

УДК: 524.74-355

КОЭФФИЦИЕНТ КОМПТОНОВСКОГО ОСЛАБЛЕНИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ МАКСВЕЛЛОВСКИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

Д.И. НАГИРНЕР, В.М. ЛОСКУТОВ

Поступила 28 февраля 2000

Принята к печати 20 марта 2000

Дается сводка формул для коэффициента ослабления излучения за счет комптоновского рассеяния тепловым электронным газом при произвольных его температурах. Получено новое представление для интеграла, через который выражается коэффициент ослабления, усредненный по релятивистскому максвелловскому распределению электронов по энергиям. Это представление позволяет эффективно вычислять коэффициент при высоких температурах электронного газа. Оценена также точность приближенного выражения для коэффициента ослабления, соответствующего предположению, что в системе покоя электрона рассеяние изотропно.

1. *Введение.* Как известно, комптоновское рассеяние играет определяющую роль в формировании спектров в рентгеновском и гамма-диапазонах ряда астрофизических объектов таких, как активные ядра галактик, аккреционные диски около звезд и другие, в которых имеются горячие разреженные области газа с высоким относительным содержанием свободных электронов.

Хотя решены далеко не все вопросы о роли различных механизмов излучения в наблюдаемые спектры, моделей указанных объектов построено много. В рамках принятых моделей рассчитаны их спектры. Из работ последних лет упомянем статьи [1-3]. При всех таких расчетах считается, что оптическая толщина областей, где происходит рассеяние, невелика. Однако такое предположение во многих случаях может быть неверным. Расчет спектров для оптически толстых сред требует обширных и громоздких вычислений из-за необходимости учета сильного изменения частоты фотона при рассеянии. Поэтому необходимо иметь, в частности, точные и удобные для программирования формулы для коэффициента поглощения (точнее ослабления), позволяющие быстро вычислять эту величину. На этот коэффициент нормируются и функции перераспределения по частотам и направлениям, что позволяет контролировать вычисление этих функций.

Общие формулы для коэффициента комптоновского ослабления даны в работе [4]. Расчетные формулы для усреднения по степенному

распределению электронов по энергиям выведены в статье [5]. В настоящей статье даются формулы для этого коэффициента при максвелловском распределении электронов по импульсам с произвольной температурой. Сначала приводятся известные формулы для случая релятивистского максвелловского распределения. Затем выводится новая формула для интеграла, представляющего усредненный коэффициент ослабления. Эта новая формула позволяет быстро рассчитывать коэффициент при высоких температурах электронного газа, когда средняя энергия частиц превосходит массу покоя электрона. Произведено также сравнение точных значений коэффициента с его приближенным представлением, соответствующим предположению, что в системе покоя электрона рассеяние изотропно.

2. *Усреднение сечения по максвелловскому распределению электронов.* При комптоновском рассеянии излучения невырожденным тепловым электронным газом сечение ослабления, т.е. коэффициент поглощения в расчете на один электрон в единицах томсоновского сечения согласно [4], определяется формулой

$$\bar{s}_0(x, y) = \frac{y}{4K_2(y)} \int_1^{\infty} e^{-y\gamma} u^2 \psi_{10}(xu) \Big|_{u=\gamma-z}^{u=\gamma+z} \quad (1)$$

Здесь $x, \gamma, z = \sqrt{\gamma^2 - 1}$ и $y = mc^2/k_B T$ - безразмерные частота излучения, энергия, импульс электрона и обратная температура электронного газа (k_B - постоянная Больцмана). Под интегралом в (1) должна быть произведена двойная подстановка и взята разность результатов. Функция

$$\psi_{10}(\xi) = \frac{2}{\xi^2} \int_0^{\xi} \xi' s_0(\xi') d\xi' \quad (2)$$

где $s_0(\xi)$ - полное сечение рассеяния при закрепленных импульсах фотона и электрона в единицах томсоновского сечения, определяемое формулой Клейна-Нишины:

$$s_0(\xi) = \frac{3}{8\xi^2} \left[4 + \left(\xi - 2 - \frac{2}{\xi} \right) \ln(1 + 2\xi) + 2\xi^2 \frac{1 + \xi}{(1 + 2\xi)^2} \right]. \quad (3)$$

Вычисление интеграла в (2) дает выражение

$$\psi_{10}(\xi) = \frac{3}{4\xi^2} \left[\left(\xi + \frac{9}{2} + \frac{2}{\xi} \right) \ln(1 + 2\xi) - 4 - \xi + \frac{\xi^2}{1 + 2\xi} - 2g(\xi) \right], \quad (4)$$

содержащее неэлементарную функцию

$$g(\xi) = \int_0^{\xi} \ln(1 + 2\xi') \frac{d\xi'}{\xi'}. \quad (5)$$

Проинтегрировав в (1) по частям, получим

$$\bar{s}_0(x, y) = \frac{1}{2K_2(y)} \int_1^{\infty} e^{-y\gamma} \frac{d\gamma}{z} \left[(\gamma + z)^2 s_0(x(\gamma + z)) + (\gamma - z)^2 s_0(x(\gamma - z)) \right]. \quad (6)$$

Приведенные формулы позволяют вычислять $\bar{s}_0(x, y)$ при значениях аргументов x и y порядка единицы. При малых и больших частотах x можно применять степенные разложения. Приведем и их.

3. *Разложения в ряды.* Легко показать, что справедливо разложение

$$s_0(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-2\xi)^n, \tag{7}$$

где

$$a_n = \frac{3}{8} \left(n+2 + \frac{2}{n+1} + \frac{8}{n+2} - \frac{16}{n+3} \right). \tag{8}$$

Функция $\psi_{10}(\xi)$ также раскладывается в степенной ряд

$$\psi_{10}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-2\xi)^n, \quad A_n = \frac{2}{n+2} a_n. \tag{9}$$

По приведенным рядам можно эти функции вычислять при $0 \leq \xi < 1/2$.

При больших значениях аргумента можно получить разложения, которые содержат логарифмические слагаемые вне сумм. Вынося большие величины 2ξ из-под знака логарифма, получим

$$s_0(\xi) = \frac{3}{8\xi^2} \left[\left(\xi - 2 - \frac{2}{\xi} \right) \ln(2\xi) + \frac{\xi}{2} + \frac{9}{2} - \frac{5}{4\xi} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(-\frac{1}{2\xi} \right)^{n+4}, \tag{10}$$

где $b_n = -a_{-4-n}$.

Несколько более сложно разложение функции $\psi_{10}(\xi)$:

$$\begin{aligned} \psi_{10}(\xi) = & \frac{3}{4\xi^2} \left[\left(\xi + \frac{9}{2} + \frac{2}{\xi} \right) \ln(2\xi) - \ln^2(2\xi) - \frac{\xi}{2} - \frac{15}{4} - \frac{\pi^2}{3} + \frac{131}{4\xi} \right] + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2\xi} \right)^{n+4} B_n, \quad B_n = -2b_n/(n+2). \end{aligned} \tag{11}$$

Для промежуточных значений аргумента рассматриваемые функции можно разложить по степеням $\xi' = 1 - 2\xi$, $\xi = (1 - \xi')/2$. Для получения таких разложений представим сумму, стоящую в знаменателе и в аргументе логарифма, в виде $1 + 2\xi = 2(1 - \xi'/2)$. Тогда

$$\begin{aligned} s_0(\xi) = & \frac{3}{2(1 - \xi')^2} \left[4 - \left(\xi' + \frac{3}{2} + \frac{1}{1 - \xi'} \right) [\ln 2 + \ln(1 - \xi'/2)] + \right. \\ & \left. + \frac{(1 - \xi')^2}{16} \frac{3 - \xi'}{(1 - \xi'/2)^2} \right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Разложения всех входящих в последнюю формулу слагаемых очевидны.

Не производя самих разложений функции $\psi_{10}(\xi)$, представим ее в виде

$$\begin{aligned} \psi_{10}(\xi) = & \frac{3}{4\xi^2} \left[\left(\frac{1 - \xi'}{2} + \frac{9}{2} + \frac{4}{1 - \xi'} \right) [\ln 2 + \ln(1 - \xi'/2)] - \right. \\ & \left. - 4 - \frac{1 - \xi'}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \xi'}{2} \right)^2 \frac{1}{1 - \xi'/2} - 2g \left(\frac{1 - \xi'}{2} \right) \right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Разложение множителя перед квадратной скобкой согласно (1) не требуется.

Разложения логарифма и двух дробей очевидны, а для функции $g(1/2 - \xi'/2)$ разложение по степеням ξ' было получено в [4]:

$$g\left(\frac{1-\xi'}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} + \ln 2 \ln(1-\xi') + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi')^{k+2}}{k+2} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j 2^j}. \quad (14)$$

Здесь ξ' может быть как положительным, так и отрицательным. Приведенные разложения охватывают все необходимые случаи.

Из приведенных разложений можно получить и разложения для $\bar{s}_0(x, y)$. При малых x из (7) получается

$$\bar{s}_0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n a_n f_{n+2}, \quad (15)$$

где обозначено $f_n = K_n(y) / K_1(y)$. При больших x исходим из представления функции $s_0(\xi)$ в виде (10). Выделив слагаемое с логарифмом и собрав слагаемые с одинаковыми функциями Макдональда, получим

$$\begin{aligned} \bar{s}_0(x, y) = & \frac{3}{8x^2} \left\{ \left[\left(x - \frac{2}{x} \right) f_1 - 2f_0 \right] \ln(2x) + \left(\frac{x}{y} + \frac{9}{2} + \frac{2}{xy} \right) f_0 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{4x} \right) f_1 \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2x} \right)^{n+4} b_n f_{n+2}. \end{aligned} \quad (16)$$

4. *Новое представление для $\bar{s}_0(x, y)$.* Исходя из идей работы [7], получим другое представление профиля коэффициента поглощения при максвелловских электронах. Для этого найдем двустороннее преобразование Лапласа от функции $s_0(e^u)$:

$$\tilde{s}_0(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pu} s_0(e^u) du = \int_0^{\infty} \xi^{-p-1} s_0(\xi) d\xi = -2^p a_p \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad (17)$$

где функция a_p дается формулой (8).

Обращением преобразования (17) служит формула

$$s_0(\xi) = -\frac{i}{2\pi i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} (2\xi)^p \frac{\pi}{\sin \pi p} a_p dp. \quad (18)$$

Подставив это обращение в выражение (6), получим искомое новое представление

$$\bar{s}_0(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} (2x)^p \frac{\pi}{\sin \pi p} \frac{K_{p+2}(y)}{K_2(y)} a_p dp. \quad (19)$$

Если $2x < 1$, множитель $(2x)^p$ убывает при $\text{Re } p \rightarrow +\infty$ и контур

интегрирования можно преобразовать направо, вычислив вычеты в простых полюсах $p = 0, 1, 2, \dots$. Тогда получится ряд (15). Напротив, при $2x > 1$ указанный множитель убывает при $\operatorname{Re} p \rightarrow -\infty$ и контур загибаем налево. В этом случае кроме простых полюсов $p = -4, -5, -6, \dots$ имеются три полюса второго порядка $p = -1, -2, -3$. Поэтому, кроме ряда по степеням $-1/2x$ в разложении (16) возникли дополнительные слагаемые. Для вычисления вычетов надо найти коэффициенты при обратных степенях разностей $p + 1, p + 2, p + 3$. Вычеты в указанных точках дают в (19) вклады

$$A_1 = \frac{3}{8} \left[\left(\ln 2x + \frac{1}{2} \right) f_1 + \frac{f_0}{y} \right], \quad A_2 = -\frac{3}{4} \frac{1}{x^2} \left(\ln 2x - \frac{9}{4} \right) f_0, \quad (20)$$

$$A_3 = -\frac{3}{4} \frac{1}{x^3} \left[\left(\ln 2x + \frac{5}{8} \right) f_1 - \frac{f_0}{y} \right]. \quad (21)$$

Формула (19) позволяет получить еще одно выражение для нашей функции.

5. *Следствие нового представления.* Общую формулу (19) перепишем, переместив контур, параллельный мнимой оси, на n_0 влево, так, чтобы он проходил через точку $-1/2 - n_0$. При этом исходной формуле отвечает значение $n_0 = 0$, а переносу контура вправо - отрицательные значения n_0 . На практике достаточно значений $n_0 = -1, 0, 1, 2, 3$. Вычислим необходимые вычеты и сделаем подстановку $p = -1/2 - n_0 + iu$. В результате получим

$$\bar{s}_0(x, y) = \delta_{-1 n_0} + \sum_{n=1}^{n_0 > 0} A_n - I(n_0), \quad (22)$$

где интеграл после очевидных преобразований приведет к виду

$$I(n_0) = (-1)^{n_0-1} \frac{(2x)^{-1/2-n_0}}{K_2(y)} \int_0^\infty \frac{du}{\operatorname{ch}(\pi u)} \operatorname{Re} \left\{ (2x)^{iu} a_{-1/2-n_0+iu} K_{3/2-n_0+iu}(y) \right\}. \quad (23)$$

Отметим, что формула (22) предназначена для того, чтобы вычислять коэффициент комптоновского ослабления при высоких температурах, то есть при малых y . Для этих значений y функцию Макдональда можно находить при помощи рядов. Уточним входящие в полученную формулу величины.

Отделим вещественную и мнимую части комплексного коэффициента $a_{-1/2-n_0+iu} = a_R(-1/2 - n_0, u) + ia_I(-1/2 - n_0, u)$, а также введем дополнительные обозначения, сокращающие запись формул. При $n = 1, 2, 3, \dots$

$$B(n+iu) = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi u)} \frac{1}{\Gamma(n-5/2+iu)} = B_R(n, u) - iB_I(n, u), \quad (24)$$

$$D(n+iu, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(y/2)^{2m}}{m!} B(m+n+iu) = D_R(n, y, u) - iD_I(n, y, u). \quad (25)$$

Вещественные части введенных функций четны по u , чисто мнимые - нечетны.

Окончательно для интеграла (23) имеем

$$I(n_0) = \frac{1}{2} \frac{(2x)^{-1/2-n_0}}{K_2(y)} \int_0^{\infty} \frac{du}{\operatorname{ch}(\pi u)} \left[a_R \left(-\frac{1}{2} - n_0, u \right) H_R(x, y, n_0, u) - a_I \left(-\frac{1}{2} - n_0, u \right) H_I(x, y, n_0, u) \right]. \quad (26)$$

Здесь введено обозначение для вещественных функций

$$H_R(x, y, n_0, u) = \left(\frac{y}{2} \right)^{-3/2+n_0} [c_f D_R(2+n_0, y, u) - s_f D_I(2+n_0, y, u)] - \left(\frac{y}{2} \right)^{-3/2-n_0} [c_p D_R(5-n_0, y, u) + s_p D_I(5-n_0, y, u)], \quad (27)$$

$$H_I(x, y, n_0, u) = \left(\frac{y}{2} \right)^{-3/2+n_0} [s_f D_R(2+n_0, y, u) + c_f D_I(2+n_0, y, u)] - \left(\frac{y}{2} \right)^{3/2-n_0} [s_p D_R(5-n_0, y, u) - c_p D_I(5-n_0, y, u)], \quad (28)$$

где

$$c_f = \cos \ln \frac{4x}{y}, \quad s_f = \sin \ln \frac{4x}{y}, \quad c_p = \cos \ln xy, \quad s_p = \sin \ln xy. \quad (29)$$

Преимущество представления коэффициента $\bar{J}_0(x, y)$ через интеграл (26) по сравнению с (6) заключается в том, что при малых значениях y , соответствующих высоким температурам электронного газа, экспонента в подинтегральном выражении в (6) начинает убывать только при очень больших значениях энергии γ , так что интеграл нельзя вычислять при помощи квадратурной формулы Гаусса-Лагерра, а при применении других формул надо брать очень большое число узлов, что приводит к увеличению времени вычисления. В формуле же (26) малый параметр y переведен в аргумент функции Макдональда, а сходимость интеграла обеспечивается гиперболическим косинусом стоящим в знаменателе.

Приведем подробности вычисления величин, входящих в интеграл (26).

6. *Вычисление коэффициентов $B(n+iu)$.* Дадим способ вычисления коэффициентов (24). Сначала вычисляется

$$B(3+iu) = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi u)} \frac{1}{\Gamma(1/2+iu)} = \Gamma(1/2-iu) = \Gamma_R(1/2, u) - i\Gamma_I(1/2, u). \quad (30)$$

Подпрограмма вычисления гамма-функции написана согласно алгоритмам, предложенным в [8]. При других значениях n применяем рекуррентные формулы. При $n=1$ и 2

$$B_R(n-1, u) = (n-5/2)B_R(n, u) + uB_I(n, u), \quad (31)$$

$$B_I(n-1, u) = (n-5/2)B_I(n, u) - uB_R(n, u). \quad (32)$$

Соответственно при $n \geq 3$

$$B_R(n+1, u) = \frac{(n-5/2)B_R(n, u) - uB_I(n, u)}{(n-5/2)^2 + u^2}, \quad (33)$$

$$B_I(n+1, u) = \frac{(n-5/2)B_I(n, u) + uB_R(n, u)}{(n-5/2)^2 + u^2}. \quad (34)$$

7. Упрощенные формулы. Если принять, что в системе отсчета, в которой до рассеяния электрон покоился, происходит изотропное рассеяние, то выражение для функции $s_0(\xi)$ получается значительно более простым:

$$s_0^n(\xi) = \frac{1}{1+2\xi}. \quad (35)$$

Соответствующая функция $\psi_{10}(\xi)$ также очень проста:

$$\psi_{10}^n(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \left[\xi - \frac{1}{2} \ln(1+2\xi) \right]. \quad (36)$$

Разложения этих функций получаются непосредственно. Для них коэффициенты $a_n = 1$, $A_n = 2/(n+2)$. Просты и асимптотические разложения. Разложение $s_0(\xi)$ вообще не содержит слагаемых вне суммы

$$s_0^n(\xi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2\xi} \right)^{n+1}. \quad (37)$$

Количество слагаемых вне суммы у второй функции также меньше, чем у точной:

$$\psi_{10}^n(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \left[\xi - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{2\xi} \right) \right]. \quad (38)$$

При упрощенном выражении для сечения (35) все формулы и для усредненного коэффициента сильно упрощаются. Исходный интеграл не содержит логарифма:

$$\begin{aligned} \bar{s}_0^n(x, y) &= \frac{1}{2K_2(y)} \int_1^{\infty} e^{-y\gamma} \frac{d\gamma}{z} \left[\frac{(\gamma+z)^2}{1+2x(\gamma+z)} + \frac{(\gamma-z)^2}{1+2x(\gamma-z)} \right] = \\ &= \frac{1}{K_2(y)} \int_1^{\infty} e^{-y\gamma} \frac{d\gamma}{z} \frac{2\gamma^2 + 2x\gamma - 1}{4x\gamma + 4x^2 + 1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Сохраняется вид формулы (19) с $a_p = 1$:

$$\bar{s}_0(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} (2x)^p \frac{\pi}{\sin \pi p} \frac{K_{p+2}(y)}{K_2(y)} dp. \quad (40)$$

Ввиду отсутствия величины a_p с ее полюсами, простыми получаются ряд и асимптотическое разложение. В формуле (15) надо заменить a_p на 1:

$$\bar{s}_0^a(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n f_{n+2}, \quad (41)$$

а асимптотика не содержит слагаемых вне суммы и имеет вид

$$\bar{s}_0^a(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2x}\right)^n f_{n-1}. \quad (42)$$

Наконец, и формула с функцией Макдональда с мнимым индексом получается простой:

$$\bar{s}_0^a(x, y) = \frac{1}{2x} \left[f_1 - \frac{1}{4x} f_0 - \frac{1}{2x} \int_0^{\infty} f_{iu} \frac{\sin(u \ln 2x)}{\operatorname{sh}(\pi u)} du \right]. \quad (43)$$

Отметим, что очень простое выражение имеет эта функция при $x = 1/2$. Действительно, из (43) вытекает, что $\bar{s}_0^a(1/2, y) = f_1 - f_0/2$. Конечно, это следует и из исходной формулы (39), но заметить такой факт там труднее.

8. *Результаты вычислений.* На рис.1 в логарифмическом масштабе

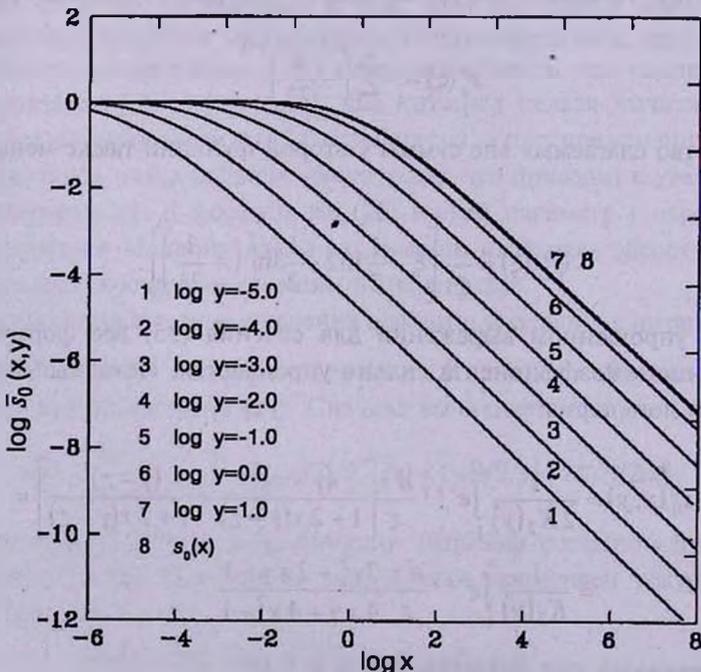


Рис.1. Функции $\bar{s}_0(x, y)$ при различных значениях y .

приведены графики зависимости коэффициента ослабления от x при различных значениях параметра y . Для сравнения вычислены также значения этого коэффициента по упрощенной формуле и отношения $r(x)$ этих значений к точным. Отношения представлены на рис.2, из которого видно, что упрощенная формула дает достаточную точность только при температурах, существенно меньших релятивистских, и низких частотах, когда

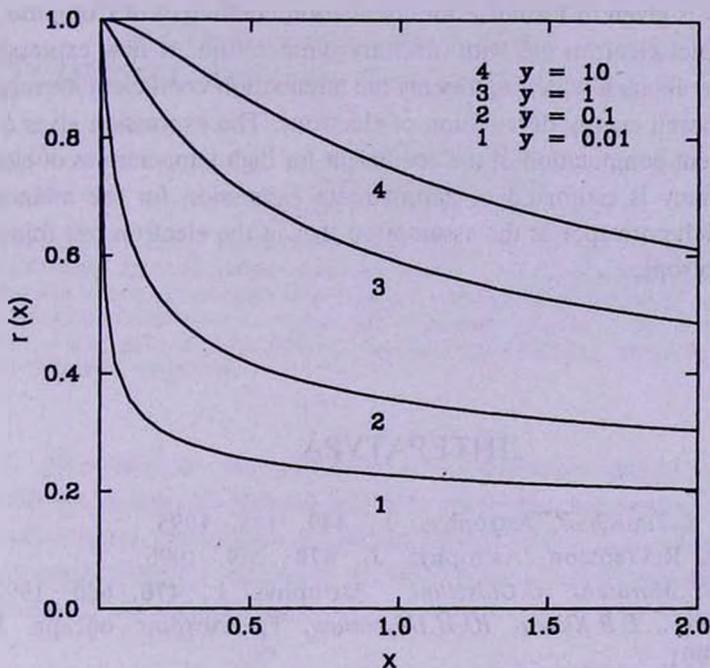


Рис.2. Отношение $r = \bar{s}_0^a(x, y) / \bar{s}_0(x, y)$ при различных значениях y .

коэффициент комптоновского ослабления близок к томсоновскому. При больших температурах и частотах упрощенная формула сильно недооценивает комптоновское ослабление. Однако эта формула наряду с соответствующей приближенной функцией перераспределения по частотам упрощенная (см. [5]) может служить для качественных оценок и пробных расчетов.

Таким образом, для коэффициента ослабления при комптоновском рассеянии релятивистским максвелловским электронным газом получены удобные расчетные формулы, позволяющие вычислять этот коэффициент для всех частот и любых температур электронного газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной программы Университеты России - фундаментальные исследования (Астрономия, грант 2217) и ФНТП "Астрономия" по разделу программы 1.2.6.5.

THE ATTENUATION COEFFICIENT OF COMPTON SCATTERING BY MAXWELLIAN ELECTRONS

D.I.NAGIRNER, V.M.LOSKUTOV

The review is given of formulae for attenuation coefficient of Compton scattering by thermal electron gas with arbitrary temperature. A new expression is obtained for the integral which represents the attenuation coefficient averaged on relativistic Maxwell energy distribution of electrons. The expression gives a possibility of efficient computation of the coefficient for high temperatures of electron gas. The accuracy is estimated of approximate expression for the attenuation coefficient which corresponds the assumption that in the electron rest frame the scattering is isotropic.

ЛИТЕРАТУРА

1. X-M.Hua, L.Titarchuk, *Astrophys. J.*, **449**, 188, 1995.
2. J.Poutanen, R.Svensson, *Astrophys. J.*, **470**, 249, 1996.
3. F.Haardt, L.Maraschi, G.Ghisellini, *Astrophys. J.*, **476**, 620, 1997.
4. Д.И.Нагирнер, Е.В.Кикец, Ю.Й.Поутанен, *Тр. Астрон. обсерв. ЛГУ*, **43**, 28, 1991.
5. Д.И.Нагирнер, Л.С.Николаева, *Астрофизика*, **41**, 198, 1998.
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, М., 1995.
7. С.И.Блинников, М.А.Рудзский, *Астрофизика*, **29**, 385, 1988.
8. Ю.Люк, *Специальные математические функции и их аппроксимации*, Мир, М., 1980.