

ВАРИАНТ БИМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ. II. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ.

Р.М.Авакян, А.А.Ераниян

Поступила 24 декабря 1999

Принята к печати 25 февраля 2000

Исходя из инвариантности действия относительно координатных преобразований, в биметрической теории гравитации с квадратичным по "напряженностям" лагранжианом установлены дифференциальные законы сохранения. Найдены явные выражения для канонического и метрического тензоров энергии-импульса гравитационного поля, а также для тензорного аналога псевдотензора Ландау-Лифшица.

1. *Введение.* Важнейшей характеристикой поля в любой физической теории является тензор энергии-импульса. Отличие от нуля плотности тензора энергии-импульса в некоторой области пространства-времени является необходимым и достаточным условием наличия в этой области физического поля. Тензор энергии-импульса любого физического поля вносит вклад в полный тензор энергии-импульса системы и не обращается в нуль вне источника поля. Это позволяет рассматривать перенос энергии волнами, изучать распределение интенсивности поля в пространстве, определять потоки энергии, вычислять изменение энергии-импульса в процессах излучения, поглощения и др.

В этом плане теория относительности Эйнштейна составляет исключение, поскольку в этой теории гравитационное поле лишено такой характеристики - оно описывается псевдотензором энергии-импульса. По этому поводу обычно утверждают, что в ОТО энергия гравитационного поля нелокализуема [1,2], т.е. локальное распределение энергии гравитационного поля не имеет физического смысла, т.к. зависит от выбора системы координат и только полная энергия замкнутых систем имеет смысл. Истинная физическая характеристика гравитационного поля в теории Эйнштейна - это тензор Римана R^i_{klm} , который является индикатором: если $R^i_{klm} = 0$, то поле отсутствует.

В отличие от теории Эйнштейна, в биметрической теории гравитационное поле характеризуется тензором энергии-импульса.

В первой части [3] был исследован вариант биметрической теории гравитации с квадратичным по $g_{ik|l}$ лагранжианом гравитационного поля

[4] (вертикальная черта при индексе означает ковариантную производную по фоновой метрике γ_{ik}). Ниже в рамках этой теории получено выражение для различных тензоров энергии-импульса гравитационного поля и выведены дифференциальные законы сохранения.

Функционал действия имеет вид

$$S = \int (\Lambda_g + \Lambda_m) \sqrt{-g} d^4 x, \quad (1)$$

где гравитационная часть плотности лагранжиана равна

$$\Lambda_g = -\frac{1}{16\pi G} \left[\bar{\Gamma}_{ln}^i \bar{\Gamma}_{kl}^n - \bar{\Gamma}_{ik}^i \bar{\Gamma}_{ln}^n \right] g^{ik} + \frac{1}{16\pi G} \left[a \left(g_{lm|n} g_{kl|n} g^{ik} g^{mn} g^{rs} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} g^{mn} U_m U_n - g^{mn} U_m V_n \right) - b \left(g_{lm|n} g_{kl|n} g^{ik} g^{mn} g^{rs} - V_m V_n g^{mn} \right) \right], \quad (2)$$

а

$$\Lambda_m = \Lambda_m(g_{ik}, q_a, q_{a,l}) \quad (3)$$

- плотность лагранжиана материи, где q_a - величины, характеризующие материю и негравитационные поля (скорость света $c=1$). Поскольку теория метрическая, то в плотности лагранжиана Λ_m гравитационное поле фигурирует только посредством метрического тензора g_{ik} .

Для дальнейших вычислений удобно лагранжиан Λ_g представить в следующем виде

$$\Lambda_g = \Lambda_g^E + \frac{1}{16\pi G} \left[(a+b) \left(3 \bar{\Gamma}_{ln}^i \bar{\Gamma}_{nk}^r g^{ik} + \bar{\Gamma}_{mr}^k \bar{\Gamma}_{sn}^i g^{mn} g^{rs} g_{ik} - \bar{\Gamma}_{ml}^i \bar{\Gamma}_{sn}^s g^{mn} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \bar{\Gamma}_{sl}^i \bar{\Gamma}_{ik}^s g^{ik} \right) - b W^I W_I \right], \quad (4)$$

где

$$\Lambda_g^E = -\frac{1}{16\pi G} \left[\bar{\Gamma}_{ln}^i \bar{\Gamma}_{kl}^n - \bar{\Gamma}_{ik}^i \bar{\Gamma}_{ln}^n \right] g^{ik} \quad (5)$$

- лагранжиан эйнштейновской теории в биметрической формулировке,

$$W^I = \bar{\Gamma}_{nk}^I g^{nk}, \quad (6)$$

$$\bar{\Gamma}_{ik}^I = \Gamma_{ik}^I - \overset{\vee}{\Gamma} \quad (7)$$

- тензор аффинной деформации, равный разности символов Кристоффеля искривленного и фоновое пространства-времени, а постоянные a и b - безразмерные параметры теории.

В априорно-геометрических теориях, абсолютные переменные которых допускают группу симметрии с размерностью не меньше четырех, выполняются некие дифференциальные уравнения [5]

$$\tau_{ik}^k = 0, \quad (8)$$

из которых следуют законы сохранения. Тензор τ_i^k таков, что в отсутствии

гравитационного поля переходит в тензор энергии-импульса T_l^k материи и негравитационных полей. Рассмотрим вариант биметрической теории, в которой фоновая метрика является плоской, т.е. обладает десятипараметрической группой симметрии. В этом случае теория имеет десять ковариантно сохраняющихся величин: энергия-импульс и момент импульса.

2. *Законы сохранения.* Уравнения поля, следующие из равенства нулю вариации (1) по g_{ik} , имеют вид [3]:

$$\bar{R}_{ik} - \frac{1}{2} \bar{R} g_{ik} + S_{ik} = 8\pi G T_{ik}, \quad (9)$$

где S_l^k - определенный тензор, зависящий от g_l^k , $g_{ik|l}$ и $g_{ik|m}$. Их следует дополнить уравнениями движения негравитационной материи

$$\frac{\delta(\Lambda_m \sqrt{-g})}{\delta q_a} = 0, \quad (10)$$

которые эквивалентны уравнениям

$$T_{ljk}^* = 0, \quad (11)$$

либо уравнениям, вытекающим из инвариантности действия относительно координатных преобразований [5,6]. При преобразовании $x'^i = x^i + \xi^i(x)$ полевые функции g_{ik} , γ_{ik} и q_a изменятся следующим образом:

$$\delta_L g_{mn} = -g_{mk} \xi_{|n}^k - g_{nk} \xi_{|m}^k - g_{mn|k} \xi^k, \quad (12)$$

$$\delta_L \gamma_{mn} = -\gamma_{mk} \xi_{|n}^k - \gamma_{nk} \xi_{|m}^k, \quad (13)$$

$$\delta_L q_a = F_{a;k}^{b;l} q_b \xi_{|l}^k - q_{|m} \xi^m, \quad (14)$$

где

$$F_{a;k}^{b;l} q_b = \delta_k^{l_1} q_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_p} + \dots + \delta_k^{l_p} q_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_p} - \delta_{k_1}^l q_{k_2 \dots k_p}^{l_1 \dots l_p} - \dots - \delta_{k_p}^l q_{k_1 \dots k_{p-1}}^{l_1 \dots l_p}. \quad (15)$$

Вычислим теперь изменение действия при преобразовании координат

$$\delta S = \int_{\Omega} \left[\frac{\delta(\Lambda \sqrt{-g})}{\delta \Phi_a} \delta_L \Phi_a + \sqrt{-\gamma} \left(\xi^m \Lambda \sqrt{\frac{g}{\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial(\Lambda \sqrt{-g})}{\partial \Phi_{a,m}} \delta_L \Phi_a \right) \right]_{|m} d^4 x. \quad (16)$$

Здесь под Φ_a понимаем совокупность величин g_{ik} , γ_{ik} и q_a .

Подставив (12)-(15) в (16) и учитывая произвольность ξ^i и объема интегрирования Ω , получим следующие соотношения

$$t_{k|l}^i = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta(\Lambda \sqrt{-g})}{\delta \Phi_a} \Phi_{a|k}, \quad (17)$$

$$t_k^i = K_{k|l}^{i|l} + F_{a;k}^{b;l} \Phi_b \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta(\Lambda \sqrt{-g})}{\delta \Phi_a}, \quad (18)$$

$$K_k^{il} = -K_k^{li}, \quad (19)$$

где

$$t_k^i = \Phi_{a|k} \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial(\Lambda \sqrt{-g})}{\partial \Phi_{a,i}} - \sqrt{\frac{g}{\gamma}} \delta_k^i, \quad (20)$$

$$K_k^{il} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial(\Lambda \sqrt{-g})}{\partial \Phi_{a,i}} \Phi_b F_{a;k}^{b;l}. \quad (21)$$

Здесь t_k^i - плотность канонического тензора энергии-импульса.

Из (17), (18) в случае $\Lambda = \Lambda_g$ с учетом уравнений гравитационного поля (9) и определения тензора энергии-импульса материи и негравитационных полей

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\Lambda_g \sqrt{-g})}{\delta g^{ik}}, \quad (22)$$

получим следующие тождества

$$\left(\frac{g}{t} \right)_{i;k} = \left(\frac{g}{K} \right)_{k|i} - \sqrt{\frac{g}{\gamma}} T_k^i + \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \gamma^{il} \frac{\delta(\Lambda_g \sqrt{-g})}{\delta \gamma^{lk}}, \quad (23)$$

$$\left(\frac{g}{t} \right)_{i;k|i} = \sqrt{\frac{g}{\gamma}} g_{ik}^{lm} \frac{T_{lm}}{2}. \quad (24)$$

В случае $\Lambda = \Lambda_m$

$$\left(\frac{m}{t} \right)_{i;k} = \left(\frac{m}{K} \right)_{k|i} + \sqrt{\frac{g}{\gamma}} T_k^i, \quad (25)$$

$$\left(\frac{m}{t} \right)_{i;k|i} = -\sqrt{\frac{g}{\gamma}} g_{ik}^{lm} \frac{T_{lm}}{2}. \quad (26)$$

Из свойства $K_k^{il} = -K_k^{li}$ и уравнений (23)-(26) вытекают следующие дифференциальные законы сохранения:

$$\left(\left(\frac{g}{t} \right)_{i;k} + \left(\frac{m}{t} \right)_{i;k} \right)_{|i} = \left(\left(\frac{g}{t} \right)_{i;k} + \sqrt{\frac{g}{\gamma}} T_k^i \right)_{|i} = 0, \quad (27)$$

$$M_{t \quad ik|i} = 0, \quad (28)$$

где плотность метрического тензора энергии-импульса определяется следующим образом

$$M_{t \quad ik} = -\frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta(\Lambda_g \sqrt{-g})}{\delta \gamma_{ik}}. \quad (29)$$

С учетом выражения (4) получим

$${}^M_{l}{}^k = -\frac{1}{16\pi G} A_{||}^{lk} + \frac{1}{8\pi G} (a+b) B_{||}^{lk} - \frac{1}{8\pi G} b C_{||}^{lk}, \quad (30)$$

где

$$A^{lk} = \left[\sqrt{\frac{g}{\gamma}} (\gamma^{ml} g^{lk} + \gamma^{mk} g^{ll} - \gamma^{ml} g^{lk} - \gamma^{lk} g^{lm}) \right]_{||m} \quad (31)$$

- вклад эйнштейновской части лагранжиана Λ_g^E ,

$$\begin{aligned} B^{lk} = & \left\{ -\frac{3}{2} [\gamma^{nl} (\bar{\Gamma}_{sn}^l g^{sk} + \bar{\Gamma}_{sn}^k g^{sl}) + \gamma^{nk} (\bar{\Gamma}_{sn}^s g^{sl} + \bar{\Gamma}_{sn}^l g^{sl})] - \right. \\ & - \gamma^{nl} (\bar{\Gamma}_{sn}^l g^{sk} + \bar{\Gamma}_{sn}^k g^{sl}) + \gamma^{lk} (\bar{\Gamma}_{sn}^s g^{nl} + \bar{\Gamma}_{sn}^l g^{ns}) - \\ & - g_{mn} \bar{\Gamma}_{sp}^m [\gamma^{nl} g^{ls} g^{kp} + \gamma^{nk} g^{ls} g^{lp} - \gamma^{nl} g^{ls} g^{kp}] + \\ & \left. \bar{\Gamma}_{sn}^s (\gamma^{nl} g^{kl} + \gamma^{kn} g^{ll} - \gamma^{nl} g^{lk}) \right\} \sqrt{\frac{g}{\gamma}}. \end{aligned} \quad (32)$$

$$C^{lk} = W_n (\gamma^{nl} g^{lk} - \gamma^{nl} g^{lk} - \gamma^{nk} g^{ll}) \sqrt{\frac{g}{\gamma}}. \quad (33)$$

Отметим, что тензор ${}^M_{l}{}^k$ является аналогом псевдотензора Папаетру в теории Эйнштейна (при $a=b=0$ в декартовой системе координат их выражения совпадают) [7]. Из выражения (20) с учетом (4), для канонического тензора энергии-импульса гравитационного поля получим

$$\begin{aligned} {}^{(g)}_{l}{}^m_n = & -\frac{1}{16\pi G} \sqrt{\frac{g}{\gamma}} \{ 2 g^{lk} \bar{\Gamma}_{ln}^s \bar{\Gamma}_{sk}^m - g^{lk} \bar{\Gamma}_{ls}^s \bar{\Gamma}_{nk}^m - g^{nk} \bar{\Gamma}_{ls}^s \bar{\Gamma}_{nk}^l + g^{lm} \bar{\Gamma}_{ls}^s \bar{\Gamma}_{nk}^k - \\ & - g^{lk} \bar{\Gamma}_{sn}^l \bar{\Gamma}_{lk}^m \} + 2b [g^{lk} \bar{\Gamma}_{lk}^s \bar{\Gamma}_{sn}^m - g^{lk} \bar{\Gamma}_{lk}^m \bar{\Gamma}_{sn}^s + g^{lk} \bar{\Gamma}_{lk}^p \bar{\Gamma}_{lm}^l g^{rm} g_{pl}] \\ & - 2(a+b) [2 g^{lk} \bar{\Gamma}_{ln}^s \bar{\Gamma}_{sk}^m + g^{mk} \bar{\Gamma}_{sk}^p \bar{\Gamma}_{pn}^s + g^{pk} \bar{\Gamma}_{pn}^l \bar{\Gamma}_{sk}^r g_{lr} g^{ms} - \\ & - g^{lk} \bar{\Gamma}_{sn}^l \bar{\Gamma}_{lk}^m - g^{mk} \bar{\Gamma}_{si}^l \bar{\Gamma}_{nk}^l - g^{lk} \bar{\Gamma}_{si}^s \bar{\Gamma}_{nk}^m] - \sqrt{\frac{g}{\gamma}} \Lambda_g \delta_n^m. \end{aligned} \quad (34)$$

Тензор ${}^{(g)}_{l}{}^m_n$ является аналогом псевдотензора Эйнштейна в ОТО. Из уравнения (28) с учетом (30) и (31)-(32) получим уравнение

$$\begin{aligned} & \left\{ \sqrt{\frac{g}{\gamma}} [(a+b) (3 \bar{\Gamma}_{ki}^n g^{km} + g_{ll} \bar{\Gamma}_{sk}^l g^{mk} g^{ns} - \right. \\ & \left. - \bar{\Gamma}_{ll}^l g^{mn} - \delta_l^m \bar{\Gamma}_{sl}^s g^{nl} - \delta_l^m \bar{\Gamma}_{lk}^n g^{lk}) - b g^{mn} W_l] \right\}_{||mn} = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

эквивалентное уравнению

$$S_{i;k}^k = 0, \quad (36)$$

где тензор S_i^k входит в уравнения гравитационного поля (9). Как видно, из (9) с учетом (36) следует (11). Аналогичный результат следует из уравнений (25) и (26). Таким образом, полная система уравнений содержит наряду с (9), также (36), либо эквивалентные ему (35) или (11).

Найдем также выражение для гравитационной части тензора $\overset{(g)}{K}_k^{||}$. Из (21) после вычислений получим:

$$\begin{aligned} \overset{(g)}{K}_k^{||} = & -\frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial(\Lambda_g \sqrt{-g})}{\partial g_{lm,l}} g_{km} + \frac{1}{16\pi G} A^{ln} \gamma_{nk} - \\ & - \frac{1}{8\pi G} (a+b) B^{ln} \gamma_{nk} + \frac{1}{8\pi G} b C^{ln} \gamma_{nk}, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial(\sqrt{-g} \Lambda_g)}{\partial g_{lm,l}} = & -\frac{1}{16\pi G} \sqrt{\frac{g}{\gamma}} \left[g^{ik} g^{ms} \bar{\Gamma}_{sk}^l - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{sn}^s (g^{nl} g^{lm} + g^{nm} g^{ll} - g^{nl} g^{im}) \right. \\ & - \left. \frac{1}{2} g^{lm} g^{ks} \bar{\Gamma}_{sk}^l \right] - (a+b) \left[2 g^{si} g^{mk} \bar{\Gamma}_{sk}^l + g^{lk} g^{ms} \bar{\Gamma}_{sk}^l + g^{ls} g^{lk} \bar{\Gamma}_{sk}^m - g^{mi} g^{sk} \bar{\Gamma}_{sk}^l - \right. \\ & \left. - \bar{\Gamma}_{sp}^s (g^{pi} g^{ml} + g^{pm} g^{ll}) \right] + b \left[W^l g^{ml} + W^m g^{ll} - W^l g^{ml} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

Подставив (37) и (30) в уравнение (23) и введя аналог псевдотензор Ландау-Лифшица в биметрической формулировке

$$t_{LL}^{lm} = g^{mk} \left[\overset{(E)}{t}_k^l - \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{g_{kn}}{\sqrt{g/\gamma}} \right)_{,l} U^{lnp}_{|p} \right] \sqrt{\frac{\gamma}{g}}, \quad (39)$$

где $\overset{(E)}{t}_k^l$ - это выражение (34) при $a=b=0$, а

$$U^{lnp} = \frac{g}{\gamma} (g^{lp} g^{nl} - g^{ln} g^{pl}) = -U^{lnp}, \quad (40)$$

получим

$$\frac{g}{\gamma} \left(t_{LL}^{lk} - \frac{1}{8\pi G} S^{lk} + T^{lk} \right) = \frac{1}{16\pi G} U^{lk m}_{|m}, \quad (41)$$

т.е. симметричной тензорной плотностью данной теории является

$$S^{lk} = t_{LL}^{lk} - \frac{1}{8\pi G} S^{lk}. \quad (42)$$

Из уравнения (8) для симметричного тензора следует интегральный закон сохранения

$$\left(\int \tau^{0l} \xi_l^{(a)} \sqrt{-\gamma} d^3 x \right)_0 = - \oint \tau^{\beta l} \xi_l^{(a)} \sqrt{-\gamma} dS_\beta \quad (43)$$

в плоском фоновом пространстве с десятью векторами Киллинга $\xi_j^{(a)}$,

$a=1,2,\dots,10$. Если в правой части поток через поверхность интегрирования равен нулю, то ковариантное выражение в круглых скобках есть сохраняющаяся величина.

Авторы выражают благодарность участникам семинара кафедры теоретической физики ЕГУ за полезные обсуждения

Ереванский государственный университет,
Армения

VARIANT OF THE BIMETRIC THEORY OF GRAVITATION. II. ENERGY-MOMENTUM TENSOR OF THE GRAVITATIONAL FIELD

R.M.AVAGYAN, A.H.YERANYAN

Differential conservation laws in bimetric theory of gravitation with the Lagrangian, quadratic with respect to the "intensity" are derived proceeding from the invariance of action relative to the transformations of the space-time coordinates. Explicit expressions for canonical and metric energy-momentum tensors of the gravitational field as well as those for generalizing the Landau-Lifshits pseudotensor in GR are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория поля, М., Наука, 1988.
2. К.Меллер, Теория относительности. М., Атомиздат, 1975.
3. Р.М.Авакян, А.А.Ераниян, Астрофизика 43, 303, 2000.
4. R.M.Avakian, L.Sh.Grigorian, Astrophys. and Space Science, 146, 183-193, 1988.
5. D.L.Lee, A.P.Lightman, W.T.Ni, Phys Rev., D10, 1685, 1974.
6. А.А.Саарян, Л.Ш.Григорян, Астрофизика 33, 107, 1990.
7. Н.А.Черников, Сообщ. ОИЯИ, P2-87-683, Дубна, 1987.