

УДК: 523.987

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОКРЫТИЯ И ЕЕ АСТРОФИЗИЧЕСКОМ ПРИЛОЖЕНИИ

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 18 августа 2000

Работа посвящена определению зависимости коэффициента заполнения и его флуктуирующий от числа и геометрических размеров структурных элементов излучающей среды, охватываемых апертурой наблюдения спектрометра. Задача решена с использованием метода статистических испытаний. Обсуждаются следствия полученных результатов при интерпретации наблюдаемых пространственных флуктуаций поверхностной яркости спокойных протуберанцев в EUV - линиях. Показано, что роль случайных изменений коэффициента заполнения среди других факторов, вызывающих флуктуации яркости, незначительна для областей протуберанцев с большой и умеренной плотностью волокон. В то же время для разреженных и слабо излучающих областей эта роль может стать существенной.

1. Введение. При интерпретации спектров различных астрофизических объектов нередко приходится сталкиваться с необходимостью учитывать тонкую многокомпонентную структуру излучающей среды. Сложность возникающих при этом задач заставляет обычно прибегать к различного рода приближениям и рассматривать усредненную в некотором смысле картину в рамках однородных моделей, теория которых хорошо разработана. Однако с совершенствованием наблюдательных возможностей подобный подход часто становится неудовлетворительным, поскольку далеко не всегда приводит к результатам, согласующимся с данными наблюдений.

В качестве наиболее типичных примеров многокомпонентных сред можно привести такие нестационарные образования в солнечной атмосфере, как хромосферные спиккулы, протуберанцы, различные корональные потоки. Подобные примеры могут быть приведены и из других областей астрофизики, однако конкретной мотивацией настоящей работы явилось исследование спокойных солнечных протуберанцев в далеком ультрафиолете, наблюдения которых были начаты еще в 1973г. автоматической станцией Skylab. В рамках ряда космических программ такие исследования проводятся и в настоящее время [1,2]. Полученные наблюдательные данные позволяют, в частности, судить о геометрических и физических параметрах тонкой волокнистой структуры (threadlike structure) спокойных протуберанцев, которая в настоящее время является твердо установленным фактом.

Вклад автора, внесенный вместе с соавторами в данную область, заключается в статистическом исследовании флуктуаций поверхностной яркости протуберанцев в EUV - (extreme ultraviolet) линиях и континууме и изложен

в работах [3-6]. В них обсуждается ряд причин, приводящих к пространственным флуктуациям: физические неоднородности, различия в числе структурных элементов вдоль луча зрения, инструментальный шум, а также возможное влияние солнечной короны в случае спектральных линий, образующихся при высоких температурах. Вместе с тем следует отметить, что колебания поверхностной яркости, вообще говоря, могут быть обусловлены также и вариациями величины коэффициента заполнения щели спектрографа при переходе от одного пикселя к другому. Указанная величина определяется как отношение площади излучающей поверхности к общей площади области, охватываемой апертурой инструмента. Очевидно, что коэффициент заполнения представляет собой случайную величину, способную внести определенный вклад в наблюдаемую картину флуктуаций поверхностной яркости. Нетрудно также видеть, что значение этой величины зависит как от относительных геометрических размеров структурных элементов среды, так и от их количества, наблюдаемого в пределах одного пикселя. Настоящая работа посвящена установлению этой зависимости и обсуждению некоторых ее следствий.

2. *Постановка задачи и ее решение.* Нас будет интересовать специальный тип протуберанцев, часто называемых протуберанцами формы частокола (см. [7,8]). Для указанных объектов можно принять, что волокна, будучи перпендикулярными к солнечной поверхности, располагаются почти параллельно друг к другу. Это обстоятельство существенным образом упрощает задачу, поскольку в этом случае достаточно ограничиться рассмотрением одномерной задачи, которую можно сформулировать следующим образом.

Пусть имеется отрезок $\overline{0, L}$ длины L и некоторое количество N отрезков длины l ($0 \leq l \leq 2L$). Допустим, что последние располагаются вдоль исходного отрезка $\overline{0, L}$ случайным образом, иначе говоря, будем полагать, что центры отрезков l распределены внутри отрезка $\overline{0, L}$ равномерно. Степень покрытия отрезка $\overline{0, L}$, обозначаемая далее через X_N , очевидно, является случайной величиной. Задача заключается в определении ее среднего значения $\langle X_N \rangle$,

и относительного среднеквадратичного отклонения $\delta_N = \left(\langle X_N^2 \rangle / \langle X_N \rangle^2 \right) - 1$.

Легко видеть, что решение задачи зависит лишь от отношения $\alpha = l/L$, поэтому без ограничения общности можно положить $L=1$. В дальнейшем обозначение L употребляется лишь в качестве названия покрываемого отрезка.

Насколько известно автору, задача о покрытии в такой общей постановке в литературе не рассматривалась. В известных теоремах о покрытии (см., например, [9]) обычно ставится вопрос о нахождении лишь вероятности полного покрытия данной области. Так, в упомянутой монографии такая задача рассматривается для окружности, покрываемой дугами. Сложность обсуждаемой нами задачи по сравнению с упомянутой (с учетом того, что в последней окружность разворачивается в отрезок) заключается в присущей

ей граничных эффектах и в более общей постановке вопроса.

3. *Приближенное решение.* Некоторое представление о зависимости среднего значения величины $X_N(\alpha)$ от параметров N и α можно получить, исходя из следующих соображений. Непосредственным вычислением нетрудно показать, что при $\alpha = 1$ справедлива формула

$$\langle X_N(1) \rangle = 1 - \frac{1}{(N+1) \cdot 2^N}. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь дискретный аналог нашей задачи, принимая, что отрезок L разбит на M интервалов длиной α , где M - некоторое положительное целое число. Если для каждого из указанных интервалов пренебречь граничными эффектами (другими словами, если пренебречь тем обстоятельством, что отрезки l , попадая в какой-либо из M интервалов, могут частично покрыть и соседние интервалы), то задача сводится, по сути дела, к классической задаче о размещении N шаров по M ящикам. Сделанное выше предположение о равномерном распределении центров отрезков l равносильно тому, что все интервалы (ящики) могут считаться равноправными. Отсюда можно заключить, что для нахождения $\langle X_N(\alpha) \rangle$ достаточно определить степень покрытия какого-либо одного из M интервалов. Поскольку вероятность попадания в заданный интервал в точности k ($k=0, 1, \dots, N$) центров равен $C_{M+N-k-2}^{M-2} / C_{M+N-1}^N$ (см. [9]), то окончательно с помощью формулы (1) имеем

$$\langle X_N(\alpha) \rangle \approx \frac{1}{C_{M+N-1}^N} \sum_{k=0}^N C_{M+N-k-2}^{M-2} \left[1 - \frac{1}{(k+1) \cdot 2^k} \right]. \quad (2)$$

В качестве иллюстрации точности обсуждаемого приближенного решения на рис.1 приводятся графики зависимости $\langle X_N(\alpha) \rangle$ от N для $\alpha = 0.2; 0.5$, вычисленные по формуле (2), при этом для сравнения даются результаты, полученные путем моделирования процесса на основе метода статистических испытаний (см. ниже раздел 4). Как нетрудно видеть, различия между соответствующими кривыми сначала растут по мере увеличения N , однако затем уменьшаются ввиду того, что при $N \rightarrow \infty$ кривые обладают общей асимптотикой, равной 1. Вместе с тем согласие между двумя решениями тем лучше, чем больше α . В отличие от среднего значения величины $X_N(\alpha)$ вычисление среднеквадратичного отклонения намного сложнее, поскольку в этом случае приходится рассматривать все различные распределения центров по M интервалам, приписывая каждому из них соответствующую вероятность реализации. Разумеется, что такая процедура является достаточно трудоемкой при относительно больших значениях параметров M и N . Расчеты, выполненные для статистики Бозе-Эйнштейна, которая является естественной в нашем случае, позволяют заключить, что рассматриваемая модельная задача весьма грубо описывает реальную картину зависимости δ от M и N , поэтому на этом вопросе мы не остановимся.

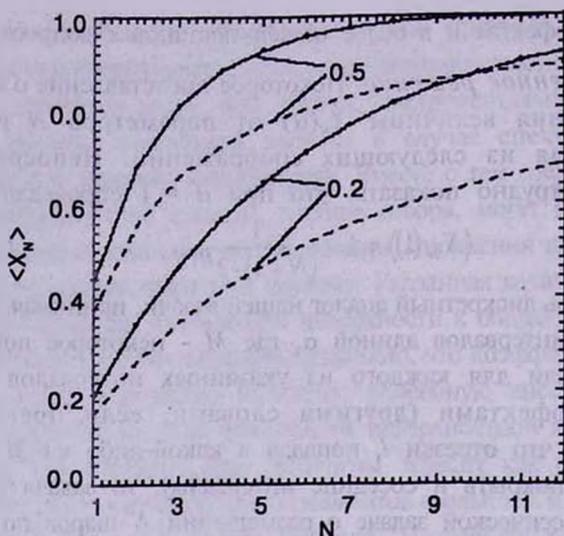


Рис.1. Зависимость $\langle X_N(\alpha) \rangle$ от числа покрывающих отрезков N для $\alpha = 0.2$; 0.5 . Кривые, полученные применением формулы (2), обозначены пунктиром. Сплошные линии - кривые, построенные методом статистических испытаний.

4. *Результаты численного моделирования.* При решении задачи методом статистических испытаний (метод Монте-Карло) для каждой пары значений α и N усреднение производилось по 500 случайным реализациям распределения центров отрезков l . Выборки такого объема обеспечивают достаточно высокую точность при определении $X_N(\alpha)$ (с максимальной относительной погрешностью Δ менее 0.4%) и несколько худшую ($\Delta \leq 7\%$) для величины $\delta_N(\alpha)$.

Результаты расчетов приводятся на рис.2, 3. Как видно из рис.2,

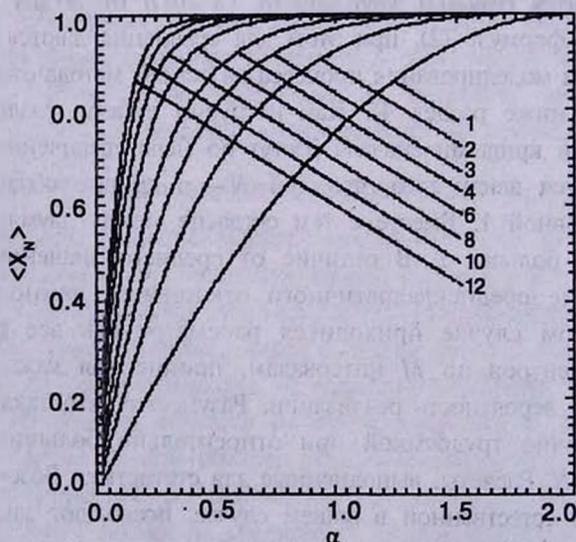


Рис.2. Зависимость $\langle X_N(\alpha) \rangle$ от длины α покрывающих отрезков при отмеченных значениях числа N .

степень покрытия отрезка L представляет собой монотонно возрастающую функцию от длины α покрывающих отрезков, причем скорость возрастания функции существенным образом зависит от их количества N . Чем больше N , тем круче кривые при малых α и тем шире асимптотическое плато для сравнительно больших α . При очень больших значениях N кривые состоят, по сути дела, из двух линейных участков при весьма узкой переходной области. При значениях $\langle X_N(\alpha) \rangle$, не очень близких к 1, полученные кривые позволяют, в принципе, определить одну из трех величин $\langle X_N(\alpha) \rangle$, α , N по известным двум другим. На наблюдательном аспекте данного вопроса мы остановимся в следующем разделе.

На рис.3 изображены графики зависимости относительного среднеквадратичного отклонения $\delta_N(\alpha)$ от длины α покрывающих отрезков. Кривые обладают максимумами, которые для $N \geq 2$ достигаются примерно при $\alpha \approx 1/N$. Обращает на себя внимание резкое уменьшение величины $\delta_N(\alpha)$ с ростом N (для $N \geq 2$). При $N \geq 10$ значения относительного среднеквадратичного отклонения становятся меньше 0.01. Этот последний результат представляется важным с точки зрения рассматриваемой нами астрофизической задачи, к обсуждению которой мы переходим.

5. Приложение к астрофизической задаче. Как было показано в работах [5,6], наименьший уровень флуктуаций поверхностной яркости спокойных протуберанцев типа частокола наблюдается у линии H Ly- α . Этот уровень повышается практически монотонно при переходе от более ярких областей с плотным распределением волокон, где $\delta \sim 0.02 \div 0.06$, к менее ярким разреженным областям, для которых значения δ могут достичь $0.2 \div 0.3$. Аналогичной закономерности подчиняются, вообще говоря, и

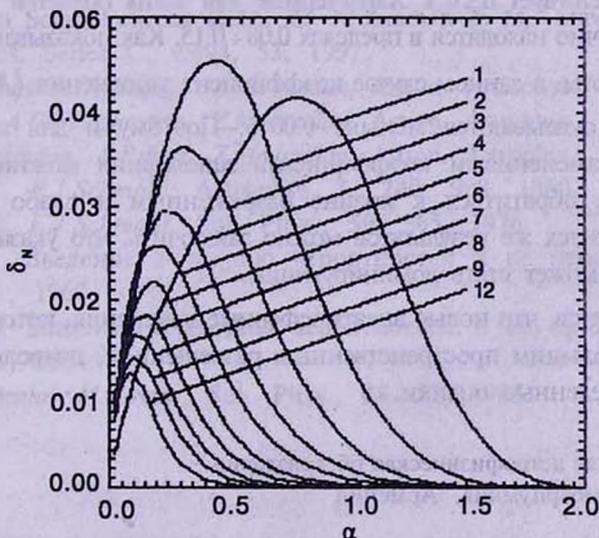


Рис.3. Зависимость относительного среднеквадратичного отклонения $\delta_N(\alpha)$ от длины α покрывающих отрезков при указанных значениях числа N .

некоторые другие EUV - линии. Так, для линий $\lambda\lambda$ CII 1336A, CIII 977A указанные пределы изменения равны соответственно $0.05 + 0.06$ и $0.3 + 0.6$.

В ярких областях протуберанцев число волокон весьма велико (по некоторым оценкам $N \sim 10^2$ [11]). Тогда, как это вытекает из полученных выше результатов, для довольно широкого интервала изменения α (> 0.1) коэффициент заполнения (в согласии с наблюдательными данными) практически не будет отличаться от единицы, и флуктуациями, вызванными его изменением, с большой точностью можно пренебречь. С другой стороны, нами было показано в работе [6], что флуктуации поверхностной яркости, обусловленные различием в количестве волокон вдоль луча зрения, также малы ввиду большой непрозрачности протуберанцев в линии H Ly- α . Сопоставляя указанные два результата, можно заключить, что основным фактором, вызывающим наблюдаемые колебания яркости, являются физические неоднородности (влияние короны и инструментальный шум в данном случае малы). Несколько большие значения δ для вышеупомянутых линий ионов CII и CIII можно, по-видимому, объяснить как малостью оптической толщины протуберанцев в этих линиях, так и меньшим значением N , которым они соответствуют. Последнее означает, что при большой густоте структурных элементов высокотемпературные переходные области, где они образуются, могут реализоваться и вокруг группы волокон (а не только вокруг каждого из них в отдельности).

Типичным примером областей с умеренной плотностью волокон может служить модель, рассмотренная в работе [7], в которой предполагается, что апертура инструмента охватывает 12 волокон шириной ≤ 1.25 Мм, располагающихся в 3 ряда. При линейных размерах области, попадающей в пиксель, равных 3.6 Мм, это соответствует $\alpha \leq 0.3$. Характерные для таких областей наблюдаемые значения δ обычно находятся в пределах $0.08 + 0.15$. Как показывают результаты настоящей работы, в данном случае коэффициент заполнения $\langle X_{12}(\alpha) \rangle \geq 0.98$, а значения δ оказываются меньше 0.0015. Поэтому и для этих областей случайными изменениями коэффициента заполнения можно пренебречь. Наконец, если обратиться к крайне разреженным и слабо излучающим областям, то из тех же результатов можно заключить, что указанный фактор в этом случае может стать доминирующим.

Автор надеется, что новые внеатмосферные измерения, которые обладают значительно большим пространственным разрешением, позволят во многом уточнить приведенные оценки.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
им. В.А.Амбарцумяна, Армения

ON A COVERING PROBLEM AND ITS ASTROPHYSICAL APPLICATION

A.G.NIKOGHOSSIAN

The paper is devoted to determination of the filling factor and its fluctuations as functions of the number and geometrical dimensions of structural elements of radiating medium covered by the observing aperture of spectrometer. The problem is solved by the method of statistical trials. The consequences of the results obtained are discussed in connection with interpretation of the spatial variations exhibited by the superficial brightness of the solar quiescent prominences in EUV (extreme ultraviolet) lines. The role of the filling factor fluctuations in the regions with more or less thickly distributed threads is concluded to be negligible compared to other reasons responsible for the brightness variations. However, the role may become essential for the rarefied and faint regions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *B.Schmieder, O.Engvold, J.E.Wiik, E.DeLuca*, Proceedings 8th SOHO Workshop 'Plasma Dynamics and Diagnostics in the Solar Transition Region and Corona', Paris, France, 599, 1999.
2. *B.Schmieder, T.A.Kucera, P.Heinzel, J.-C. Vial*, *ibid.*, 605.
3. *A.G.Nikoghossian, S.Pojoga*, In: Theoretical and Observational Problems Related to Solar Eclipses (Eds. Z. Mouradian & M. Stavinschi), NATO ASI Series, Series C, v.494, 53, 1997.
4. *A.G.Nikoghossian, S.Pojoga, Z.Mouradian*, *Astron. Astrophys.*, **325**, 813, 1997.
5. *S.Pojoga, A.G.Nikoghossian, Z.Mouradian*, *Astron. Astrophys.*, **332**, 325, 1998.
6. *A.G.Nikoghossian, S.Pojoga, Z.Mouradian*, *Astron. Astrophys.*, **342**, 785, 1999.
7. *F.Q.Orall, E.J.Schmahl*, *Astrophys. J.*, **240**, 908, 1980.
8. *F.Q.Orall, E.J.Schmahl*, *Sol. Phys.*, **50**, 365, 1976.
9. *В.Феллер*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, Мир, М., 1967.
10. *В.Феллер*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, Мир, М., 1964.
11. *J.M.Fontenla, M.Rovira*, *Sol. Phys.*, **96**, 53, 1985.