АСТРОФИЗИКА

ТОМ 43 АВГУСТ, 2000 ВЫПУСК 3

УДК: 524.3/.4-32

МАЛЫЕ ВИРИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ. II

Л.П.ОСИПКОВ

Поступила 25мая 1999

Принята к печати 15 июня 1999

Найдено решение уравнений, полученных в первой части исследования и описываюших гросс-динамику осесимметричных бесстолкновительных гравитирующих систем для малых отклонений от положения равновесия. Полученное решение описывает суперпозицию колебаний с двумя собственными частотами. На фоне периодических сжатия и расширения происходит изменение сплюснутости системы, происходящее с вдвое меньшим периодом.

1. *Положение равновесия и линеаризованные уравнения.* В первой части данной работы [1] была получена замкнутая система гросс-динамических уравнений, описывающая эволюцию осесимметричных самогравитирующих звездных систем. В безразмерном виде эта система принимает следующий вид:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\iota_\rho = \text{æ}_{\parallel} - \left(\iota_\rho + \iota_\zeta\right)^{-3/2}\iota_\rho, \tag{1}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\iota_\rho = \text{æ}_{\zeta} - \left(\iota_\rho + \iota_\zeta\right)^{-3/2}\iota_\zeta, \tag{2}$$

$$\frac{d}{d\tau}\text{æ}_{\parallel} = -\left(\iota_\rho + \iota_\zeta\right)^{-3/2}\frac{d}{d\tau}\iota_\rho, \tag{3}$$

$$\frac{d}{d\tau}\text{æ}_{\zeta} = -\left(\iota_\rho + \iota_\zeta\right)^{-3/2}\frac{d}{d\tau}\iota_\zeta, \tag{4}$$

Здесь ι_ρ, ι_ζ - компоненты безразмерного тензора инерции, $\text{æ}_{\parallel}$, æ_{ζ} - компоненты безразмерного тензора (полной) кинетической энергии системы, τ - безразмерное время. В этих переменных закон сохранения энергии гравитирующей системы записывается в форме инвариантного соотношения

$$\text{æ}_{\parallel} + \text{æ}_{\zeta} - 2\left(\iota_\rho + \iota_\zeta\right)^{-1/2} = -1. \tag{5}$$

Для системы уравнений (1)-(4) существует интеграл

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\iota_\rho + \iota_\zeta\right)\right]^2 + \left(\iota_\rho + \iota_\zeta\right) - 2\left(\iota_\rho + \iota_\zeta\right)^{1/2} = \mathcal{E} = \text{const}, \tag{6}$$

который был назван интегралом инерционной энергии. Найдем положение равновесия для системы (1)-(4). Обозначим равновесные значения переменных ι_ρ, ι_ζ, $æ_{\|}$, $æ_\zeta$ через a^2, b^2, $k_{\|}$, k_ζ соответственно. В силу выбора величины I_e в качестве единицы момента инерции

$$a^2 + b^2 = 1,$$

а из уравнений (1)-(2) находим, что

$$k_{\|} = a^2, \quad k_\zeta = b^2. \tag{7}$$

Интеграл энергии (5) превращается в тождество, а из интеграла инерционной энергии (6) получаем, что при равновесии $\mathcal{E} = -1$.

Введем отклонения от положения равновесия

$$\begin{aligned} x &= \iota_\rho - a^2, \quad X = d\,\iota_\rho / d\,\tau, \quad \xi = æ_{\|} - k_{\|}, \\ y &= \iota_\zeta - b^2, \quad Y = d\,\iota_\zeta / d\,\tau, \quad \eta = æ_\zeta - k_\zeta . \end{aligned} \tag{8}$$

Обозначим $' = d / d\tau$. Линеаризуя систему (1)-(4), получаем следующие уравнения:

$$\begin{cases} x' = X, \\ y' = Y, \\ X' = \xi - \alpha_x x - \alpha_y y, \\ Y' = \eta - \beta_x x - \beta_y y, \\ \xi' = -X, \\ \eta' = -Y, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_x &= 1 - \alpha, \quad \alpha_y = -\alpha, \quad \alpha = \frac{3}{2} a^2, \\ \beta_x &= -\beta, \quad \beta_y = 1 - \beta, \quad \beta = \frac{3}{2} b^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Существенно, что

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2} \tag{11}$$

Для шара $a^2 = 2/3$, $b^2 = 1/3$, $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$; для диска $a^2 = 1$, $b^2 = 0$, $\alpha = 3/2$, $\beta = 0$; для иглообразной конфигурации $a^2 = 0$, $b^2 = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 3/2$.

Из интеграла энергии (5) получаем, что

$$x + y + \xi + \eta = 0. \tag{12}$$

Интеграл инерционной энергии (6) дает равенство

$$\frac{1}{2}(X+Y)^2 + \frac{1}{4}(x+y)^2 = \Delta_{\mathcal{E}}, \tag{13}$$

ãäå $\Delta_{\mathcal{E}} = \mathcal{E} + 1$ - отклонение значения интеграла инерционной энергии от равновесного значения. Если $\Delta_{\mathcal{E}} = 0$, то $X + Y = 0$, $x + y = 0$. Последние соотношения, конечно, очевидны из физических соображений.

Напомним, что существование интеграла инерционной энергии в форме (6) или (13) следует из предположения о квазигомологичности вириальных колебаний системы (соотношение (26) в статье [1]). Для малых отклонений от вириального равновесия это предположение можно считать выполненным с большей точностью, чем для нелинейных колебаний (замечание Б.П.Кондратьева).

Сравнивая два первых и два последних из уравнений (9), видим, что

$$\xi = -x + c_x, \quad \eta = -y + c_y, \tag{14}$$

где c_x, c_y - постоянные интегрирования. Из (12) находим, что

$$c_x + c_y = 0. \tag{15}$$

Подставив равенства (14) в уравнения (9), понижаем порядок исследуемой системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = X, \\ y' = Y, \\ X' = (\alpha - 2)x + \alpha y + c_x, \\ Y' = \beta x + (\beta - 2)y + c_y. \end{cases} \tag{16}$$

Складывая два последних уравнения этой системы и учитывая равенство (15), получаем интеграл инерционной энергии (13).

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений (16), как известно, равно сумме общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы. Будем искать последнее в виде константы:

$$x = C_x, \quad y = C_y, \quad X = C_X, \quad Y = C_Y.$$

Сразу же замечаем, что $C_X = C_Y = 0$, а C_x, C_y находятся как решения алгебраической системы

$$(\alpha - 2)C_x + \alpha C_y = -c_x,$$
$$\beta C_x + (\beta - 2)C_y = -c_y.$$

В силу условия (11) определитель системы равен 1. Принимая также во внимание условие (15), получаем:

$$C_x = \frac{1}{2}c_x, \quad C_y = \frac{1}{2}c_y. \tag{17}$$

2. *Собственные частоты вириальных колебаний.* Однородную систему линейных уравнений, соответствующую (16), перепишем в матричном виде:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}, \tag{18}$$

где

$$\mathbf{X} = \|x, y, X, Y\|^T,$$

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \alpha-2 & \alpha & 0 & 0\\ \beta & \beta-2 & 0 & 0\end{Vmatrix} \tag{19}$$

Существенно, что $\mathrm{tr}\mathbf{A}=0$.

Решение системы уравнений (18), как известно, сводится к нахождению собственных значений матрицы А, т.е. корней характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=0, \tag{20}$$

где Е - единичная матрица. Уравнение (20) сводится к биквадратному. Обозначив $\lambda^2=\sigma$ и учитывая условие (11), получаем:

$$\sigma^2+\frac{5}{2}\sigma+1=0.$$

Корни этого уравнения: $\sigma_1=-2$, $\sigma_2=-1/2$. Как оказалось, коэффициенты характеристического уравнения (20) и, отсюда, собственные значения матрицы (19) не зависят от a, b, т.е. размеров и формы равновесной модели. Собственные значения матрицы **А** образуют две пары чисто мнимых комплексно сопряженных величин:

$$\lambda_{1,2}=\sqrt{\sigma_1}=\pm i\sqrt{2},\quad \lambda_{3,4}=\sqrt{\sigma_2}=\pm i/\sqrt{2}.$$

Мнимость собственных значений означает, что в линейном гросс-динамическом приближении система устойчива относительно осесимметричных возмущений. Этот вывод не удивителен, т.к. в сущности он следует из решения нелинейного уравнения Лангранжа-Якоби. Итак, система испытывает осесимметричные колебания с безразмерными частотами, равными

$$\omega_1=|\lambda_{1,2}|=\sqrt{2},\quad \omega_2=|\lambda_{3,4}|=1/\sqrt{2}.$$

Частота ω_2 появляется и при линейном анализе скалярного уравнения Лагранжа-Якоби, что следует из формул, приведенных в [2]. Следовательно, собственным частотам $\lambda_{3,4}$ соответствуют периодические изменения полного момента инерции, т.е. размеров системы. Непосредственное же изменение сферичности системы определяется собственными значениями $\lambda_{1,2}$. Возвращаясь к размерным величинам, мы находим, что частоте ω_1 соответствует период колебаний

$$P_1=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}s^2GM^{5/2}(-E)^{-1/2},$$

а частоте ω_2 - период $P_2=2P_1$. Здесь G - гравитационная постоянная, M - масса, а E - энергия системы.

3. ***Формула для общего решения***. Стандартным образом найдем общее решение однородной системы (18). Для этого определим собственные вектора $\mathbf{C}_j=(\mathrm{C}_{j,k})$, $k=\overline{1,4}$ матрицы **А**, соответствующие

собственному значению λ_p т.е. нетривиальные решения однородной системы алгебраических уравнений

$$(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{E})\mathbf{C}_j = 0.$$

Получаем, что

$$C_{j2} = C_{j1}\left(\lambda_j^2-\alpha+2\right)/\alpha, \quad C_{j3} = C_{j1}\lambda_j, \quad C_{j4} = C_{j2}\lambda_j. \tag{21}$$

Обозначим

$$C_{11} = A, \quad C_{21} = B, \quad C_{31} = C, \quad C_{41} = D. \tag{22}$$

Введем матрицу $\mathbf{C} = \|\mathbf{C}_1,\mathbf{C}_2,\mathbf{C}_3,\mathbf{C}_4\|$. Находим, что

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} A & B & C & D \\ -A & -B & (\beta/\alpha)C & (\beta/\alpha)D \\ i\sqrt{2}\,A & -i\sqrt{2}\,B & -i\dfrac{1}{\sqrt{2}}C & \dfrac{1}{\sqrt{2}}D \\ -i\sqrt{2}\,A & i\sqrt{2}\,B & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\beta/\alpha)C & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\beta/\alpha)D \end{Vmatrix} \tag{23}$$

Величины A, B, C, D являются комплексными постоянными интегрирования системы (18), а ее общее решение

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}\Xi, \tag{24}$$

где вектор $\Xi = \left(e^{\lambda_j\tau}\right)$, $j = \overline{1,4}$.

Решение (24) будет вещественным, если

$$\operatorname{Re}B = \operatorname{Re}A, \quad \operatorname{Im}B = -\operatorname{Im}A,$$
$$\operatorname{Re}C = \operatorname{Re}D, \quad \operatorname{Im}C = -\operatorname{Im}D.$$

Введем новые постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} K &= 2\operatorname{Re}A, \quad L = 2\operatorname{Im}A, \\ P &= 2\operatorname{Re}C, \quad Q = 2\operatorname{Im}C. \end{aligned} \tag{25}$$

Добавим к решению (24) однородной системы частное решение (17) неоднородной системы. После этого в вещественной форме общее решение неоднородной системы (16) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= K\cos\left(\sqrt{2}\tau\right) - L\sin\left(\sqrt{2}\tau\right) + P\cos\left(\tau/\sqrt{2}\right) - Q\sin\left(\tau/\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}c_x, \\ y &= -K\cos\left(\sqrt{2}\tau\right) + L\sin\left(\sqrt{2}\tau\right) + (\beta/\alpha)P\cos\left(\tau/\sqrt{2}\right) - (\beta/\alpha)Q\sin\left(\tau/\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}c_y, \\ X &= -\sqrt{2}\,L\cos\left(\sqrt{2}\tau\right) - \sqrt{2}\,K\sin\left(\sqrt{2}\tau\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}Q\cos\left(\tau/\sqrt{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}P\sin\left(\tau/\sqrt{2}\right), \\ Y &= \sqrt{2}\,L\cos\left(\sqrt{2}\tau\right) + \sqrt{2}\,K\sin\left(\sqrt{2}\tau\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta/\alpha)Q\cos\left(\tau/\sqrt{2}\right) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta/\alpha)P\sin\left(\tau/\sqrt{2}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Добавим к (26) выражения для переменных ξ, η (14):

$$\begin{aligned}
\xi &= -K\cos\left(\sqrt{2}\tau\right)+L\sin\left(\sqrt{2}\tau\right)-P\cos\left(\tau/\sqrt{2}\right)+Q\sin\left(\tau/\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}c_x,\\
\eta &= K\cos\left(\sqrt{2}\tau\right)-L\sin\left(\sqrt{2}\tau\right)-(\beta/\alpha)P\cos\left(\tau/\sqrt{2}\right)+(\beta/\alpha)Q\sin\left(\tau/\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}c_y.
\end{aligned} \tag{27}$$

Напомним, что в этих формулах $c_x+c_y=0$, $\alpha+\beta=3/2$.

Заметим, что амплитуды колебаний с частотой $\omega_1=\sqrt{2}$, непосредственно изменяющих форму системы, не зависят от сжатия равновесного состояния. Для изменения со временем параметра сферичности

$$\varepsilon^2=\frac{2\iota_\zeta}{\iota_p}=2\frac{a^2+x}{b^2+y}$$

после линеаризации получаем:

$$\varepsilon^2\approx\frac{2}{b^2}\left(a^2+x-\frac{y}{b^2}\right)=\frac{2}{b^2}\left(a^2+\frac{1+b^2}{b^2}K\cos\left(\sqrt{2}\tau\right)-\frac{1+b^2}{b^2}L\sin\left(\sqrt{2}\tau\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1-a^2}{a^2}Q\cos\left(\tau/\sqrt{2}\right)-\frac{1-a^2}{a^2}L\sin\left(\tau/\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{1+b^2}{b^2}c_x\right).$$

Усреднение по τ дает

$$\overline{\varepsilon^2}=2\frac{a^2}{b^2}+\frac{1+b^2}{b^4}c_x.$$

Несмотря на колебательный характер эволюции, отклонение начальных размеров и кинетической энергии системы от равновесных значений приводит к отличию усредненной по времени сферичности от равновесной.

Выразим постоянные интегрирования K, L, P, Q, c_x, c_y через начальные значения переменных x_0, y_0, X_0, Y_0, ξ_0. Из (26), (27) получаем, что

$$\begin{aligned}
x_0 &= K+P+\frac{1}{2}c_x,\\
y_0 &= -K+(\beta/\alpha)P-\frac{1}{2}c_x,\\
X_0 &= -\sqrt{2}L+\frac{1}{\sqrt{2}}Q,\\
Y_0 &= \sqrt{2}L-(\beta/\alpha)\frac{1}{\sqrt{2}}Q,
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)x_0-\frac{2}{3}\alpha y_0-\frac{1}{2}\xi_0,\\
L &= -\frac{\sqrt{2}}{3}\beta X_0+\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha Y_0,\\
P &= \frac{2}{3}\alpha(x_0+y_0),\\
Q &= -\frac{2\sqrt{2}}{3}\alpha(X_0+Y_0),\\
c_x &= x_0+\xi_0,\\
c_y &= -x_0-\xi_0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Из интеграла инерционной энергии (12) находим, что

$$\Delta_{\mathcal{E}} = \frac{9}{16\alpha^2}\left(P^2 + Q^2\right). \tag{29}$$

4. *Дисперсии остаточных скоростей.* После того, как найдено изменение со временем формы системы, встает вопрос, как это изменение отражается на внутренней кинематике. Особый интерес представляет изучение деформаций среднего эллипсоида остаточных скоростей.

Для изучения этих вопросов необходимо вернуться к общим уравнениям (5)-(12) первой части данной работы [1]. При этом мы сталкиваемся со следующими проблемами: как разделить систематические и остаточные движения, как разделить движения, параллельные экваториальной плоскости $\zeta = 0$, на азимутальные и происходящие вдоль цилиндрического радиуса. Для решения этих задач приходится делать ряд дополнительных предположений.

Примем во внимание сохранение момента количества движения системы h. Обозначим энергию вращения через T_r, т.е. $T_r = \frac{1}{2}M\left(v_\theta\right)^2$. Можно записать, что

$$T_r = k\,h^2\,I_\rho^{-1}, \tag{30}$$

где k - безразмерный множитель, зависящий от распределения в системе массы и момента количества движения. При твердотельном вращении системы $k = \frac{1}{2}$, а при цилиндрическом кеплеровском вращении однородного сфероида $k \approx 0.4198$. Предположим, что

$$\begin{aligned} M\left\langle v_\rho\right\rangle^2 &= \frac{1}{4}I_\rho^{-1}\dot{I}_\rho^2, \\ M\left\langle v_\zeta\right\rangle^2 &= \frac{1}{4}I_\zeta^{-1}\dot{I}_\zeta^2. \end{aligned} \tag{31}$$

Как и условия квазилинейности поля скоростей центроидов (29) из [1], соотношения (31) могут быть выведены в случае линейной зависимости движений центроидов по ρ, ζ от соответствующих координат. Второе из условий (31) позволяет определить изменение со временем энергии остаточных движений по ζ - координате. Действительно, обозначив

$$Q_\zeta = M\left\langle v_\zeta^2\right\rangle - M\left\langle v_\zeta\right\rangle^2,$$

получаем, что

$$Q_\zeta = T_\zeta - \frac{1}{4}I_\zeta^{-1}\dot{I}_\zeta^2. \tag{32}$$

Изменение со временем величины T_ζ определяется по формуле (27). Следовательно, величины в правой части этого равенства - известные функции времени.

Обратимся к уравнению (10) предыдущей статьи. Преобразуем величину $2GM^{5/2}\left\langle \upsilon_\rho \upsilon_\theta^2/\rho \right\rangle$, входящую в это уравнение. Будем пренебрегать отклонением вертекса среднего эллипсоида остаточных скоростей и смешанным центральным моментом третьего порядка распределения скоростей. Учитывая (30) и (31), предположим, что

$$2M\left\langle \upsilon_\rho \upsilon_\theta^2/\rho \right\rangle = 2kh^2 I_\rho^{-2}\dot{I}_\rho + k_* Q_\theta I_\rho^{-1}\dot{I}_\rho, \tag{33}$$

где

$$Q_\theta = M\left[\left\langle \upsilon_\theta^2 \right\rangle - \left\langle \upsilon_\theta \right\rangle^2\right]$$

- удвоенная кинетическая энергия азимутальных остаточных движений, а k_* - безразмерный множитель, характеризующий вклад остаточных скоростей в выражение (33). Тогда уравнение (10) из [1] переписывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(2T_r + Q_\theta) + 2kh^2 I_\rho^{-2}\dot{I}_\rho + k_* Q_\theta\, IR^{-1}\dot{I}_\rho = 0.$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt}T_r = -kh^2 I_\rho^{-2}\dot{I}_\rho,$$

то получаем:

$$\frac{d}{dt}Q_0 = -k_* Q_0 I_\rho^{-1}\dot{I}_\rho.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$Q_\theta = \gamma/I_\rho^{k_*}, \tag{34}$$

где γ - постоянная интегрирования. При малости азимутальных остаточных скоростей величина γ мала.

Теперь можно определить величину

$$Q_\rho = M\left[\left\langle \upsilon_\rho^2 \right\rangle - \left\langle \upsilon_\rho \right\rangle^2\right].$$

Для ее нахождения примем во внимание равенства (30), (31), (34). Тогда

$$Q_\rho = T_{\|} - \frac{1}{4}I_\rho^{-1}\dot{I}_\rho^2 - 2kh^2 I_\rho^{-1} - \gamma/I_\rho^{k_*}. \tag{35}$$

Сопоставление (32), (34), (35) позволяет исследовать изменение формы среднего эллипсоида остаточных скоростей.

Перейдем, как и в [1], к безразмерным переменным. Обозначим

$$\pi_{\rho,\theta,\zeta} = \frac{1}{2}Q_{\rho,\theta,\zeta}\Big/(-E).$$

Получим вместо (32), (34), (35), что

$$\pi_\rho = æ_{\|} - \frac{\gamma_0}{\iota_\rho^{k_*}} - \frac{1}{2}\frac{\iota_\rho'^2}{\iota_\rho} - \frac{\chi^2}{\iota_\rho}, \tag{36}$$

$$\pi_\theta = \frac{\gamma_0}{\iota_\rho^{k_*}}, \tag{37}$$

$$\pi_\zeta = æ_\zeta - \frac{1}{2}\frac{\iota'_\zeta}{\iota_\zeta}, \tag{38}$$

где $\gamma_0 = \frac{1}{2}\gamma(-E)^{-1} I_e^{-k_*}$, а $\chi^2 = kh^2(-E)^{-1} I_e^{-1}$ - безразмерный момент количества движения системы. Можно записать, что

$$\chi = \left(16\,k/s^4\right)h^2/\left(G^2 M^5(-E)^{-1}\right).$$

Подставим в (38) - (36) выражения (8). После линеаризации получаем:

$$\pi_\rho = \left[\frac{2}{3}\alpha - \left(\frac{3}{2}\right)^{k_*}\frac{\gamma_0}{\alpha^{k_*}} - \frac{3}{2}\frac{\chi^2}{\alpha}\right] + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{k_*+1}\frac{\gamma_0 k_*}{\alpha^{k_*+1}} - \frac{9}{4}\frac{\chi^2}{\alpha^2}\right]x + \xi, \tag{39}$$

$$\pi_\theta = \left(\frac{3}{2}\right)^{k_*}\frac{\gamma_0}{\alpha^{k_*}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{k_*+1}\frac{\gamma_0 k_*}{\alpha^{k_*+1}}x, \tag{40}$$

$$\pi_\zeta = 1 - \frac{2}{3}\alpha + \eta. \tag{41}$$

Эллипсоид скоростей оказывается трехосным. Если вспомнить предположения, сделанные в настоящей работе, то станет ясным, что этот вывод не имеет прямого отношения к проблеме существования третьего изолирующего интеграла.

Подставляя решение (26), (27) в (39) - (41) и произведя усреднение по τ, находим, что

$$\overline{\pi_\rho} = \left[\frac{2}{3}\alpha - \left(\frac{3}{2}\right)^{k_*}\frac{\gamma_0}{\alpha^{k_*}} - \frac{3}{2}\frac{\chi^2}{\alpha}\right] + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{k_*+1}\frac{\gamma_0 k_*}{\alpha^{k_*+1}} - \frac{9}{4}\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{1}{2}\right]c_x, \tag{42}$$

$$\overline{\pi_\theta} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k_*}\frac{\gamma_0}{\alpha^{k_*}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{k_*+1}\frac{\gamma_0 k_*}{\alpha^{k_*+1}}c_x, \tag{43}$$

$$\overline{\pi_\zeta} = 1 - \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{2}c_x. \tag{44}$$

5. *Основные результаты*. Суммируем основные результаты, полученные в данном исследовании и в [1].

Выведены уравнения второго порядка гросс-динамики самогравитирующих систем, сохраняющих ротационную симметрию.

На основе этих уравнений предложена замкнутая линейная система уравнений, описывающая в гросс-динамическом приближении нелинейную эволюцию системы. Эти уравнения преобразованы к безразмерному виду (1) - (4).

Для специального случая линейных отклонений от положения равновесия найдено общее решение (26) - (28), описывающее малые вириальные колебания системы, получены выражения для изменения со временем моментов инерции и дисперсий остаточных скоростей.

Сразу же напрашиваются обобщения данной работы в следующих двух направлениях. Во-первых, имеет смысл вернуться к уравнениям (1) - (4) и рассмотреть нелинейные вириальные колебания. Во-вторых, кажется естественным перейти к исследованию трехосных систем. Рассматривая затем системы, находящиеся во внешнем поле, можно на основе уравнений, приведенных в [2], исследовать эволюцию формы скоплений в Галактике.

Автор благодарен Т.А.Агекяну, В.А.Антонову и Б.П.Кондратьеву за стимулирующее обсуждение. Работа частично была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований по грантам 95-02-05007 и 96-02-19658 и выполнялась в рамках Государственной комплексной научно-технической программы "Астрономия" (проект 1.2.4.5).

Санкт-Петербургский государственный университет,
Россия

SMALL VIRIAL OSCILLATIONS OF AXISYMMETRIC GRAVITATING SYSTEMS. II

L.P.OSSIPKOV

It is found the solution of equations obtained in the first part of the study and governing the gross-dynamics of axisymmetric collisionless gravitating systems. Only small deviations from the virial equilibrium were considered. The solution is a superposition of oscillations with two eigen frequences. It describes periodic sphericity changes on the background of periodic expansions and contractions. The period of sphericity oscillations is a half of the period of size oscillations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л.П.Осипков*, Астрофизика, 43, 293, 2000.
2. *Л.П.Осипков*, Вестн. С.-Петербургск. ун-та, сер.1, вып. 3, 125, 1993.