которой есть $\nu^{\alpha} = \left(1/N, -N^{k}/N\right)$, а вторая квадратичная (внешняя) форма, которая показывает, как эта гиперповерхность вложена в четырехмерное пространство-время, определяется соотношением

$$\frac{1}{N}\left({}^{(0)}g_{ij}\right)-\Delta_i N_j-\Delta_j N_i). \qquad (5)$$

Преобразования координат, “сохраняющих” семейство гиперповерхностей $t=\text{const}$

$$t \to \tilde{t} = \tilde{t}(t); \quad x_i \to \tilde{x}_i = \tilde{x}_i(t, x_1, x_2, x_3), \qquad (6)$$

$$\tilde{N} = N\frac{dt}{d\tilde{t}}; \quad \tilde{N}^k = N^l \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x_l}\frac{dt}{d\tilde{t}} - \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x_l}\frac{\partial x^l}{\partial \tilde{t}} \qquad (7)$$

образуют кинеметрическую подгруппу группы общекоординатных преобразований (3) [22,4,5,7]. Подгруппа кинеметрических преобразований является группой диффеоморфизмов обобщенной гамильтоновой динамики. Она включает репараметризацию координатного времени $\tilde{t}(t)$ (6). Симметрия относительно преобразований (6) превращает четыре уравнения на функцию хода и вектора смещения в связи (констрайнты). Напомним, что связи являются частными интегралами уравнений движения, которые не требуют для своего решения новых начальных данных; наоборот, наличие связей уменьшает число начальных данных и, следовательно, число независимых степеней свободы. В случае ОТО из десяти уравнений на десять компонент метрики четыре являются связями. Четыре координатных условия дают еще четыре связи и соответственно убирают ещё четыре степени свободы из шести оставшихся уравнений. В результате остаются две степени свободы, которые можно отождествить с гравитоном, вклад которого в констрайнт энергии положителен.

Следствием симметрии относительно репараметризации координатного времени является глобальный констрайнт энергии как пространственный интеграл от уравнения на функцию хода. Этот пространственный интеграл убирает отрицательный вклад ньютоновского взаимодействия, в результате чего в известной калибровке Дирака [1] (согласно которой необходимо положить равными нулю пространственные продольные степени свободы гравитонов и вторую квадратичную форму во всем трехмерном пространстве) глобальный констрайнт представляет собой равенство нулю суммы положительных энергий всех частицеподобных возмущений, включая гравитоны. Это равенство выполняется только в тривиальном случае пустого пространства. Нетривиальный случай можно описать с помощью введения нулевой (глобальной) фурье-гармоники второй квадратичной формы, которая представляет собой канонический импульс космического масштабного фактора. Геометрические основы введения такой глобальной переменной в ОТО были изложены в [23] как утверждение о том, что вторая квадратичная форма во всем пространстве отлична от нуля. Канонический импульс космического масштабного фактора можно выразить через другие переменные с помощью явного решения глобального констрайнта энергии. Подстановка этого решения в оставшиеся уравнения движения (редукция) показывает, что параметром эволюции оставшихся динамических переменных является космический масштабный фактор [3,4,17,18,23,24].

Переменную масштабного фактора $\varphi(t)$ можно отделить преобразованиями Лихнеровича, которые для полевой переменной f с "конформным весом" (n) имеют вид

$$^{(n)}\bar{f} = {}^{(n)}f\left(\frac{\varphi(t)}{\mu}\right)^{-n}, \tag{8}$$

где $n = 2,\ 0,\ -3/2,\ -1$ для тензорных, векторных, спинорных и скалярных полей соответственно; $\bar{f}$ - конформно инвариантная полевая переменная, используемая в ОТО при анализе начальных значений [24,25]. В частности, для метрики имеем

$$g_{\mu\nu}(t,\vec{x}) = \left(\frac{\varphi(t)}{\mu}\right)^2 \bar{g}_{\mu\nu}(t,\vec{x}) \Rightarrow (ds)^2 = \left(\frac{\varphi(t)}{\mu}\right)^2\left[\bar{N}^2 dt^2 - {}^{(3)}\bar{g}_{ij}\check{d}x^i\check{d}x^j\right]. \tag{9}$$

После извлечения нулевой фурье-гармоники из логарифма детерминанта пространственной метрики преобразованная $\bar{g}_{ij}(t,\vec{x})$ определяется в классе ненулевых гармоник

$$\int d^3x \log\left\|\bar{g}_{ij}(t,\vec{x})\right\| = 0. \tag{10}$$

Трансформационные свойства скалярной кривизны $R(g)$ относительно преобразований (9) приводят к действию (1) в виде [4]

$$W(g|\mu) = W(\bar{g}|\varphi) - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V_0} d^3x \varphi \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\varphi}\sqrt{\bar{g}}}{\bar{N}}\right). \tag{11}$$

Введем далее глобальную функцию хода N_0 как среднюю функции $\bar{N}$ в метрике $\bar{g}$ по кинеметрически инвариантному пространственному объему

$$N_0(t) = \frac{V_0}{\int_{V_0} d^3x \frac{\sqrt{\bar{g}(t,\vec{x})}}{\bar{N}(t,\vec{x})}}, \quad \bar{g} = \det\left({}^{(3)}\bar{g}\right),\quad V_0 = \int_{V_0} d^3x, \tag{12}$$

где V_0 в теории возмущений имеет смысл конечного объема трехмерного координатного пространства. Функцию хода $\bar{N}(t,\vec{x})$ можно факторизовать глобальной $N_0(t)$ и локальной $\mathcal{N}(t,\vec{x})$ компонентами так, чтобы

$$\bar{N}(t,\vec{x})\bar{g}^{-1/2} := N_0(t)\mathcal{N}(t,\vec{x}) := N_q, \tag{13}$$

причем $\mathcal{N}$ удовлетворяет условию нормировки

$$I[\mathcal{N}] := \frac{1}{V_0}\int \frac{d^3x}{\mathcal{N}} = 1, \tag{14}$$

которое необходимо для того, чтобы после вариации действия воспроизвести уравнения движения исходной теории.

Выберем дираковские гармонические переменные [1] так, чтобы

$$q^{ik} = \bar{g}\,\bar{g}^{ik}, \tag{15}$$

тогда метрика (4) приобретает вид

$$(ds)^2 = \frac{\varphi(t)^2}{\mu^2} q^{1/2}\left(N_q^2 dt^2 - q_{ij} \breve{d}x^i \breve{d}x^j\right), \quad \left(q = \det\left(q^{ij}\right)\right). \tag{16}$$

Согласно результатам [4,5] перепишем действие (11) в терминах введеных выше переменных

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L + \frac{1}{2}\partial_t (P_0 \varphi) \right\}, \tag{17}$$

$$L = \left[\int_{V_0} d^3x \left(\sum_F P_F \dot{F} - N^i \mathcal{P}_i \right)\right] - P_0\dot{\varphi} - N_0\left[-\frac{P_0^2}{4V_0} + I^{-1}H(\varphi)\right], \tag{18}$$

где

$$\sum_F P_F \dot{F} = \sum_f p_f \dot{f} - \pi_{ij} \dot{q}^{ij}; \tag{19}$$

$$H(\varphi) = \int d^3x\, \mathcal{N}\mathcal{H}(\varphi) \tag{20}$$

- полный гамильтониан локальных степеней свободы,

$$\mathcal{H}(\varphi) = \frac{6}{\varphi^2} q^{ij} q^{kl}\left[\pi_{ik}\pi_{jl} - \pi_{ij}\pi_{kl}\right] + \frac{\varphi^2\, q^{1/2}}{6}\, {}^{(3)}R(\bar{g}) + \mathcal{H}_f, \tag{21}$$

$$\mathcal{P}_l = 2\left[\nabla_k\left(q^{kl}\,\pi_{il}\right) - \nabla_l\left(q^{kl}\,\pi_{kl}\right)\right] + \mathcal{P}_{lf} \tag{22}$$

- плотности энергии и момента, а H_f, P_f определяют вклад вещества и негравитационных полей. В дальнейшем набор полевых переменных F (19) вместе с динамическим параметром эволюции φ будем называть мировым пространством полевых переменных. Локальная часть момента детерминанта пространственной метрики

$$\pi(t, x) := \dot{q}^{ij}\,\pi_{ij} \tag{23}$$

определена в классе функций с ненулевыми фурье-компонентами, так что

$$\int d^3x\,\pi(t, x) = 0. \tag{24}$$

2.3. *Локальные связи и уравнения движения.* Следуя Дираку [1], перейдем к формулировке обобщенной гамильтоновой динамики для рассматриваемых систем (17)

$$W^D = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L^D + \frac{1}{2}\partial_t (P_0 \varphi) \right\}, \quad L^D = L + \int d^3x \left(P_{\mathcal{N}'}\,\dot{\mathcal{N}} + P_{N^i}\dot{N}^i - \lambda^0 P_{\mathcal{N}} - \lambda^i P_{N^i} \right) \tag{25}$$

с расширенным дираковским гамильтонианом, определенным следующим образом:

$$H^D = N_0\left[-\frac{P_0^2}{4V_0} + I^{-1}H(\varphi)\right] + \int d^3x \left(\lambda^0 P_{\mathcal{N}} + \lambda^i P_{N^i}\right). \tag{26}$$

Уравнения, которые получаются после вариации W^D относительно лагранжевых множителей, называют первичными связями первого рода

$$P_{\mathcal{N}} = 0, \quad P_{N^l} = 0. \tag{27}$$

Условие сохранение этих связей во времени приводит к вторичным связям первого рода

$$\{H^D, P_{\mathcal{N}}\} = \mathcal{H} - \frac{\int d^3x\, \mathcal{N}\mathcal{H}}{V_0 \mathcal{N}^2} = 0, \quad \{H^D, P_{N^l}\} = \Phi_l = 0. \tag{28}$$

Для того, чтобы система была полной, необходимо дополнить ее набором связей второго рода. Следуя Дираку, выберем их в виде

$$\mathcal{N}(t, \vec{x}) = 1; \quad N^l(t, \vec{x}) = 0; \tag{29}$$

$$\pi(t, \vec{x}) = 0; \quad \chi^j := \partial_i\left(q^{-1/3} q^{ij}\right) = 0. \tag{30}$$

Тогда уравнения движения рассматриваемой системы есть

$$\frac{dF}{dT} = \frac{\partial H(\varphi)}{\partial P_F}, \quad -\frac{dP_F}{dT} = \frac{\partial H(\varphi)}{\partial F}, \tag{31}$$

где $H(\varphi)$ - гамильтониан, определенный уравнением (20), а T - инвариантное геометрическое время, введенное согласно

$$N_0 dt := dT. \tag{32}$$

2.4. *Глобальные связи и уравнения движения.* Физический смысл геометрического времени T, динамической переменной φ и сопряженных им импульсов можно выяснить после точного разрешения нулевой фурье-гармоники энергетической связи.

$$\frac{\delta W^E}{\delta N_0(t)} = -\frac{P_0^2}{4V_0} + H(\varphi) = 0. \tag{33}$$

Эта связь приводит к двум решениям для глобального импульса P_0:

$$(P_0)_\pm = \pm 2\sqrt{V_0 H(\varphi)} \equiv H_\pm^*. \tag{34}$$

Уравнение движения для этой глобальной величины P_0 в калибровке (29) имеет вид

$$\frac{\delta W^E}{\delta P_0} = 0, \Rightarrow \left(\frac{d\varphi}{dT}\right)_\pm = \frac{(P_0)_\pm}{2V} = \pm\sqrt{\rho(\varphi)}; \quad \rho(\varphi) = \frac{\int d^3x\, \mathcal{H}}{V_0} = \frac{H(\varphi)}{V_0}. \tag{35}$$

Интегральная форма последнего уравнения есть

$$T_\pm(\varphi_1, \varphi_0) = \pm\int_{\varphi_1}^{\varphi_0} d\varphi \rho^{-1/2}(\varphi), \tag{36}$$

где $\varphi_1 = \varphi(t_1)$ - начальное значение. Уравнения, которые можно получить варьированием действия относительно φ независимым образом, следуют также из набора всех других констрайнтов и уравнений движения.

В квантовой теории гравитации, так же, как и в квантовых теориях частиц, возникают два уравнения Шредингера

$$i\frac{d}{d\varphi_0}\Psi^\pm(F|\varphi_0, \varphi_1) = H_\pm^*(\varphi_0)\Psi^\pm(F|\varphi_0, \varphi_1) \tag{37}$$

с положительным и отрицательным собственными значениями P_0 и нормализуемой волновой функцией, спектральное разложение которой по квантовым числам Q, имеет вид

$$\Psi^{+}(F|\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{Q} A_Q^{+} < F|Q >< Q|\varphi_0,\varphi_1 > \theta(\varphi_0-\varphi_1), \quad (38)$$

$$\Psi^{-}(F|\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{Q} A_Q^{-} < F|Q >^{*} < Q|\varphi_0,\varphi_1 >^{*} \theta(\varphi_1-\varphi_0), \quad (39)$$

где $< F|Q >$ - собственная функция редуцированной энергии (34)

$$H_{\pm}^{*}(\varphi)< F|Q >= \pm E(Q,\varphi_0)< F|Q >, \quad (40)$$

$$< Q|\varphi_0,\varphi_1 >= \exp\left[-i\int_{\varphi_1}^{\varphi_0} d\varphi\, E(Q,\varphi)\right], \quad < Q|\varphi_0,\varphi_1 >^{*}= \exp\left[i\int_{\varphi_1}^{\varphi_0} d\varphi\, E(Q,\varphi)\right]. \quad (41)$$

Коэффициенты A_Q^{+} и A_Q^{-} "вторичного" квантования можно интерпретировать как операторы "рождения" и уничтожения" Вселенной с положительной энергией. Отметим, что именно такая трактовка оператора "вторичного" квантования ведет к положительной стреле геометрического времени. "Вторичное" квантование означает, что $[A_Q^{-}, A_{Q'}^{+}]=\delta_{Q,Q'}$. Физическое состояние квантовой Вселенной формируется действием этих операторов на вакуум <0|, |0> в виде out-состояния ($|Q\rangle = A_Q^{+}|0\rangle$) с положительной "частотой" и in-состояния с отрицательной "частотой". Этот факт означает, что положительные частоты распространяются вперед по параметру эволюции $\varphi(\varphi_0>\varphi_1)$, а отрицательные - назад $(\varphi_1>\varphi_0)$. В результате отрицательные значения энергии оказываются исключенными из спектра, что обеспечивает стабильность квантовой теории гравитации. Иначе говоря, вместо изменения знака энергии рассматривается изменение динамического параметра эволюции. Рассматриваемая схема квантования ведет к причинной функции Грина

$$G_c(F_1,\varphi_1|F_2,\varphi_2)=G_{+}(F_1,\varphi_1|F_2,\varphi_2)\theta(\varphi_2-\varphi_1)+G_{-}(F_1,\varphi_1|F_2,\varphi_2)\theta(\varphi_1-\varphi_2), \quad (42)$$

где $G_{+}(F_1,\varphi_1|F_2,\varphi_2)=G_{-}(F_2,\varphi_2|F_1,\varphi_1)$ - "коммутативная" функция Грина

$$G_{+}(F_2,\varphi_2|F_1,\varphi_1)=\left\langle 0\left|\Psi^{-}(F_2|\varphi_2,\varphi_1)\Psi^{+}(F_1|\varphi_1,\varphi_1)\right|0\right\rangle. \quad (43)$$

Как отмечалось выше, принятая причинная структура полевого мирового пространства ведет к стабильной квантовой системе, положительной стреле геометрического времени (36) и началу эволюции Вселенной от момента $T=0$ геометрического времени в согласии с уравнением движения (35)

$$\left(\frac{dT}{d\varphi_0}\right)_{\pm}=\pm\sqrt{\rho} \quad\Rightarrow\quad T_{\pm}(\varphi_1,\varphi_0)=\pm\int_{\varphi_1}^{\varphi_0} d\varphi\,\rho^{-1/2}(\varphi)\geq 0. \quad (44)$$

Сохраняющиеся интегралы движения классической теории и квантовые числа Q квантовой теории получаются путем канонических преобразований типа Леви-Чивита переменных полевого мирового пространства (F,φ_0) к геометрическому набору переменных (V, Q_0) при условии, что геометрический параметр эволюции Q_0 совпадает с геометрическим временем $dt=dQ_0$.

Уравнения (35), (36) в однородном приближении ОТО являются основой наблюдательной космологии, причем геометрическое время есть конформное время, связанное с мировым временем T_f фридмановской космологии соотношением

$$dT_f = \frac{\varphi(T)}{\mu} dT, \tag{45}$$

а зависимость масштабного фактора (динамического параметра эволюции φ) от геометрического времени T трактуется как описание эволюции Вселенной. В частности, уравнение (35) устанавливает связь между современным значением динамического параметра эволюции $\varphi(T_0)$ и космологически наблюдаемыми - плотностью материи ρ и параметром Хаббла

$$\mathcal{H}^c_{hub} = \frac{\mu\varphi'}{\varphi^2} = \frac{\mu\sqrt{\rho}}{\varphi^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi(T_0) = \left(\frac{\mu\sqrt{\rho}}{\mathcal{H}_{hub}}\right)^{1/2} := \mu\Omega_0^{1/4}, \tag{46}$$

где ($0.6 < (\Omega_0^{1/4})_{exp} < 1.2$). Динамический параметр эволюции как космический масштабный фактор и величина сопряженного ему момента (т.е. величина динамического гамильтониана) как плотность материи (см. уравнения (35), (36)) являются объектами измерений наблюдательной астрофизики.

В соответствии с развитой в предыдущих разделах общей теории инвариантной редукции репараметризационно - инвариантная динамика ОТО "замаскирована" в двух классически - подобных системах (динамической и геометрической), связанных каноническими преобразованиями Леви-Чивита. Эти преобразования решают проблемы начальных значений, сохранения квантовых чисел, прямого соответствия стандартной классической космологии с квантовой гравитацией на уровне производящего функционала унитарной и причинной теории возмущений [7,19].

3. *Эквивалентная система без связей.* Допустим, что уравнения для связей разрешены и мы оказались в редуцированном пространстве независимых переменных (F^*, P_F^*). Точное решение локальных и глобальных связей имеет две аналитические ветви с положительными и отрицательными значениями момента масштабного фактора P_0 (34). Поэтому, подставив все разрешенные связи в действие, мы получим две ветви эквивалентных динамических систем без связей (ДС)

$$W_\pm^{DUS}[F|\varphi] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \left\{\left[\int d^3x \sum_F P_F^* \frac{\partial F^*}{\partial\varphi}\right] - H_\pm^* + \frac{1}{2}\partial_\varphi\left(\varphi H_\pm^*\right)\right\}, \tag{47}$$

где φ выступает в роли эволюционного параметра, а величина $H_\pm^*$, определяемая уравнением (34), играет роль гамильтониана эволюции в редуцированном фазовом пространстве независимых физических переменных (F^*, P_F^*) с уравнениями движения

$$\frac{\partial F^*}{\partial\varphi} = \frac{\partial H_\pm^*}{\partial P_F^*}, \qquad -\frac{dP_F^*}{d\varphi} = \frac{\partial H_\pm^*}{\partial F^*}. \tag{48}$$

Эволюция полевых переменных (F^{*}, φ) в геометрическом времени T не содержится в ДС (47). Эта эволюция в геометрическом времени описывается дополнительным уравнением (35) для нефизического момента P_0 (34), которое следует из начальной расширенной системы.

Для того, чтобы придти к эквивалентной системе без связей, эволюционирующей в геометрическом времени (назовем такую систему геометрической системой без связей (ГС)), необходимо выполнить каноническое преобразование Леви-Чивиты [12,21] пространства полевых переменных

$$\left(F^{*}, P_F^{*}\middle|\varphi, P_0\right) \Rightarrow \left(F_G^{*}, P_G^{*}\middle|Q_0, \Pi_0\right), \tag{49}$$

которое превращает констрайнт энергии (33) в новый момент Π_0.

В геометрических переменных действие приобретает вид

$$W^G = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{\left[\int d^3x \sum_{F_G} P_G^{*} \dot{F}_G^{*}\right] - \Pi_0 \dot{Q}_0 + N_0 \Pi_0 + \frac{d}{dt} S^{LC}\right\}, \tag{50}$$

где S^{LC} - производящая функция преобразований Леви-Чивиты. Теперь констрайнт энергии и дополнительное уравнение для нового момента имеет простой вид

$$\Pi_0 = 0; \quad \frac{\delta W}{\delta \Pi_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ_0}{dt} = N_0 \quad \Rightarrow \quad dQ_0 = dT. \tag{51}$$

Простой вид имеют и уравнения движения

$$\frac{dP_G^{*}}{dT} = 0, \quad \frac{dF_G^{*}}{dT} = 0, \tag{52}$$

решениями которых являются начальные значения

$$P_G^{*} = P_G^{*0}, \quad F_G^{*} = F_G^{*0}. \tag{53}$$

Подставляя решения (51) и (52) в обращенные преобразования Леви-Чивиты

$$F^{*} = F^{*}\left(Q_0, \Pi_0\middle|F_G^{*}, P_G^{*}\right), \quad \varphi = \varphi\left(Q_0, \Pi_0\middle|F_G^{*}, P_G^{*}\right) \tag{54}$$

и аналогично для импульса, мы придем к формальным решениям (48) и (36)

$$F^{*} = F^{*}\left(T, 0\middle|F_G^{*0}, P_G^{*0}\right), \; P_F^{*} = P_F^{*}\left(T, 0\middle|F_G^{*0}, P_G^{*0}\right), \; \varphi_0 = \varphi_0\left(T, 0\middle|F_G^{*0}, P_G^{*0}\right). \tag{55}$$

Легко видеть, что эволюция динамических переменных в геометрическом времени (т.е. эволюция Вселенной) отсутствует в рамках динамической системы. Эволюцию динамических переменных в геометрическом времени можно описать в виде обращенных канонических преобразований Леви-Чивиты от ГС к ДС (54), (55).

Существует "слабая" форма преобразований Леви-Чивиты к геометрической системе (F^{*}, P_F^{*})
$\Rightarrow (\tilde{F}, \tilde{P})$ без переменных действие-угол и со связью [7]

$$\tilde{\Pi}_0 - \tilde{H}\left(\tilde{Q}_0, \tilde{F}, \tilde{P}\right) = 0, \tag{56}$$

что для действия на связях дает выражение

$$W^{GUS} = \int dT \left\{\left[\int d^3x \sum_{\tilde{F}} \tilde{P} \frac{d\tilde{F}}{dT}\right] - \tilde{H}\left(T, \tilde{F}, \tilde{P}\right)\right\}. \tag{57}$$

Уравнение геометрической системы (57) позволяет выбрать космологические начальные значения в геометрическом времени.

4. *Репараметризационно-инвариантный интеграл по путям.* Используя процедуру, разработанную Фаддеевым и Поповым [15,16], мы можем выписать интеграл по траекториям для локальных полей нашей теории, используя констрайнты и условия калибровки (27)-(30):

$$Z_{local}(F_1, F_2 | P_0, \varphi_0, N_0) = \int_{F_1}^{F_2} D(F, P_f) \Delta_s \bar{\Delta}_t \exp\{i\overline{W}\}, \tag{58}$$

где

$$D(F, P_f) = \prod_{t,x}\left(\prod_{i<k}\frac{dq^{ik}\, d\pi_{ik}}{2\pi}\prod_{f}\frac{df dp_f}{2\pi}\right) \tag{59}$$

- функциональные дифференциалы метрических (π, q) и материальных полей (p_f, f),

$$\Delta_s = \prod_{t,x,j}\delta(\varphi_i))\delta(\chi^j)\det\{\varphi_i, \chi^j\}, \tag{60}$$

$$\bar{\Delta}_t = \prod_{t,x}\delta(\mathcal{H}(\mu))\delta(\pi)\det\{\mathcal{H}(\varphi_0) - \rho, \pi\}, \quad \left(\rho = \frac{\int d^3x H(\varphi_0)}{V_0}\right) \tag{61}$$

есть детерминант Фаддеева-Попова, а

$$\overline{W} = \int_{t_1}^{t_2} dt\left\{\int_{V_0} d^3x\left(\sum_F P_F \dot{F}\right) - P_0\dot{\varphi}_0 - N_0\left[-\frac{P_0^2}{4V_0} + \underset{\bullet}{H}(\varphi_0)\right] + \frac{1}{2}\partial_t(P_0\varphi_0)\right\} \tag{62}$$

- расширенное действие рассматриваемой теории.

По аналогии с частицами и струнами, рассмотренной в [19,20], определим "коммутативную" функцию Грина как интеграл по глобальным полям и усреднение по параметру группы репараметризации времени N_0

$$G_+(F_1, \varphi_1 | F_2, \varphi_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\prod_t\left(\frac{d\varphi_0\, dP_0 d\tilde{N}_0}{2\pi}\right) Z_{local}(F_1, F_2 | P_0, \varphi_0, N_0), \tag{63}$$

где

$$\tilde{N} = N/2\pi\delta(0), \quad \delta(0) = \int dN_0. \tag{64}$$

Причинная функция Грина в пространстве полевых переменных (F, φ) определяется как сумма

$$G_c(F_1, \varphi_1 | F_2, \varphi_2) = G_+(F_1, \varphi_1 | F_2, \varphi_2)\theta(\varphi_1 - \varphi_2) + G_+(F_2, \varphi_1 |, F_2\ \varphi_1)\theta(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{65}$$

Эта функция может рассматриваться как производящий функционал для элементов унитарной S-матрицы [26]

$$S[1,2] = \left\langle \mathrm{out}(\varphi_2)\left| T_\varphi \exp\left\{-i\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi (H_I^*)\right\}\right|(\varphi_1)\mathrm{in}\right\rangle, \tag{66}$$

где T_φ - символ упорядочения относительно параметра φ, а $\langle\mathrm{out}(\varphi_2)|$, $|(\varphi)\mathrm{in}\rangle$ есть состояния квантовой Вселенной в низшем порядке дираковской теории возмущений ($\mathcal{N} = 1$; $N^k = 0$; $q^{ij} = \delta_{ij} + h^T_{ij}$), H^*_I - гамильтониан взаимодействия

$$H^*_I = H^* - H^*_0, \quad H^* = 2\sqrt{V_0 H(\varphi)}, \quad H^*_0 = 2\sqrt{V_0 H_0(\varphi)}, \tag{67}$$

H_0 - сумма гамильтонианов свободных полей (гравитонов, фотонов, массивных векторных и спинорных полей), когда все массы (включая планковскую) заменяются динамическим параметром эволюции φ [7]. Например, для гравитона "свободный" гамильтониан имеет вид:

$$H_0(\varphi) = \int d^3x \left(\frac{6\left(\pi^T_{(h)}\right)^2}{\varphi^2} + \frac{\varphi^2}{24}\left(\partial_i h^T\right)^2 \right); \quad \left(h^T_{ii} = 0;\ \partial_j h^T_{ji} = 0\right). \tag{68}$$

4.1. *КТП-предел квантовой гравитации.* Простейший путь для того, чтобы найти предел бесконечного пространства-времени рассмотренной квантовой гравитации, состоит в использовании квантово-полевой версии репараметризационно-инвариантного интеграла (63) в виде элементов S - матрицы (67), выраженных через геометрическое время T в настоящий момент $T = T_0, \varphi(T_0) = \mu$, а $T(\varphi_1) = T_0 - \Delta T, T(\varphi_2) = T_0 + \Delta T = T_{\rm out}$. Этот матричный элемент можно выразить через время, измеряемое наблюдателем в out-состоянии с огромным числом частиц Вселенной, используя уравнение $d\varphi = dT_{\rm out}\sqrt{\rho_{\rm out}}$ и приближение большой энергии (10^{79}GeV), по сравнению с возможными "реальными" и виртуальными отклонениями свободного гамильтониана в лабораторных процессах:

$$\overline{H}_0 = E_{\rm out} + \delta H_0, \quad \langle {\rm out}|\delta H_0|{\rm in}\rangle \ll E_{\rm out}. \tag{69}$$

В пределе бесконечного объема из (67) получим

$$d\varphi_0\left[H^*_I\right] = 2\,d\varphi_0\left(\sqrt{V_0(H_0 + H_I)} - \sqrt{V_0 H_0}\right) = dT_{\rm out}\left[\hat{F}\overline{H}_I + O(1/E_{\rm out})\right], \tag{70}$$

где H_I - гамильтониан взаимодействия в ОТО, а

$$\hat{F} = \sqrt{\frac{E_{\rm out}}{H_0}} = \sqrt{\frac{E_{\rm out}}{E_{\rm out} + \delta H_0}} \tag{71}$$

- множитель, который играет роль формфактора для физических процессов, наблюдаемых в "лабораторных" условиях, когда космическая энергия много больше отклонений свободной энергии

$$\delta H_0 = H_0 - E_{\rm out}, \tag{72}$$

обусловленных рождением и аннигиляцией реальных и виртуальных частиц в лабораторных экспериментах.

Время, измеряемое в лабораторных экспериментах $T_2 - T_1$, много меньше возраста Вселенной T_0, но много больше обратной "лабораторной" энергии δ, так что предел

$$\int\limits_{T(\varphi_1)}^{T(\varphi_2)} dT_{\rm out} \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dT_{\rm out}$$

существует, при этом формфактор (71) становится единицей, что ведет к ультрафиолетовым расходимостям. В этом случае возникает стандартный S-матричный элемент [15], соответствующий функциональному интегралу Фаддеева-Попова с геометрическим (конформным) временем T (вместо координатного t) и с конформно-инвариантными полями $t \to T_{\rm out}$

$$S[-\infty|+\infty] = <{\rm out}\left|T\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{+\infty} dT_{\rm out}\,\hat{F}H_I(\mu)\right\}\right|{\rm in}> \quad (\hat{F}=1). \tag{73}$$

Таким образом, унитарная S-матрица обычной квантовой теории поля (КТП) возникает как нерелятивистское приближение огромной массы Вселенной и ее большого времени жизни. Теперь очевидно, что КТП не годится для описания ранней Вселенной в конечном пространственном объеме $(0 \le T \le T_0)$.

С другой стороны, мы выяснили, что стандартная КТП, которая возникает как квантовый предел ОТО, оперирует языком конформных полей и координат. Если рассматривать стандартную КТП как предельный случай квантовой гравитации, необходимо осознать, что в КТП измеряемыми являются конформные величины.

Конформная инвариантность переменных позволяет трактовать ОТО как конформную инвариантную теорию гравитации типа дилатонной версии ОТО в пространстве с геометрией подобия [4,5].

5. *Заключение.* Все релятивистские теории, включая ОТО, рассмотренные в настоящей работе, представлены в мировом пространстве динамических переменных сингулярным действием (в виде интеграла по координатному пространству) и геометрической величиной - интервалом.

Основной особенностью релятивистских систем является репараметризационная симметрия, которая означает, что измеряемое геометрическое время совпадает с времени-подобной переменной в геометрическом мировом пространстве (полученном в результате преобразований Леви-Чивита к переменным действие-угол).

Показано, что физическое содержание исходной репараметризационно-инвариантной системы как в квантовой, так и в классической теории может быть описано только двумя "эквивалентными" системами без связей - динамической и геометрической. В динамической системе параметром эволюции является масштабный фактор, а роль энергии выполняет его канонический импульс, совпадающий с точностью до фактора с параметром Хаббла. Дираковское квантование ведет к волновой функции, описывающей рождение и уничтожение Вселенной в мировом пространстве полевых переменных. Геометрическая система с параметром эволюции в форме геометрического интервала времени возникает в результате преобразований Леви-Чивита, которые превращают энергетическую связь в новый канонический импульс. При этом переменные частиц, диагонализующие наблюдаемую плотность энергии, превращаются в переменные квазичастиц, которые диагонализуют уравнения движения и, тем самым, определяют начальные космологические данные. Следствием дираковского квантования с положительно определенной энергией системы является положительная стрела геометрического времени в квантовой теории. Космологическая эволюция и рождение частиц материи описываются обратным преобразованием Леви-Чивита как чисто квантовые релятивистские эффекты.

Для унитарной теории возмущений построен производящий функционал причинной функции Грина в виде интеграла по путям. В пределе бесконечно большого пространства-времени этот интеграл совпадает с интегралом Фаддеева-Попова.

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Б.М.Барбашову, Г.Клейнерту, Е.А.Кураеву и И.В.Тютину за дискуссии и ценные критические замечания. Один из нас (В.В.П) работал при поддержке Армянского Национального Фонда науки и образования (ANSEF грант PS14-00). Д.В.П. благодарен РФФИ (грант 00-02-81023 Бел2000_а) за поддержку данной работы.

Ереванский государственный университет, Армения
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

FIELD NATURE OF TIME IN GENERAL RELATIVITY

V.PAPOYAN, V.PERVUSHIN, D.PROSKURIN

The paper is devoted to the description of the reparametrization-invariant dynamics of general relativity obtained by resolving the energy constraint and constructing equivalent unconstrained systems. It was shown that the time measured by the watch of an observer coincides with one of field variables, but not with the reparametrization-noninvariant coordinate evolution parameter. To construct an equivalent unconstrained system with the geometric time interval as the evolution parameter, we make the Levi-Cevita canonical transformation to new field variables. One of these variables coincides with the geometric interval due to the motion equation. The physical consequence of the initial field system generalization and the Levi-Cevita canonical transformation is the positive arrow of the geometric time in GR. The constraint-shell action reveals the "field nature" of the geometric time in general relativity. We derive a new path integral representation of the causal Green function in the Hamiltonian scheme of general relativity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P.A.M.Dirac*, Proc. Roy. Soc., **A246**, 333, 1958; Phys. Rev., **114**, 924, 1959.
2. *R.Arnovitt*, *S.Deser*, *C.W.Misner*, Phys. Rev., **116**, 1322, 1959; Phys. Rev. **117**, 1595, 1960.
3. *C.Isham; K.Kuchar*, Ann. Phys. (NY), **164**, 288, 316, 1985.
4. *L.N.Gyngazov et. al.*, Gen. Rel. and Grav., **30**, 1749, 1998.
5. *M.Pawlowski*, *V.V.Papoyan*, *V.N.Pervushin*, *V.I.Smirichinski*, Phys. Lett., **444B**, 293, 1998.
6. *G.Fulop*, *D.M.Gitman*, *I.V.Tyutin*, Int.J. Theor. Phys., **38**, 1941, 1999.
7. *V.N.Pervushin*, *V.I.Smirichinski*, J. Phys. A: Math. Gen. **32**, 6191, 1999.
8. *P.A.M.Dirac*, Lectures on Quantum Mechanics (Belfer Graduate School of Science, Yeshive Univ. Press, New York), 1964.
9. *A.J.Hanson*, *T.Regge*, *C.Teitelboim*, Constrained Hamiltonian Systems Accademia Nazionale dei Lincei (Rome), 1976.
10. *D.M.Gitman*, *I.V.Tyutin*, Quantization of fields with Constraints (Springer-Verlag, Berlin); 1990.
11. *Н.П.Коноплева*, *Н.П.Попов*, Калибровочные поля, Атомиздат, М. 1972.
12. *S.A.Gogilidze*, *A.M.Khvedelidze*, *V.N.Pervushin*, Phys. Particles and Nuclei, **30**, 66, 1999.
13. *P.A.M.Dirac*, Can. J. Phys., **33**, 650, 1955.
14. *Л.Д.Фаддеев*, ТМФ, **1**, 3, 1969.
15. *Л.Д.Фаддеев*, *В.Н.Попов*, УФН, **111**, 427, 1973.
16. *L.Faddeev*, *V.Popov*, Phys. Lett., **25B**, 29, 1967; B.S.DeWitt Phys. Rev. **160**, 1113, 1967.
17. *C.G.Torre*, Class. Quantum Grauv., **8**, 1895, 1991.
18. *A.Khvedelidze*, *Yu.Palii*, *V.Papoyan*, *V.Pervushin*, Phys. Lett., **402B**, 263, 1997.
19. *M.Pawlowski*, *V.Pervushin*, Int. J. Mod. Phys. **A16**, 1715, 2001; hep-th/0006116.
20. *B.M.Barbashov*, *V.N.Pervushin*, J. Phys., A, to be published, 2001; hep-th/0005140; *Б.М.Барбашов*, *В.Н.Первушин*, *М.Павловски*, ЭЧАЯ, **32**, 564, 2001.
21. *T.Levi-Civita*, Prace Mat.-Fiz., **17**, 1, 1906; *S.Sanmugadhasan*, J. Math. Phys, **14**, 677, 1973.
22. *А.Л.Зельманов*, ДАН СССР, AN SSSR, **227**, 78; *Ю.С.Владимиров*, Системы отсчета в теории гравитации, Энергоиздат, М. 1982.
23. *В.Н.Первушин*, *В.И.Смиричинский*, Ядерная физика, **61**, 142, 1998.
24. *J.W.York* (*Jr.*), Phys. Rev. Lett., **26**, 1658, 1971; *K.Kuchar*, *J. Math. Phys.* **13**, 768, 1972.
25. *A.Lichnerowicz*, J. Math. Pures and Appl., 1944.
26. *S.Schweber*, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory Row, Peterson and C0, Evanston, Ill, Elmsford, N.Y., 1961.