

УДК: 524.8

МОДЕЛИ ФРИДМАНА И КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В БИМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ С КВАДРАТИЧНЫМ ЛАГРАНЖИАНОМ

А.А.ЕРАНЯН

Поступила 23 июня 2000

Принята к печати 15 сентября 2000

В рамках биметрической теории гравитации с квадратичным по "напряженностям" $g_{\alpha\mu}$ лагранжианом исследованы космологические модели. Показано, что теория предсказывает не только сингулярные, но также и несингулярные решения.

1. *Введение.* В работе [1] в качестве новой альтернативы ОТО был предложен вариант биметрической теории гравитации с лагранжианом, квадратичным по "напряженностям" гравитационного поля $g_{\alpha\mu}$. Вертикальная черта перед индексом означает ковариантную производную метрического тензора g_* искривленного пространства-времени по фоновой метрике γ_* :

$$g_{ik|l} \equiv \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \overset{\gamma}{\Gamma}_{il}^m g_{km} - \overset{\gamma}{\Gamma}_{kl}^m g_{im}, \quad (1)$$

где $g_{ik,l} \equiv \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$, а $\overset{\gamma}{\Gamma}_{il}^m$ - символы Кристоффеля фонового пространства $d\sigma^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k$.

В работе [2] для рассматриваемого варианта теории были определены пост-ньютоновские параметры и показано, что теория в случае слабых полей удовлетворяет всем известным наблюдательным данным.

В работе [3] рассматривалось гравитационное излучение и показано, что в этом вопросе данная теория не отличается от ОТО.

Предложенный вариант теории является хорошей альтернативой ОТО. Отличие предсказаний обеих теорий может быть только в некоторых принципиальных вопросах (сингулярность, локализуемость энергии и т. д.) и в случае сильных полей. Последние реализуются в случае белых карликов, нейтронных звезд, тесных двойных систем и в космологических моделях.

2. *Космологические модели Фридмана.* В ОТО для трех моделей (закрытая, плоская и открытая) в случае пылевидной материи и уравнения состояния $p = \frac{1}{3}\epsilon$ найдены аналитические решения [4].

Ниже в рамках этих моделей, для полноты изложения, приводятся решения в случае уравнения состояния

$$p = A\epsilon, \quad (2)$$

где A - параметр, значения которого находятся в области $-1 \leq A \leq 1$.

Для метрики, записанной в виде

$$ds^2 = R_F^2(\eta) \left[d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (3)$$

где η , r , θ и φ - безразмерные координаты, а $k=1, 0, -1$ соответственно для закрытой, плоской и открытой моделей, удобно использовать одно из уравнений Эйнштейна и уравнение гидродинамики (система единиц $c=G=1$)

$$\frac{3}{R_F^4} (R_F'^2 + kR_F^2) = 8\pi\varepsilon, \quad (4)$$

$$\varepsilon' + 3 \frac{R_F'}{R_F} (\varepsilon + p) = 0, \quad (5)$$

где штрих означает производную по η . При $A \neq -\frac{1}{3}$ решение уравнений (4), (5) имеет вид

$$\begin{aligned} R_F &= \left(\frac{8\pi C}{3} \right)^{\frac{1}{1+3A}} \left(\sin \frac{1+3A}{2} \eta \right)^{\frac{2}{1+3A}}, \quad k=1, \\ R_F &= \left(\frac{8\pi C}{3} \right)^{\frac{1}{1+3A}} \left(\frac{1+3A}{2} \eta \right)^{\frac{2}{1+3A}}, \quad k=0, \\ R_F &= \left(\frac{8\pi C}{3} \right)^{\frac{1}{1+3A}} \left(\operatorname{sh} \frac{1+3A}{2} \eta \right)^{\frac{2}{1+3A}}, \quad k=-1, \end{aligned} \quad (6)$$

где постоянная интегрирования $C > 0$, а другая постоянная интегрирования выбрана так, что $a=0$, либо $a=\infty$ при $\eta=0$.

В случае же $A = -\frac{1}{3}$ имеем

$$R_F = R_F(0) \exp \left[\sqrt{\frac{8\pi C}{3}} - k \eta \right]. \quad (7)$$

В частности, если при $A = -\frac{1}{3}$ в закрытой модели выполняется условие $\frac{8\pi C}{3} = 1$, имеем статическую вселенную $R_F = R_F(0) = \text{const.}$

Независимо от значения параметра A плотность выражается формулой

$$\varepsilon = \frac{C}{R_F^{3(1+A)}} \quad (8)$$

Рассмотрим поведение решений при $\eta \ll 1$ в случае $A \neq -\frac{1}{3}, -1$. Перейдя к собственному времени $dt = \pm R_F d\eta$, для всех трех моделей получим асимптотику

$$R_F \approx \left(\frac{8\pi C}{3} \right)^{\frac{1}{1+3A}} \left(\frac{3(1+A)}{2} \tau \right)^{\frac{2}{1+3A}}, \quad \varepsilon \approx \frac{1}{6\pi(1+A)^2 \tau^2}. \quad (9)$$

В случае $A = -1$ имеем дело с инфляционной моделью

$$R_F \approx R_F(0) \exp \left[\sqrt{\frac{8\pi C}{3}} \tau \right], \quad \varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const.} \quad (10)$$

При $A = -\frac{1}{3}$ имеем следующую асимптотику (линейная инфляция)

$$R_F \approx \sqrt{\frac{8\pi C}{3} - k} \tau, \quad \varepsilon \approx \frac{C}{\left(\frac{8\pi C}{3} - k \right) \tau^2}. \quad (11)$$

Как видим из асимптотик (9) и (11), решения сингулярны при $t = 0$, при этом промежуток собственного времени от сингулярности до настоящего конечен. В случае же $A = -1$ (асимптотика (10)) решение также сингулярно, но промежуток собственного времени от сингулярности до настоящего бесконечен.

Вообще говоря, сингулярность присуща всем космологическим моделям ОТО, независимо от уравнений состояния. Это следствие полевых уравнений теории Эйнштейна [5]. В этом плане важно исследование альтернативных теорий, в частности таких, которые допускают несингулярные решения.

3. Плоская изотропная модель в рассматриваемой теории.

В биметрических теориях наличие плоской фоновой метрики делает невозможным реализацию закрытых ($k=1$) космологических моделей, возможны только плоская ($k=0$) и открытая ($k=-1$) изотропные модели. Ниже будет рассмотрено решение уравнений теории в случае $k=0$. Метрики, соответствующие этому случаю, имеют вид:

$$ds^2 = N^2(t) dt^2 - R^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (12)$$

$$d\sigma^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (13)$$

Плоская фоновая метрика (13) выбирается таким образом, чтобы при отсутствии материи обе метрики совпадали. Из уравнений поля

$$\bar{R}_{ik} - \frac{1}{2} \bar{R} g_{ik} + S_{ik} = 8\pi G T_{ik} \quad \text{и} \quad S_{;k}^{ik} = 0 \quad [1,2] \quad \text{и уравнений гидродинамики}$$

$T_{;k}^{ik} = 0$ получим следующую систему:

$$\frac{3}{N^2} \frac{R_0^2}{R^2} + \frac{a}{N^2} \left[3 \frac{R_{,00}}{R} - \frac{N_{,00}}{N} + \frac{3}{2} \frac{R_0^2}{R^2} + \frac{3}{2} \frac{N_0^2}{N^2} - 3 \frac{R_0}{R} \frac{N_{,0}}{N} \right] = 8\pi \varepsilon, \quad (14)$$

$$\frac{1}{N^2} \left[-\frac{R_{,00}}{R} - 2 \frac{R_0^2}{R^2} + \frac{R_0}{R} \frac{N_{,0}}{N} \right] = 4\pi(p - \varepsilon), \quad (15)$$

$$\left(\frac{R^3}{N} \right)_{,000} = 0, \quad (16)$$

$$\varepsilon_{,0} + 3 \frac{R_0}{R} (\varepsilon + p) = 0, \quad (17)$$

где индекс "ноль" перед запятой означает производную по t . Отметим еще раз, что (17) является следствием уравнений поля (14)–(16), т.е. для неизвестных N , R , p и ϵ имеем три независимых уравнения. В качестве недостающего уравнения опять используем уравнение состояния вещества (2). С учетом (2) уравнения (16) и (17) легко интегрируются:

$$\epsilon = \frac{C}{R^{3(1+A)}}, \quad (18)$$

$$\frac{R^3}{N} = \beta t^2 + 2\gamma t + \delta, \quad (19)$$

где C , b , g и d - постоянные, определяемые из начальных условий, причем $b \neq 0$ и $C > 0$. Если $b \neq 0$, то сдвигом начала отсчета времени можно устранить и правую часть (19) свести к виду $b\tilde{t}^2 + d$, где возможны случаи $d > 0$, $d = 0$ и $d < 0$. Если же $b = 0$, $g \neq 0$, то таким же образом можно устранить d и правую часть привести к виду $2g\tilde{t}$, причем $g > 0$.

В дальнейшем будет необходима удобная замена переменной

$$\frac{dt}{\beta t^2 + 2\gamma t + \delta} = \pm d\tilde{t} \quad (20)$$

При $b \neq 0$ ($g = 0$) имеем

$$\beta t = \sqrt{\beta\delta} \operatorname{tg} \sqrt{\beta\delta} \tilde{t}, \quad \delta > 0 \quad (21)$$

$$\beta t = \frac{1}{\tilde{t}}, \quad \delta = 0 \quad (22)$$

$$\beta t = \sqrt{|\beta\delta|} \operatorname{th} \sqrt{|\beta\delta|} \tilde{t}, \quad \delta < 0 \quad (23)$$

При $b \neq 0$, $g \neq 0$ ($d = 0$) имеем

$$\gamma t = \exp[2\gamma \tilde{t}] \quad (24)$$

Если же $b = 0$ и $g = 0$, замена тривиальна $t = \delta \tilde{t}$. Подставив (18) и (19) в (14) и сделав замену переменных (20), для масштабного фактора $R(\tilde{t})$ получим уравнение первого порядка

$$3 \frac{\dot{R}^2}{R^3} + \frac{2a(\beta\delta - \gamma^2)}{R^6} = \frac{8\pi C}{R^{3(1+A)}}, \quad (25)$$

где точка означает производную по $\tilde{t}$.

В случае $A = 1$ уравнение (25) имеет следующие решения

$$R = R(0) = \text{const}, \quad \text{если } 8\pi C = 2a(\beta\delta - \gamma^2) > 0, \quad (26)$$

$$R = R(0) \exp \left[\sqrt{\frac{8\pi C - 2a(\beta\delta - \gamma^2)}{3}} \tilde{t} \right], \quad \text{если } 8\pi C > 2a(\beta\delta - \gamma^2). \quad (27)$$

При $A < 1$ имеем:

$$R = \left(\frac{2a(\beta\delta - \gamma^2)}{8\pi C} \right)^{\frac{1}{3(1-A)}} \frac{1}{\left(\sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (1-A) \sqrt{2a(\beta\delta - \gamma^2)} \tilde{t} \right] \right)^{\frac{2}{3(1-A)}}}, \quad \text{если } a(\beta\delta - \gamma^2) > 0 \quad (28)$$

$$R = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1-A)\sqrt{8\pi C\tilde{t}}\right)^{\frac{2}{3(1-A)}}}, \quad \text{если } (\beta\delta - \gamma^2) = 0 \quad (29)$$

$$R = \left(\frac{2|a(\beta\delta - \gamma^2)|}{8\pi C}\right)^{\frac{1}{3(1-A)}} \frac{1}{\left(\operatorname{sh}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(1-A)\sqrt{2|a(\beta\delta - \gamma^2)|}\tilde{t}\right]\right)^{\frac{2}{3(1-A)}}}, \quad \text{если } a(\beta\delta - \gamma^2) > 0. \quad (30)$$

Решения (26)-(30) можно выразить через время t , используя в зависимости от значений параметров b , g и d преобразования (21)-(24).

4. *Анализ решений.* Уже из (19) и (28)-(30) следует, что в теории, наряду с сингулярными решениями, имеются также несингулярные. Для сравнения фридмановского решения (5) в случае $k=0$ с полученными в рассматриваемой теории, а также изучения поведения полученных решений, запишем их в собственном времени τ . Этого достигаем соответственно преобразованиями

$$d\tau = \pm R_F(\eta)d\eta \quad \text{и} \quad d\tau = \pm N(t)dt. \quad (31)$$

В фридмановской модели для трех вариантов уравнения состояния имеем

$$R_F(\tau) = (24\pi C)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}, \quad \text{если } p = \epsilon, \quad (32)$$

$$R_F(\tau) = \sqrt{\frac{32\pi C}{3}}\sqrt{\tau}, \quad \text{если } p = \frac{1}{3}\epsilon, \quad (33)$$

$$R_F(\tau) = (6\pi C)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{2}{3}}, \quad \text{если } p = 0. \quad (34)$$

В рассматриваемом варианте теории для тех же уравнений состояния получаем:

$$R = R(0) = \text{const}, \quad \text{если } p = \epsilon, \quad 8\pi C = 2a(\beta\delta - \gamma^2) > 0, \quad (35)$$

$$R = \sqrt[3]{3(8\pi C - 2a(\beta\delta - \gamma^2))}\tau^{\frac{1}{3}}, \quad \text{если } p = \epsilon, \quad 8\pi C > 2a(\beta\delta - \gamma^2), \quad (36)$$

$$\operatorname{arccsh} \sqrt{\frac{8\pi C}{2a(\beta\delta - \gamma^2)}} R + \sqrt{\frac{8\pi C}{2a(\beta\delta - \gamma^2)}} R \sqrt{\frac{8\pi C}{2a(\beta\delta - \gamma^2)} R^2 - 1} = \sqrt{\frac{512\pi^3 C^3}{3a^2(\beta\delta - \gamma^2)^2}} \tau, \quad (37)$$

если $p = \frac{1}{3}\epsilon, \quad a(\beta\delta - \gamma^2) > 0,$

$$R = \sqrt{\frac{32\pi C}{3}}\tau^{\frac{1}{2}}, \quad \text{если } p = \frac{1}{3}\epsilon, \quad \beta\delta - \gamma^2 = 0, \quad (38)$$

$$-\operatorname{arccsh} \sqrt{\frac{8\pi C}{2a(\beta\delta - \gamma^2)}} R + \sqrt{\frac{8\pi C}{2a(\beta\delta - \gamma^2)}} R \sqrt{\frac{8\pi C}{2a(\beta\delta - \gamma^2)} R^2 + 1} = \sqrt{\frac{512\pi^3 C^3}{3a^2(\beta\delta - \gamma^2)^2}} \tau, \quad (39)$$

если $p = \frac{1}{3}\epsilon, \quad a(\beta\delta - \gamma^2) < 0,$

$$R = \left(6\pi C \tau^2 + \frac{a(\beta\delta - \gamma^2)}{4\pi C} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{если } p = 0, \quad (40)$$

Как видно из (35) и (36), в данной теории при $p = \epsilon$ имеется одно решение с поведением, аналогичным соответствующему фридмановскому, и второе решение - статическое. При $p = \frac{1}{3}\epsilon$ имеются два сингулярных и одно несингулярное решение, но во всех трех случаях при больших τ поведение $R(\tau)$ совпадает с фридмановским. При $p = 0$ и $a(\beta\delta - \gamma^2) > 0$ решение несингулярно и опять при больших τ переходит во фридмановское. Можно подобрать такие начальные условия (т.е. значения параметров C , β , γ и δ), при которых отношение минимального радиуса к современному согласуется с наблюдательными данными о реликтовом излучении. Также можно согласовать результаты теории с данными о распространении гелия [7].

Таким образом, данная теория предсказывает космологические модели, удовлетворяющие наблюдательным данным и в то же время отличающиеся поведением на ранних этапах эволюции Вселенной от фридмановских.

Автор выражает благодарность участникам семинара кафедры теоретической физики ЕГУ за полезные обсуждения.

Ереванский государственный университет,
Армения

FRIEDMANN MODEL'S AND COSMOLOGICAL SOLUTIONS IN BIMETRIC THEORY WITH QUADRATIC LAGRANGIAN

A.H.YERANYAN

The cosmological models are investigated in the framework of the theory of gravitation with the Lagrangian, quadratic with respect to the "intensity". It is shown that the theory predicts both singular, and nonsingular solutions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R.M.Avakian, L.Sh.Grigorian, Astrophys. Space Sci., 146, 183, 1988.*
2. *Р.М.Авакян, А.А.Еранян, Астрофизика 43, 303, 2000.*
3. *Р.М.Авакян, А.А.Еранян, Астрофизика 43, 653, 2000.*
4. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория поля, Наука, М., 1988.*
5. *С. Хокинг, Дж.Эллис, Крупномасштабная структура пространства-времени. Мир, М., 1977.*
6. *К.Уилл, Теория и эксперимент в гравитационной физике. Энергоатомиздат, М., 1985.*