

УДК: 524.31-852

МЕТОД АЛЬБЕДНОГО СДВИГА: РАССЕЯНИЕ В ЛИНИИ С ПОЛНЫМ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПО ЧАСТОТАМ

А.М.КАСАУРОВ

Поступила 10 июля 2000

Принята к печати 15 сентября 2000

Метод альбедного сдвига применяется для решения задачи о переносе излучения в частотах линии. Рассматривается перенос излучения с полным перераспределением по частотам в плоскопараллельной полубесконечной атмосфере. Показано, что в этом случае метод хорошо работает и позволяет существенно улучшить сходимость при итеративном решении уравнения для функции источников.

1. *Введение.* Метод альбедного сдвига ранее применялся для решения задач о многократном монохроматическом рассеянии (см. [1-8]). В данной работе сделана попытка применить его в задачах о рассеянии в линии с полным перераспределением по частотам (ППЧ). Одним из условий применимости метода является существование вещественного корня у характеристического уравнения. Это не позволяет использовать его напрямую для задач о переносе излучения в линии. Однако, если ядерную функцию аппроксимировать конечной суммой экспонент, то у характеристического уравнения появляются вещественные корни и метод становится применимым (несколько иной, близкий по идее путь указан в работе [2]). В данной работе показана возможность такого подхода на примере линии с доплеровским профилем.

2. *Функция источников.* Важную роль в теории переноса излучения играет функция источников S . Фактически задача о нахождении поля излучения в плоской освещаемой извне атмосфере может быть сведена (см., например, [9-11]) к нахождению функции источников. Функция источников удовлетворяет хорошо известному интегральному уравнению

$$S(\tau, z) = \int_0^{\bar{\tau}} K(\tau - \tau') S(\tau', z) d\tau' + e^{-\tau/z}, \quad (1)$$

где ядерная функция $K(\tau)$ при переносе излучения в линии с ППЧ имеет вид ([11], разд. 2.6)

$$K(\tau) = \int_0^{\bar{\tau}} e^{-\tau'/z} G(z) \frac{dz}{z}. \quad (2)$$

Она нормирована следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau = \lambda, \quad (3)$$

где λ - альbedo однократного рассеяния. При этом нормировка $G(z)$ имеет вид

$$2 \int_0^{\infty} G(z) dz = \lambda. \quad (4)$$

Явный вид $G(z)$ определяется профилем коэффициента поглощения. Мы будем рассматривать случай доплеровского профиля. Тогда (см., например, [11], разд. 2.7)

$$G(z) = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} \begin{cases} 1; & z \leq 1 \\ \operatorname{erfc}(\sqrt{2 \ln z}); & z > 1, \end{cases} \quad (5)$$

где $\operatorname{erfc}(z)$ - дополнительный интеграл вероятности

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-z'^2} dz'. \quad (6)$$

Наличие вещественного корня k у характеристического уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\tau} K(\tau) d\tau = 1 \quad (7)$$

является необходимым условием применимости метода альбедного сдвига. Поэтому при попытке непосредственно применить данный метод к задачам о переносе излучения в линии возникают трудности, так как в этом случае у (7) вещественных корней не существует (хотя в консервативном случае значение $k=0$ удовлетворяет характеристическому уравнению, но ядро не обладает конечным вторым моментом, что не позволяет эффективно применять метод альбедного сдвига). Один из приемов, позволяющих обойти эту трудность, будет рассмотрен в следующем разделе.

Заметим, что характеристическое уравнение (7) можно записать также в следующем виде:

$$T\left(\frac{1}{k}\right) = 0, \quad (8)$$

где функция $T(z)$ имеет вид

$$T(z) = 1 - 2z^2 \int_0^{\infty} \frac{G(z')}{z^2 - z'^2} dz'. \quad (9)$$

Значение функции $S(t, z)$ на границе среды представляет собой так называемую H -функцию:

$$H(z) = S(0, z). \quad (10)$$

Она удовлетворяет хорошо известному нелинейному уравнению (см., например, [11]):

$$H(z) = 1 + zH(z) \int_0^{\infty} \frac{H(z')G(z')}{z+z'} dz'. \quad (11)$$

3. Приближение ядерной функции суммой экспонент. Вместо

точного выражения (2) для ядерной функции $K(\tau)$ мы будем рассматривать приближенное, которое получается заменой интеграла на сумму (по какой-либо из квадратурных формул):

$$K(\tau) = \sum_{i=1}^N e^{-|\tau|/z_i} G(z_i) \frac{w_i}{z_i}, \quad (12)$$

где w_i - веса, а z_i - узлы квадратурной формулы. В дальнейшем под $K(\tau)$ будем понимать ядерную функцию, заданную в виде (12). При этом вид уравнения (1) для функции источников $S(\tau, z)$ останется тем же, а выражение для $T(z)$ и нелинейное уравнение для $H(z)$ могут быть записаны в виде

$$T(z) = 1 - 2z^2 \sum_{i=1}^N \frac{w_i G(z_i)}{z^2 - z_i^2} \quad (13)$$

и

$$H(z) = 1 + zH(z) \sum_{i=1}^N \frac{w_i H(z_i) G(z_i)}{z + z_i}. \quad (14)$$

Выбор квадратурной формулы - отдельный вопрос. Мы пользовались квадратурной формулой Лагерра. Хотя, как было показано в [12] (см. также [13]), данная формула не обеспечивает наилучшей точности в случае переноса излучения в линии, однако ее достаточно, чтобы продемонстрировать работу метода альбедного сдвига.

Для ядерной функции, определенной по формуле (12), характеристическое уравнение будет иметь N пар вещественных корней (в консервативном случае, т.е. при $1=1$, одна из пар порождает двукратное вырожденный корень, равный нулю)

$$\pm k_1, \pm k_2, \dots, \pm k_N. \quad (15)$$

Для функций $H(z)$ и $T(z)$ можно получить явные выражения (см. [9]):

$$H(z) = \prod_{i=1}^N \frac{1 + z/z_i}{1 + k_i z}, \quad (16)$$

$$T(z) = \prod_{i=1}^N \frac{1 - k_i^2 z^2}{1 - z^2/z_i^2}. \quad (17)$$

4. *Альбедный сдвиг.* В основе метода альбедного сдвига лежит следующий факт: уравнению (1) мы можем сопоставить семейство уравнений той же общей структуры, такое, что между решениями всех этих уравнений существует простая связь: В простейшем случае имеем однопараметрическое семейство, так что появляется свободный параметр. Варьируя его, можно добиться того, чтобы соответствующее уравнение обладало "хорошими" численными свойствами. Обобщение метода на случай нескольких свободных параметров рассмотрен в Приложении.

Применим метод альбедного сдвига к функции источников. Пусть \hat{k} - произвольное вещественное число. Введем семейство характеристических

функций $\hat{G}(z)$, зависящих от \hat{k} следующим образом:

$$\frac{\hat{G}(z)}{1 - \hat{k}^2 z^2} = \frac{G(z)}{1 - k^2 z^2}, \quad (18)$$

где k - это наименьший по модулю из корней (15). Именно он оказывает наибольшее влияние на численные свойства уравнений (1) и (11).

Согласно (8) и (18), мы имеем

$$\hat{T}\left(\frac{1}{\hat{k}}\right) = 0, \quad (19)$$

где

$$\hat{T}(z) = 1 - 2z^2 \int_0^{\bar{z}} \frac{\hat{G}(z')}{z'^2 - z^2} dz', \quad (20)$$

или, учитывая (13),

$$\hat{T}(z) = 1 - 2z^2 \sum_{i=1}^N \frac{w_i \hat{G}(z_i)}{z^2 - z_i^2}. \quad (21)$$

Заметим, что

$$\frac{\hat{T}(z)}{1 - \hat{k}^2 z^2} = \frac{T(z)}{1 - k^2 z^2}. \quad (22)$$

Определим $\hat{\lambda}$ как нормировку функции \hat{G} :

$$\hat{\lambda} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(z) dz \quad (23)$$

и назовем $\hat{\lambda}$ *эффективным альбедо*. Исходя из (23) и учитывая (18), можно получить

$$\frac{1 - \hat{\lambda}}{\hat{k}^2} = \frac{1 - \lambda}{k^2}. \quad (24)$$

По $\hat{G}(z)$ построим ядро $\hat{K}(\tau)$ по аналогии с (12):

$$\hat{K}(\tau) = \sum_{i=1}^N e^{-|\tau|/z_i} \hat{G}(z_i) \frac{w_i}{z_i}. \quad (25)$$

Функция $\hat{K}(\tau)$ нормирована следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}(\tau) d\tau = \hat{\lambda}. \quad (26)$$

Введем функцию $\hat{S}(\tau, z)$ как решение уравнения

$$\hat{S}(\tau, z) = \int_0^{\tau} \hat{K}(\tau - \tau') \hat{S}(\tau', z) d\tau' + e^{-\tau/z} \quad (27)$$

и обозначим

$$\hat{H}(z) = \hat{S}(0, z). \quad (28)$$

Уравнение для $\hat{S}(\tau, z)$ имеет ту же структуру, что и для $S(\tau, z)$. Для

функции $\hat{H}(z)$ можно написать уравнение, аналогичное (11).

Поразительным фактом является существование простой связи между функциями $S(\tau, z)$ и $\hat{S}(\tau, z)$. Имеются две альтернативные формулы, связывающие эти функции:

$$S(\tau, z) = \frac{1 + \hat{k}z}{1 + kz} \left(\hat{S}(\tau, z) + (\hat{k} - k) \int_0^{\tau} e^{-k(\tau-\tau')} \hat{S}(\tau', z) d\tau' \right) \quad (29)$$

и

$$S(\tau, z) = \frac{1 - \hat{k}^2 z^2}{1 - k^2 z^2} \left(\hat{S}(\tau, z) + (\hat{k} - k) \frac{z}{1 - \hat{k}z} \frac{\hat{H}(z)}{\hat{H}\left(\frac{1}{k}\right)} \hat{S}\left(\tau, \frac{1}{k}\right) \right). \quad (30)$$

Вывод и подробное обсуждение этих формул можно найти в [8] (см. также [3] и [6]).

Связь же граничных значений функций S и \hat{S} , т.е. функций $H(z)$ и $\hat{H}(z)$, очень проста:

$$(1 + kz)H(z) = \left(1 + \hat{k}z\right)\hat{H}(z) \quad (31)$$

Эта формула становится очевидной, если сравнить явные выражения (16) для функций $H(z)$ и $\hat{H}(z)$.

В случае, если в уравнении (1) вместо свободного члена вида $e^{-\tau/z}$ взять свободный член в форме $(1 - \lambda)^{-1/2}$, то в уравнении (27) для функции \hat{S} свободный член нужно положить равным $\left(1 - \hat{\lambda}\right)^{-1/2}$. Тогда будет иметь место следующая формула восстановления:

$$S(\tau) = \hat{S}(\tau) + \left(\hat{k} - k\right) \int_0^{\tau} e^{-k(\tau-\tau')} \hat{S}(\tau') d\tau', \quad (32)$$

которую легко можно получить из (29).

5. *Численные результаты.* Описанный метод был реализован численно для нахождения функции источников S при двух видах свободного члена: экспоненциальном ($e^{-\tau/z}$) и постоянном $\left((1 - \lambda)^{-1/2}\right)$. Уравнение (27) для функции \hat{S} решалось методом простых итераций при различных значениях \hat{k} . Затем по одной из формул (29) или (30) (в случае экспоненциального свободного члена), либо по (32) (в случае постоянного свободного члена) проводилось восстановление функции S . Подробное обсуждение данной методики решения уравнения для функции источников см. в [8].

Заметим, что вначале нам необходимо найти все корни характеристического уравнения (8). Это, однако, не представляет большой трудности,

поскольку вся вещественная ось может быть разбита на промежутки, на каждом из которых существует только по одному корню (см. [9]).

Результаты расчетов в случае обоих свободных членов показали хорошую внутреннюю согласованность - имеет место совпадение между собой с точностью до 4 + 5 значащих цифр значений функций $S(\tau)$, восстановленных по функциям $\hat{S}(\tau)$, рассчитанным для различных значений параметра \hat{k} .

Еще один способ проверки - по значениям рассчитанной функции S на границах среды. При экспоненциальном свободном члене значение $S(0, z)$ должно совпадать со значением H - функции, полученным либо по явной формуле (16), либо путем численного решения уравнения (14). В случае же постоянного свободного члена должны выполняться следующие соотношения: $S(0) = 1$, $S(\infty) = (1 - \lambda)^{-1/2}$. В обоих случаях имеет место очень хорошее согласие - 4 + 5 значащих цифр при точности расчетов $1 \cdot 10^{-5}$ (относительная разность между двумя последовательными итерациями).

Наконец, последним критерием правильности расчетов является согласие полученных результатов с данными других авторов. В частности, для экспоненциального свободного члена проводилось сравнение значений функции $H(z)$, рассчитанных при помощи метода альбедного сдвига (как граничное значение $S(0, z)$), с приведенными в [11].

Параметр \hat{k} непосредственным образом влияет на скорость сходимости итеративного решения уравнения (27). Рассмотрим случай постоянного свободного члена. На рис.1 приведена зависимость от параметра \hat{k} числа итераций n , необходимых для достижения относительной точности $1 \cdot 10^{-5}$ при $\lambda = 0.9999$. Рис.2 иллюстрирует аналогичную зависимость n от $\hat{\lambda}$. Эти рисунки ясно показывают, что метод альбедного сдвига позволяет существенно ускорить процесс получения итеративного решения. В данном

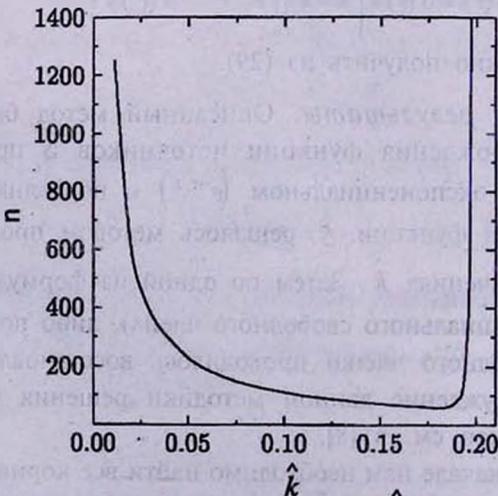


Рис.1. Зависимость числа итераций n от параметра \hat{k} в случае $\lambda = 0.9999$.

случае требуются тысячи итераций, чтобы прямое итеративное решение уравнения (1) формально сошлось, однако ценность этих численных данных будет весьма невысока ввиду больших численных ошибок. Отметим, что кривые на рис.1 и 2 имеют весьма плоские минимумы. Таким образом, хотя условие $\hat{\lambda} = 0$ не является наилучшим, но оно тем не менее обеспечивает скорость сходимости, не сильно отличающуюся от оптимальной.

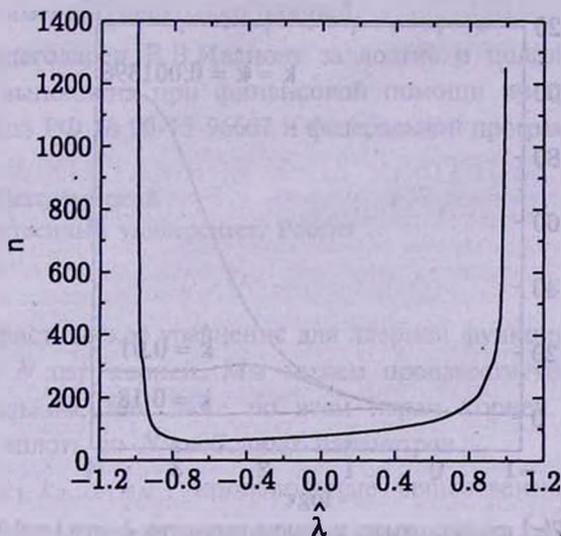


Рис.2. Зависимость числа итераций n от эффективного альбеда $\hat{\lambda}$ в случае $l = 0.9999$.

В случае экспоненциального свободного члена картина качественно аналогична только что описанной. Зависимость \hat{k}_{opt} - значения \hat{k} , оптимального по числу итераций, от l для случая экспоненциального свободного члена $z = 1$ приводится на рис.3.

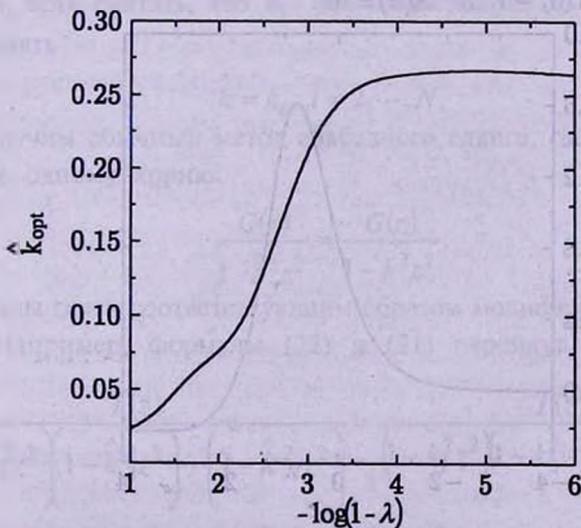


Рис.3. Зависимость \hat{k}_{opt} от l

На рис.4 приведены графики функции $\hat{S}(\tau)$ для нескольких значений \hat{k} .

При этом случай $\hat{k} = k$ соответствует функции $S(t)$, т.е., фактически, функция $S(t)$ - это один из членов семейства функций $\hat{S}(\tau)$. Однако значения функций \hat{S} , соответствующие разным значениям \hat{k} , при больших t могут отличаться на порядки.

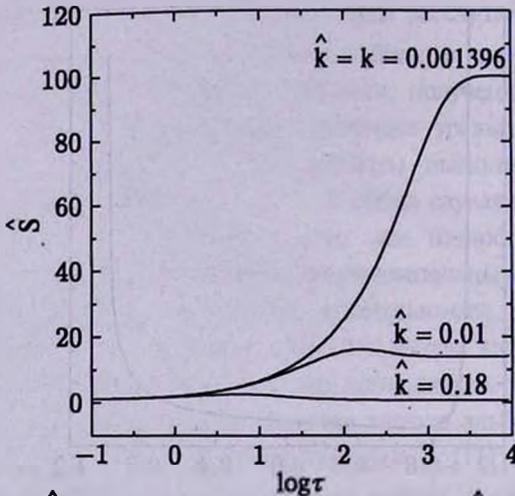


Рис.4. Функция $\hat{S}(\tau)$ для нескольких значений параметра \hat{k} при $l = 0.9999$.

На рис.5 приведен график функции \hat{S} , отвечающей оптимальному значению \hat{k} (для случая $\lambda = 0.9999$). Как видим, функция \hat{S} меняется в узких пределах. При всех t она по порядку величины не отличается от единицы. Физическая же функция источников в этом случае меняется на два порядка, от $S(0) = 1$ до $S(\infty) = 10^2$.

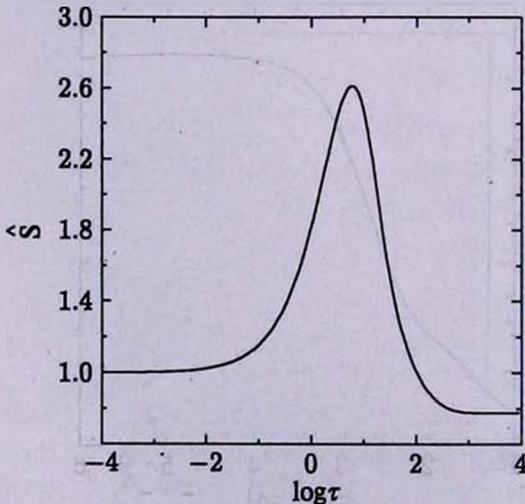


Рис.5. Функция $\hat{S}(\tau)$ при \hat{k}_{opt} и $l = 0.9999$.

6. *Заключение.* Рассмотрена задача о нахождении функции источников в плоской полубесконечной атмосфере для рассеяния в линии с доплеровским профилем. Предложен способ применения метода альбедного сдвига в этом случае.

Проиллюстрирована высокая численная эффективность метода. Показан путь обобщения метода на случай, когда у характеристического уравнения имеется несколько корней.

Автор благодарен В.В.Иванову за долгие и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой помощи программы поддержки ведущих школ РФ № 00-15-96607 и федеральной программы "Астрономия".

Санкт-Петербургский
государственный университет, Россия

Приложение

Характеристическое уравнение для ядерной функции, заданной в виде (12), имеет N пар корней. Мы можем произвести сдвиг не по одной, а по нескольким, или даже по всем парам корней. При этом у нас получается вплоть до N свободных параметров.

Пусть $\hat{k}_1, \hat{k}_2, \dots, \hat{k}_N$ - произвольные вещественные числа. Введем семейство характеристических функции $\hat{G}(z)$, зависящих от этих параметров, таких, что

$$\frac{\hat{G}(z)}{\left(1 - \hat{k}_1^2 z^2\right) \left(1 - \hat{k}_2^2 z^2\right) \dots \left(1 - \hat{k}_N^2 z^2\right)} = \frac{G(z)}{\left(1 - k_1^2 z^2\right) \left(1 - k_2^2 z^2\right) \dots \left(1 - k_N^2 z^2\right)} \quad (\text{A1})$$

При этом, если считать, что k_1 - это наименьший по модулю из корней (15), и взять

$$\hat{k} = k_i, \quad i = 2, \dots, N, \quad (\text{A2})$$

то мы получим обычный метод альбедного сдвига, где происходит сдвиг только по одному корню:

$$\frac{\hat{G}(z)}{1 - \hat{k}^2 z^2} = \frac{G(z)}{1 - k^2 z^2} \quad (\text{A3})$$

Формулы связи соответствующим образом модифицируются на общий случай. Например, формулы (22) и (31) перейдут в

$$\frac{\hat{T}(z)}{\left(1 - \hat{k}_1^2 z^2\right) \left(1 - \hat{k}_2^2 z^2\right) \dots \left(1 - \hat{k}_N^2 z^2\right)} = \frac{T(z)}{\left(1 - k_1^2 z^2\right) \left(1 - k_2^2 z^2\right) \dots \left(1 - k_N^2 z^2\right)} \quad (\text{A4})$$

и

$$(1 + k_1 z)(1 + k_2 z) \dots (1 + k_N z) H(z) = \left(1 + \hat{k}_1 z\right) \left(1 + \hat{k}_2 z\right) \dots \left(1 + \hat{k}_N z\right) \hat{H}(z). \quad (A5)$$

Справедливость соотношений (A4) и (A5) следует непосредственно из формул (16) и (17).

Вопрос о применении многократной факторизации и оптимизации метода дискретных ординат рассматривается в работе [14].

ALBEDO SHIFTING: LINE FORMATION WITH COMPLETE FREQUENCY REDISTRIBUTION

A.M.KASAUROV

The albedo shifting technique is applied to the problem of line formation. The line formation problem with complete frequency redistribution in a semi-infinite plane-parallel scattering atmosphere is considered. It is shown that for this case the method not only works correctly but also well increases the process of iterative solving for the source function equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В.Иванов, *Астрофизика*, **13**, 284, 1977.
2. H.Domke, *J.Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **39**, 283, 1988.
3. V.V.Ivanov, G.B.Rybicki, A.M.Kasaurov, *Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics Preprint Series №3478*, 1992.
4. Д.И.Нагурнер, *Докл. АН РФ*, **343**, 191, 1995.
5. Н.Б.Енгибарян, Б.Н.Енгибарян, *Астрофизика*, **38**, 417, 1995.
6. В.В.Иванов, *Астрон. ж.*, **75**, 102, 1998.
7. В.В.Иванов, А.М.Касауров, *Астрофизика*, **41**, 623, 1998.
8. В.В.Иванов, А.М.Касауров, *Астрофизика*, **42**, 485, 1999.
9. S.Chandrasekhar, *Radiat. Transfer*, Clarendon Press, Oxford, 1950.
10. В.В.Соболев, *Рассеяние света в атмосферах планет*, Фазматгиз, М., 1972.
11. V.V.Ivanov, *Transfer of Radiation in Spectral Lines*, NBS SP №385, Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1973.
12. E.H.Avrett, D.G.Hummer, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, **130**, 295, 1965.
13. В.В.Иванов, В.М.Сербин, *Астрон. ж.*, **61**, 900, 1984.
14. Б.Н.Енгибарян, *Ж. вычислит. матем. и матем. физ.*, **37**, №4, 447, 1997.