УДК: 524.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРОЦЕСС МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

А.Г.НИКОГОСЯН

Постулила 14 марта 2000

Лагранжиановский формализм применяется для получения нелинейных соотношений для часто встречающихся статистических характеристик переноса излучения. В предположении о полном перераспределении по частотам рассматриваются среднее число рассеяний и среднее время пребывания фотона в одномерной полубесконечной атмосфере. Для иллюстрации возможных применений полученных соотношений, решены две типичные задачи многократного рассеяния.

1. *Введение.* В предыдущих работах [1-3] нами был получен ряд квадратичных и билинейных интегралов для различных задач переноса излучения. Выведенные нелинейные соотношения имеют более общую структуру, чем те, которые приводятся в работе Райбики [4]. Нами было показано, что указанные соотношения допускают простую вероятностную интерпретацию. В частности, было продемонстрировано, что квадратичные Q - соотношения (здесь мы следуем терминологии, предложенной в [4]) могут быть получены непосредственно на основе физических рассуждений, аналогичных тем, которые используются обычно при применении принципа инвариантности. Во всех этих исследованиях мы занимались, главным образом, нелинейными интегралами уравнений переноса и соотношениями, устанавливающими связь между интенсивностями излучения или связанными с ними величинами таких, как функция Грина, вероятность выхода кванта. Между тем не безынтересно получить аналогичные соотношения для некоторых статистических средних величин, описывающих процесс многократного рассеяния в атмосфере.

В данной работе нас будут интересовать среднее число рассеяний (СЧР) и среднее время пребывания (СВП) фотона в среде. Интегродифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти величины, были получены автором в работах [5,6]. Подход, применяемый при выводе соответствующих интегралов, основывается на вариационном формализме, предложенном впервые в работах [7,3]. Квадратичные Q -

соотношения, получаемые для вышеупомянутых величин, используются для решения двух частных задач многократного рассеяния в неоднородной бесконечной атмосфере. Впервые при применении вариационного подхода учитывается перераспределение излучения по частотам.

2. *Основные величины и уравнения.* Мы начнем с изложения некоторых результатов работ [5,6], которые необходимы для дальнейшего обсуждения. Рассмотрим полубесконечную одномерную рассеивающую атмосферу, в которой рассеяние происходит с полным перераспределением по частотам. Допускается, что излучение может поглотиться как в линии, так и в непрерывном спектре. Обозначим через $N^+(\tau, x)$ СЧР, испытываемых квантом безразмерной частоты x , движущимся на некоторой оптической глубине τ по направлению к границе до того, как он покинет среду. Аналогичную величину для кванта, движущегося в противоположном направлении, обозначим через $N^-(\tau, x)$. Как обычно, оптическая глубина отсчитывается от границы среды и измеряется в центральной частоте линии; безразмерная частота x представляет собой смещение от центра линии, измеренное в доплеровских ширинах. Мы введем также обозначение $\Omega^\pm(\tau, x)$ для безразмерного СВП в предположении, что квант затрачивает время лишь на прохождение пути между рассеяниями. Величины $\Omega^\pm$ измеряются в единицах среднего времени, затрачиваемого на путь между двумя последовательными рассеяниями. Мы будем рассматривать также величины $R_0^\pm(\tau, x)$, представляющие собой вероятность того, что квант частоты x , движущийся на глубине τ в том или ином направлении, в процессе многократного рассеяния будет термализован где-либо в атмосфере.

В случае одномерной атмосферы интегродифференциальные уравнения для СЧР и СВП, выведенные в работах [5,6], записываются в виде

$$\pm \frac{dN^\pm(\tau, x)}{d\tau} = -\nu(x)N^\pm(\tau, x) + \frac{\lambda}{2}\alpha(x) \int_{-\infty}^{+\infty} [N^+(\tau, x') + N^-(\tau, x')] \alpha(x') dx' + \nu(x), \quad (1)$$

$$\pm \frac{d\Omega^\pm(\tau, x)}{d\tau} = -\nu(x)\Omega^\pm(\tau, x) + \frac{\lambda}{2}\alpha(x) \int_{-\infty}^{+\infty} [\Omega^+(\tau, x') + \Omega^-(\tau, x')] \alpha(x') dx' + 1, \quad (2)$$

где использованы следующие обозначения: λ - альбеда единичного акта рассеяния, $\alpha(x)$ - профиль коэффициента поглощения в спектральной линии, $\nu(x) = \alpha(x) + \beta$, и β - отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения в центре линии. Среднее число рассеяний, для которого написано уравнение (1), определено таким образом, что акт термализации фотона также принимается за рассеяние (в отличие от вводимых ниже величин $\tilde{N}^\pm(\tau, x)$). Очевидно, что $N^+(0, x) = 0$, $\Omega^+(0, x) = 0$. Величины $R_0^\pm$ также удовлетворяют уравнениям типа (1), (2) с одной лишь разницей, что в данном случае свободный член равен

$u(x) = (1 - \lambda)\alpha(x) + \beta$. Сравнивая свободные члены указанных уравнений и принимая во внимание их линейность и очевидное равенство $u(x) = (1 - \lambda)v(x) + \lambda\beta$, находим, что между введенными нами величинами существует простая связь:

$$(1 - \lambda)N^\pm(\tau, x) + \lambda\beta\Omega^\pm(\tau, x) = R_0^\pm(\tau, x). \quad (3)$$

Наконец заметим, что величины $R^\pm = 1 - R_0^\pm$, представляющие собой вероятность выхода кванта из среды, удовлетворяют, как нетрудно убедиться, однородной системе интегродифференциальных уравнений:

$$\pm \frac{dR^\pm(\tau, x)}{d\tau} = -v(x)R^\pm(\tau, x) + \frac{\lambda}{2}\alpha(x) \int_{-\infty}^{+\infty} [R^+(\tau, x') + R^-(\tau, x')] \alpha(x') dx'. \quad (4)$$

Напомним, что однородной системе уравнений удовлетворяет также функция источника для атмосферы, не содержащей первичных источников энергии. Эта последняя задача рассматривалась в работах [4,2], поэтому результаты указанных работ без принципиальных трудностей могут быть переформулированы для системы уравнений (4).

3. Вариационная формулировка задач и законы сохранения.

Рассуждения в данном разделе аналогичны тем, которые приводятся в работе [3], поэтому мы здесь ограничимся лишь кратким изложением вопроса. Строгое математическое обоснование вариационного подхода для интегродифференциальных уравнений типа тех, которые были приведены выше, дано Тавелом [8].

Начнем с рассмотрения системы уравнений (4) и введем вспомогательные функции $\Phi(\tau, x) = R^+(\tau, x) + R^-(\tau, x)$ и $\Psi(\tau, x) = R^+(\tau, x) - R^-(\tau, x)$. Тогда вместо (4) будем иметь систему связанных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(x)} \frac{d\Phi}{d\tau} &= -\Psi(\tau, x); \\ \frac{1}{v(x)} \frac{d\Psi}{d\tau} &= -\Phi(\tau, x) + \lambda \frac{\alpha(x)}{v(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau, x') \alpha(x') dx', \end{aligned} \quad (5)$$

которая, в свою очередь, сводится к следующему интегродифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{v^2(x)} \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} = \Phi(\tau, x) - \lambda \frac{\alpha(x)}{v(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau, x') \alpha(x') dx'. \quad (6)$$

Легко проверить, что полученное уравнение является самосопряженным, поэтому вариационная формулировка допускается. По аналогии с работами [9,3] для плотности лагранжиана, соответствующей уравнению (6), можно написать

$$L(\Phi, \Phi', \tau, x) = \Phi^2 + \left(\frac{\Phi'}{v(x)} \right)^2 - 2\Phi U = \Phi^2 + \Psi^2 - 2\Phi U, \quad (7)$$

где $\Phi' = d\Phi/d\tau$ и

$$U(\tau, x) = \frac{\lambda}{2} \frac{\alpha(x)}{v(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau, x') \alpha(x') dx'. \quad (8)$$

Мы видим, что плотность лагранжиана содержит как дифференциальный, так и интегральный операторы относительно функции поля Φ . В соответствии с обобщением, данным Тавелом, вариационная задача

$$\delta \int \left[\Phi^2 - \left(\frac{\Phi'}{v(x)} \right)^2 - 2\Phi U \right] d\tau = 0 \quad (9)$$

приводит к следующим уравнениям Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \Phi'} + \lambda \frac{\alpha(x)}{v(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial L}{\partial U} dx' = 0. \quad (10)$$

Нетрудно проверить, что подстановка лагранжиана (7) в уравнение (10) приводит к уравнениям переноса (6). Мы видим также, что уравнения (6), так же как и плотность лагранжиана (7), не зависят явно от τ , то есть форма уравнений переноса инвариантна относительно инфинитезимального преобразования $\tau \rightarrow \tau' = \tau + \delta\tau$, где величина $\delta\tau$ представляет собой произвольную инфинитезимальную функцию от τ .

Таким образом, трансляция оптической глубины является симметрическим преобразованием для системы уравнений (3) и приводит к следующему закону сохранения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[L - \frac{\partial L}{\partial \Phi'} \Phi' \right] v(x) dx = \text{const}, \quad (11)$$

который в силу формулы (7) и того факта, что $R_{\pm}^{\pm}(\tau, x) \rightarrow 0$, когда $\tau \rightarrow \infty$, дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{+}^{+}(\tau, x) R_{-}^{-}(\tau, x) v(x) dx = \frac{\lambda}{4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [R_{+}^{+}(\tau, x) + R_{-}^{-}(\tau, x)] \alpha(x) dx \right)^2. \quad (12)$$

К нулевому значению произвольной константы можно было бы прийти также и из условия на границе среды $\tau = 0$, если исходить при этом из уравнения инвариантности Амбарцумяна [10,11]. Уравнение (12) представляет собой Q - соотношение для функций $R_{\pm}^{\pm}(\tau, x)$, которое справедливо всюду, где λ постоянно.

Обратимся теперь к системе уравнений (1) и введем вспомогательные

функции $F^\pm(\tau, x)$, определенные следующим образом:

$$N^\pm(\tau, x) = F^\pm(\tau, x) + C(x), \quad (13)$$

где $C(x)$ - некоторая функция, подлежащая определению. Нетрудно проверить, что величины $F^\pm(\tau, x)$ будут удовлетворять однородной системе интегродифференциальных уравнений в том случае, если функция $C(x)$ имеет вид

$$C(x) = 1 + \frac{\lambda}{1 - \tilde{\lambda}} \frac{\alpha(x)}{\nu(x)}, \quad (14)$$

где мы придерживаемся обычных обозначений [2,3,12]:

$$\tilde{\lambda} = \lambda [1 - \beta \delta(\beta)], \quad \delta(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(x)}{\nu(x)} dx. \quad (15)$$

Из результатов работы [5] можно заключить, что выражение для функции $C(x)$ (14) представляет собой не что иное, как предельное значение СЧР при $\tau \rightarrow \infty$, то есть $C(x) = N^\pm(\infty, x) \equiv N_\infty(x)$.

Мы видим, что функции $F^\pm(\tau, x) = N^\pm(\tau, x) - N_\infty(x)$ и $R^\pm(\tau, x)$ удовлетворяют одной и той же системе однородных уравнений (4) и имеют одинаковые предельные значения при $\tau \rightarrow \infty$, поэтому, по аналогии с соотношением (12), можем написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^+(\tau, x) F^-(\tau, x) \nu(x) dx = \frac{\lambda}{4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [F^+(\tau, x) + F^-(\tau, x)] \alpha(x) dx \right)^2 \quad (16)$$

Пользуясь уравнением (16), нетрудно вывести требуемое квадратичное Q -соотношение для СЧР, однако при этом следует позаботиться о сходимости получаемых интегралов. С этой точки зрения целесообразно иметь дело с величинами $\tilde{N}^\pm(\tau, x) = N^\pm(\tau, x) - 1$, при определении которых акт термализации не принимается в расчет. Как это следует из уравнения (13),

$$F^\pm(\tau, x) = \tilde{N}^\pm(\tau, x) - \frac{\lambda}{1 - \tilde{\lambda}} \frac{\alpha(x)}{\nu(x)}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в уравнение (16), после ряда несложных выкладок приходим к требуемому результату:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{N}^+(\tau, x) \tilde{N}^-(\tau, x) \nu(x) dx = \frac{\lambda}{4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{N}^+(\tau, x) + \tilde{N}^-(\tau, x)] \alpha(x) dx \right)^2 + \lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{N}^+(\tau, x) + \tilde{N}^-(\tau, x)] \alpha(x) dx - \frac{\lambda \tilde{\lambda}}{1 - \tilde{\lambda}} \right). \quad (18)$$

Рассуждения, которые позволили получить Q -соотношение (18), в

равной мере относятся и к выводу такого же соотношения для СВП. Действительно, представляя $\Omega^\pm$ в виде

$$\Omega^\pm(\tau, x) = \bar{F}^\pm(\tau, x) + \bar{C}(x), \quad (19)$$

находим, что функции $\bar{F}^\pm$ будут удовлетворять однородному уравнению (4), если только

$$\bar{C}(x) = \frac{1}{\nu(x)} + \frac{\lambda\delta(\beta)\alpha(x)}{1-\tilde{\lambda}} \frac{1}{\nu(x)}. \quad (20)$$

В согласии с результатами работы [6], имеем $\bar{C}(x) = \Omega^\pm(\infty, x) = \Omega_\infty(x)$, откуда заключаем, что функции $\bar{F}^\pm$ удовлетворяют такому же условию при $\tau \rightarrow \infty$, как и рассмотренные выше величины $F^\pm$. Поэтому нелинейное соотношение (16) может быть записано и для функций $\bar{F}^\pm$. Здесь так же, как и в случае СЧР, чтобы вывести требуемое квадратичное соотношение для СВП, обеспечивая при этом сходимость появляющихся интегралов, следует перейти к величинам

$$\tilde{\Omega}^\pm(\tau, x) = \Omega(\tau, x) - \frac{1}{\nu(x)} = \bar{F}^\pm(\tau, x) + \frac{\lambda\delta(\beta)\alpha(x)}{1-\tilde{\lambda}} \frac{1}{\nu(x)}, \quad (21)$$

которые также имеют смысл СВП, но определены так, что время, затрачиваемое фотоном на последний пролет до термализации, не принимается в расчет. В результате получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Omega}^+(\tau, x) \tilde{\Omega}^-(\tau, x) \nu(x) dx = \frac{\lambda}{4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{\Omega}^+(\tau, x) + \tilde{\Omega}^-(\tau, x)] \alpha(x) dx \right)^2 + \lambda\delta(\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{\Omega}^+(\tau, x) + \tilde{\Omega}^-(\tau, x)] \alpha(x) dx - \frac{\lambda\tilde{\lambda}\delta^2(\beta)}{1-\tilde{\lambda}}. \quad (22)$$

Соотношение (22) справедливо всегда, если только $\beta \neq 0$. Случай $\beta = 0$ не представляет интереса, поскольку, как показано в работе [6], СВП для полубесконечной атмосферы бесконечно велико.

4. *Примеры возможных применений.* Законы сохранения для рассмотренных вариационных задач, задаваемые уравнениями (12), (18), (22), позволяют не только относительно просто получить ряд известных результатов, но и могут быть использованы при решении новых задач переноса излучения. Для иллюстрации рассмотрим классическую задачу диффузного отражения от полубесконечной однородной атмосферы, освещаемой извне излучением в линии с частотным распределением $\alpha(x)$. Нас интересуют значения СЧР и СВП для фотонов, падающих на атмосферу, то есть величины

$$\langle \tilde{N} \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{N}^-(0, x) \alpha(x) dx, \quad \langle \tilde{\Omega} \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Omega}^-(0, x) \alpha(x) dx. \quad (23)$$

Используя уравнения (18), (22) и принимая во внимание, что $\tilde{N}^+(0, x) = \tilde{\Omega}^+(0, x) = 0$, приходим к одному и тому же квадратному уравнению $y^2 + 2y - \lambda(1 - \tilde{\lambda})^{-1} = 0$ для $\langle \tilde{N} \rangle$ и $\langle \tilde{\Omega} \rangle / \delta(\beta)$. Выбирая соответствующий корень из соображений положительности рассматриваемых физических величин, получаем, что $\langle \tilde{N} \rangle = (1 - \tilde{\lambda})^{-1/2} - 1$ и $\langle \tilde{\Omega} \rangle = \delta(\beta) \left[(1 - \tilde{\lambda})^{-1/2} - 1 \right]$, или

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{\lambda}}}, \quad \langle \Omega \rangle = \frac{\delta(\beta)}{\sqrt{1 - \tilde{\lambda}}}. \quad (24)$$

Эти результаты хорошо известны в теории переноса излучения (см., например, [5,6,12]).

В качестве другого примера рассмотрим бесконечную кусочно-однородную атмосферу, состоящую из двух половин $\tau > 0$ и $\tau < 0$, которые характеризуются различными значениями λ . Для простоты предположим, что величина β в обоих полупространствах принимает одинаковое значение и что источник излучения, находящийся на $\tau = 0$, излучает с частотным распределением $\alpha(x)$. Внутри каждого полупространства λ принимает постоянные значения, так что уравнения (18), (22) применимы. Наша цель заключается в нахождении СЧР и СВП, определяемых по формулам

$$\begin{aligned} \langle \tilde{N} \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{N}^+(0, x) + \tilde{N}^-(0, x)] \alpha(x) dx, \\ \langle \tilde{\Omega} \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{\Omega}^+(0, x) + \tilde{\Omega}^-(0, x)] \alpha(x) dx. \end{aligned} \quad (25)$$

Записывая уравнения (18) и (22) для каждого полупространства при $\tau = 0$ и замечая, что их левые части совпадают, легко получить, что величины $\langle \tilde{N} \rangle$ и $\langle \tilde{\Omega} \rangle / \delta(\beta)$ удовлетворяют одному и тому же квадратному уравнению

$$y^2 + 2y - a = 0, \quad (26)$$

где

$$a = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1 \tilde{\lambda}_1}{1 - \tilde{\lambda}_1} - \frac{\lambda_2 \tilde{\lambda}_2}{1 - \tilde{\lambda}_2} \right) = \frac{1}{(1 - \tilde{\lambda}_1)(1 - \tilde{\lambda}_2)} - 1. \quad (27)$$

Решая это уравнение и выбирая соответствующий знак перед квадратным корнем, получаем $\langle \tilde{N} \rangle = \langle \tilde{\Omega} \rangle / \delta(\beta) = 1 + \left[(1 - \tilde{\lambda}_1)(1 - \tilde{\lambda}_2) \right]^{-1/2}$, или, что то же

самое,

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\sqrt{(1-\tilde{\lambda}_1)(1-\tilde{\lambda}_2)}}, \quad \langle \Omega \rangle = \frac{\delta(\beta)}{\sqrt{(1-\tilde{\lambda}_1)(1-\tilde{\lambda}_2)}}. \quad (28)$$

В том частном случае, когда $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}$ мы приходим к хорошо известным результатам для бесконечной однородной атмосферы: $\langle N \rangle = 1/(1-\tilde{\lambda})$, $\langle \Omega \rangle = \delta(\beta)/(1-\tilde{\lambda})$. С другой стороны, если одно из полупространств не является рассеивающим, то есть для одного из них $\tilde{\lambda} = 0$, то возвращаемся к формулам (24).

5. Заключительные замечания. Основной целью работы являлись вывод нелинейных соотношений для зависящих от частоты статистических характеристик поля излучения и иллюстрация их возможных применений. Мы не стремились к наиболее общему рассмотрению проблемы, поэтому ограничились обсуждением случая одномерной атмосферы. На самом деле все результаты могут быть обобщены не только на случай трехмерной атмосферы, но и на более общие механизмы рассеяния, как, например, частичное перераспределение по частотам и неизотропное рассеяние. Более того, опираясь на результаты работы [3] и используя формулу (3) данной статьи, можно вывести более общие билинейные и двухточечные билинейные соотношения, которые связывают между собой не только различные статистические средние величины, но и их значения в двух разных точках.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
им. В.А. Амбарцумяна, Армения

NON-LINEAR RELATIONS FOR STATISTICAL MEAN QUANTITIES DESCRIBING THE MULTIPLE SCATTERING PROCESS

A.G.NIKOGHOSSIAN

The Lagrangian formalism is employed to derive non-linear relations for some frequently used statistical characteristics of the radiation transfer. The mean number of scatterings and the average time a photon remains in a 1D semi-infinite atmosphere are considered for the complete frequency redistribution. Two typical multiple scattering problems are solved to demonstrate the possible applications of the equations obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А.Г.Никогосян*, *Астрофизика*, **38**, 577, 1995.
2. *A.G.Nikoghossian*, *Astrophys. J.*, **483**, 849, 1997.
3. *A.G.Nikoghossian*, *J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **61**, 345, 1999.
4. *G.B.Rybicki*, *Astrophys. J.*, **213**, 165, 1977.
5. *А.Г.Никогосян*, *Астрофизика*, **21**, 595, 1984.
6. *А.Г.Никогосян*, *Астрофизика*, **24**, 149, 1986.
7. *R.A.Krikorian, A.G. Nikoghossian*, *J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **56**, 465, 1996.
8. *M.Tavel*, *Transport Theory Statist. Phys.*, **1**, 271, 1971.
9. *D.Andersen*, *J. Inst. Math. Applic.*, **12**, 55, 1973.
10. *В.А.Амбарцумян*, *Научные труды*, т.1, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1960.
11. *В.В. Соболев*, *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет*, Гостехиздат, М., 1956.
12. *В.В.Иванов*, *Перенос излучения и спектры небесных тел*, Наука, М., 1969.