АСТРОФИЗИКА

ТОМ 43 МАЙ, 2000 ВЫПУСК 2

УДК: 524.3/.4-32

МАЛЫЕ ВИРИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ.I

Л.П.ОСИПКОВ

Поступила 25 мая 1999
Принята к печати 15 ноября 1999

Предложена замкнутая система уравнений, описывающая гросс-динамику осесимметричных бесстолкновительных гравитирующих систем. Уравнения преобразованы к безразмерному виду. Полученная система уравнений сведена к системе линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

1. *Введение.* В зависимости от степени подробности статистического описания пространственно-кинематической структуры звездных систем галактическую динамику подразделяют на фазодинамику, гидродинамику и гросс-динамику [1].

Гросс-динамическое описание звездных систем является наименее детальным. В качестве гросс-параметров служат интегральные характеристики всей системы, такие, как масса, тензор инерции, тензоры кинетической и потенциальной энергии и т.п. Наиболее известным из соотношений гросс-динамики является уравнение Лагранжа-Якоби, принимающее для стационарных систем форму так называемой теоремы вириала (напр., [2,3]). Известны тензорные обобщения уравнения Лагранжа-Якоби [4,6], но в звездной динамике они используются значительно реже. Тем не менее, применение именно тензорной теоремы вириала к эллиптическим галактикам позволило заключить об анизотропии распределения остаточных скоростей в этих системах [7,8]. Обсуждались и уравнения гросс-динамики более высокого порядка [9].

Как и в гидродинамике звездных систем, для замыкания системы гросс-динамических уравнений требуются дополнительные соотношения. Для этого необходимо хотя бы грубое моделирование пространственного распределения и движения звезд. Замкнутая система уравнений гросс-динамики образует систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Как аналитическое, так и численное исследование такой системы намного проще, чем уравнений фазодинамики или гидродинамики. Поэтому можно надеяться, что гросс-динамический подход позволит проанализировать ряд интересных задач и получить предварительные результаты до того, как окажется возможным более подробное исследование.

В данной работе на уровне гросс-динамики рассматривается сравнительно простая задача. В ней исследуются нестационарные самогравитирующие системы, обладающие ротационной симметрией. Тем самым делается следующий шаг по сравнению с работой автора [10], в которой изменение в ходе эволюции формы системы не рассматривалось. Статья примыкает к работам автора по гросс-динамике звездных систем [11-14]. Удается уточнить выражение для периода колебаний таких систем, приводившееся в [15].

2. *Иерархия уравнений гросс-динамики.* По аналогии с обобщенными вириальными уравнениями для гравитирующей жидкости (напр., [16]) уравнения гросс-динамики звездных систем обычно рассматриваются как моментные по отношению к уравнениям гидродинамики звездных систем [11,12]. Но можно исходить и непосредственно из кинетического уравнения для функции распределения [13,14]. Действительно, запишем это уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\Phi(x,t)$ - потенциал регулярных сил. Умножим (1) на $\prod_{l=3}^{3} x_l^{k_l} \upsilon_l^{l_l}$ и проинтегрируем по всему фазовому пространству. Получившиеся соотношения и будут уравнениями гросс-динамики. Некоторые слагаемые в этих уравнениях представляют собой поверхностные интегралы по границе фазового объема системы, получившиеся в результате интегрирования по частям. Для сферических систем эти слагаемые явно выписаны в [11]. Как обычно, будем далее считать, что эти величины обращаются в нуль.

Обозначим через M массу системы,

$$M = \int f(x, \mathrm{v}, t) d^3 \mathrm{v}\, d^3 x. \tag{2}$$

Для произвольной функции $g\,(x,\mathrm{v},t)$ обозначим

$$\langle g \rangle (t) = M^{-1} \int g(x, \mathrm{v}, t) f(x, \mathrm{v}, t) d^3 \mathrm{v}\, d^3 x, \tag{3}$$

т.е. $\langle g \rangle$ - результат усреднения функции $g\,(x,\mathrm{v},t)$ по фазовому объему системы. Мы рассматриваем

$$g(x, \mathrm{v}, t) = \prod_{l=1}^{3} x_l^{k_l} \upsilon_l^{l_l}.$$

Обозначим

$$\sum_{l=1}^{3} (k_l + l_l) = n.$$

Величина n характеризует порядик уравнений гросс-динамики. При $n = 0$ получается закон сохранения массы, $dM/dt = 0$, а при $n = 1$ - сохранение количества движения $Md\langle x \rangle/dt = \langle \mathrm{v} \rangle$. Наиболее важные соотношения, включая уравнение Лагранжа-Якоби и закон сохранения энергии, получаются при $n = 2$.

Рассмотрим систему, обладающую ротационной и зеркальной симметрией. Пусть ρ, ϑ, ζ - цилиндрические координаты, υ_ρ, υ_ϑ, υ_ζ - соответствующие скорости. Перепишем в этих переменных бесстолкновительное кинетическое уравнение (1). Как известно (см.[2]),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \upsilon_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \upsilon_\zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\upsilon_\vartheta^2}{\rho} \right) \frac{\partial f}{\partial \upsilon_\rho} - \frac{\upsilon_\rho \upsilon_\vartheta}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \upsilon_\vartheta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial f}{\partial \upsilon_\zeta} = 0. \tag{4}$$

Исходя из (4), найдем в цилиндрических координатах гросс-динамические уравнения второго порядка. После элементарных преобразований (см.[12]) получаем следующие уравнения:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} M\langle \rho \rangle^2 - M\left\langle \upsilon_\rho^2 + \upsilon_\vartheta^2 \right\rangle = M\left\langle \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right\rangle, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} M\langle \zeta \rangle^2 - M\langle \upsilon_\zeta \rangle^2 = M\left\langle \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\rangle, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt} M\left\langle \upsilon_\rho^2 \right\rangle - 2M\left\langle \upsilon_\rho \upsilon_\vartheta^2 / \rho \right\rangle = 2M\left\langle \upsilon_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right\rangle, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt} M\left\langle \upsilon_\rho \upsilon_\vartheta \right\rangle + M\left\langle \left(\upsilon_\rho^2 \upsilon_\vartheta - \upsilon_\vartheta^3 \right) / \rho \right\rangle = M\left\langle \upsilon_\vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right\rangle, \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt} M\left\langle \upsilon_\rho \upsilon_\zeta \right\rangle + M\left\langle \upsilon_\vartheta^2 \upsilon_\zeta / \rho \right\rangle = M\left\langle \upsilon_\zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \upsilon_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\rangle, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt} M\left\langle \upsilon_\vartheta^2 \right\rangle + 2M\left\langle \upsilon_\rho \upsilon_\vartheta^2 / \rho \right\rangle = 0, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt} M\left\langle \upsilon_\vartheta \upsilon_\zeta \right\rangle + M\left\langle \upsilon_\rho \upsilon_\vartheta \upsilon_\zeta / \rho \right\rangle = M\left\langle \upsilon_\vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\rangle, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt} M\left\langle \upsilon_\zeta^2 \right\rangle = 2M\left\langle \upsilon_\zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\rangle. \tag{12}$$

Уравнения (5), (6) являются тензорными обобщениями уравнения Лагранжа-Якоби, а (7) - (12) определяют изменение тензора кинетической энергии. В эти уравнения входят усредненные по системе моменты третьего порядка распределения скоростей. Эти величины плохо известны и сами по себе не представляют большого интереса, как и внедиагональные компоненты тензора кинетической энергии. Сложим уравнения (7) и (10). Получим:

$$\frac{d}{dt} M\left\langle v_\rho^2 + v_\theta^2 \right\rangle = 2M\left\langle v_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right\rangle. \tag{13}$$

В уравнение (13) моменты третьего порядка уже не входят. Обозначим

$$\begin{aligned}
T_{\|} &= M\left\langle v_\rho^2 + v_\theta^2 \right\rangle, & T_\zeta &= M\left\langle v_\zeta^2 \right\rangle, \\
V_\rho &= M\left\langle v_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right\rangle, & V_\zeta &= M\left\langle v_\zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\rangle, \\
I_\rho &= M\left\langle \rho^2 \right\rangle, & I_\zeta &= M\left\langle \zeta^2 \right\rangle, \\
W_\rho &= M\left\langle \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right\rangle, & W_\zeta &= M\left\langle \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{14}$$

Величины I_ρ, I_ζ и W_ρ, W_ζ представляют собой диагональные компоненты тензоров инерции и потенциальной энергии соответственно (установившаяся астрономическая терминология отличается здесь от принятой в теоретической механике). Величины V_ρ, V_ζ совпадают с соответствующими компонентами "H - тензора", введенного в [9].

С учетом обозначений (14) уравнения (5), (6), (12), (13) записываются следующим образом:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2} I_\rho - T_{\|} = W_\rho, \tag{15}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2} I_\zeta - T_\zeta = W_\zeta, \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt} T_{\|} = 2V_\rho, \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt} T_\zeta = 2V_\zeta. \tag{18}$$

Кинетическая энергия системы $T = \frac{1}{2}\left(T_{\|} + T_\zeta\right)$, а потенциальная энергия $W = W_\rho + W_\zeta$. Для стационарных систем суммирование (15) и (16) дает теорему вириала $2T + W = 0$. Легко показать [10], что

$$\frac{d}{dt} W = -\left(V_\rho + V_\zeta\right)$$

Учитывая это, получаем, что суммирование (17) и (18) дает закон сохранения энергии:

$$2\frac{d}{dt} T = 2\left(V_\rho + V_\zeta\right) = -2\frac{d}{dt} W,$$

т.е. $T + W = E = \mathrm{const}$.

Если $n = 3$, то получаем уравнения гросс-динамики третьего порядка. Вместо (5) и (6) появятся обобщения вириальных уравнений третьего порядка Чандрасекара [16] на системы с анизотропным распределением скоростей. Вместо (7) - (12) появятся уравнения для таких величин, как $\left\langle \rho, \upsilon_\rho^2 \right\rangle$. В число уравнений гросс-динамики третьего порядка войдут соотношения, описывающие изменение со временем усредненного по системе тензора асимметрии распределения скоростей. Однако из этих уравнений уже нельзя получить новых фундаментальных законов сохранения. То же относится и к уравнениям более высоких порядков.

3. *Замыкающие соотношения.* Будем исследовать динамику галактик на основе уравнений (15) - (18). Они не образуют замкнутую систему, поэтому необходимо эти уравнения дополнить замыкающими соотношениями.

Сначала напомним, что скалярное уравнение Лагранжа-Якоби с учетом закона сохранения энергии переписывается следующим образом:

$$\ddot{I} = 2(2E - W). \tag{19}$$

Здесь $I = I_\rho + I_\zeta$ - полный момент инерции. Из соображений размерности можно записать, что

$$W = -\left(s^2/2\right) G M^{5/2} I^{-1/2}, \tag{20}$$

где G-гравитационная постоянная, s - безразмерный структурный множитель, зависящий от распределения масс. Для однородного эллипсоида вращения с полуосями a, c

$$s^2 = 6 \cdot 5^{-3/2}\left(3 - e^2\right) e^{-1} \arcsin e, \quad e^2 = 1 - c^2/a^2 .$$

В частности, для шара ($e = 0$) $s^2 \approx 0.929$, для диска ($e = 1$) $s^2 \approx 1.192$. Значения этого множителя для большого числа неоднородных сферических и эллипсоидальных моделей нашли Ферронский, Денисик и Ферронский [17]. Оказалось, что независимо от сферичности и закона плотности величина s меняется в очень узких пределах. Подставим выражение (20) для потенциальной энергии в уравнение (19):

$$\ddot{I} = 4E + s^2 G M^{5/2} I^{-1/2} . \tag{21}$$

Если в ходе эволюции s = const (*предположение квазигомологичности*), то для уравнения (21) можно написать интеграл [14]:

$$\frac{1}{2}\dot{I} - 4IT = \mathcal{E} = \text{const}. \tag{22}$$

Будем называть его *интегралом инерционной энергии.*

Существование интеграла инерционной энергии (22) позволяет полностью качественно исследовать уравнение (21). Если $E \le 0$, $\mathcal{E} \le 0$, то момент инерции $I(t)$ оказывается периодической функцией времени. Это означает, что система испытывает колебания. Будем называть эти колебания *вириальными*. Явное нахождение функции $I(t)$ сводится к квадратурам, не берущимся в элементарных функциях [17-19]. Численные эксперименты (напр., [20-22]) показывают, что после первоначального сжатия гравитирующих систем и формирования структуры "гало-ядро" предположение квазигомологичности можно считать выполненным с хорошей точностью.

Вернемся к уравнениям (15) -(18). Из соображений размерности можно записать, что

$$W_\rho = -\frac{1}{2}s_\rho^2\frac{GM^{5/2}}{(I_\rho+I_\zeta)^{3/2}}I_\rho, \tag{23}$$

$$W_\zeta = -\frac{1}{2}s_\zeta^2\frac{GM^{5/2}}{(I_\rho+I_\zeta)^{3/2}}I_\zeta, \tag{24}$$

где s_ρ, s_ζ - безразмерные структурные множители. Сопоставляя (23) и (24) с (20), получаем, что

$$s^2 = s_\rho^2\frac{2+\varepsilon^2(s_\zeta/s_\rho)^2}{2+\varepsilon^2}, \tag{25}$$

где $\varepsilon^2 = 2I_\zeta/I_\rho$ - безразмерный параметр, характеризующий эффективную сферичность системы [23]. Преобразуя формулы, приведенные, например, в книге Чандрасекара [16], легко найти, что для однородного эллипсоида вращения

$$s_\rho^2 = 3\cdot 5^{-3/2}(2+\varepsilon^2)^{3/3}(1-\varepsilon^2)^{-3}\left(\arcsin\sqrt{1-\varepsilon^2} - \varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\right).$$

Для шара и диска $s_\rho = s \approx 1$. Отношение s_ρ/s принимает свое наибольшее значение, равное 1.067 при $\varepsilon = \varepsilon_* \approx 0.443$. Если $\varepsilon > 0.71$ или $\varepsilon < 0.20$, то это отношение меньше 1.05.

В качестве первого замыкающего соотношения примем условие

$$s_\rho = s_\zeta = \text{const}. \tag{26}$$

Тогда из (25) следует, что $s = s_\rho$. Будем называть (26) *условием квазигомологичности в широком смысле.*

Из соображений размерности можно также записать, что

$$V_\rho = -c_\rho\frac{GM^{5/2}}{(I_\rho+I_\zeta)^{3/2}}\dot{I}_\rho, \tag{27}$$

$$V_\zeta = -c_\zeta\frac{GM^{5/2}}{(I_\rho+I_\zeta)^{3/2}}\dot{I}_\zeta, \tag{28}$$

где c_ρ, c_ζ - также безразмерные структурные множители. В качестве второго замыкающего соотношения примем равенство

$$c_\rho = c_\zeta = \text{const.} \tag{29}$$

Его естественно называть условием *квазилинейности поля скоростей центроидов*, поскольку при линейной зависимости скоростей центроидов по ρ, ζ от цилиндрических координат оно выполняется точно. Условие (29) подробнее обсуждается в [9]. Поскольку $d(W_\rho + W_\zeta)/dt = -(V_\rho + V_\zeta)$, то получаем, что $c_\rho = c_\zeta = s^2/4$.

Итак, учитывая условия (26) и (29), мы получаем следующую замкнутую систему уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2} I_\rho - 2T_{\|} = -s^2 \frac{GM^{5/2}}{(I_\rho + I_\zeta)^{3/2}} I_\rho, \tag{30}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} I_\zeta - 2T_\zeta = -s^2 \frac{GM^{5/2}}{(I_\rho + I_\zeta)^{3/2}} I_\zeta, \tag{31}$$

$$\frac{d}{dt} T_{\|} = -\frac{1}{2} s^2 \frac{GM^{5/2}}{(I_\rho + I_\zeta)^{3/2}} \frac{d}{dt} I_\rho, \tag{32}$$

$$\frac{d}{dt} T_\zeta = -\frac{1}{2} s^2 \frac{GM^{5/2}}{(I_\rho + I_\zeta)^{3/2}} \frac{d}{dt} I_\zeta . \tag{33}$$

Для этой системы известны интегралы

$$T_{\|} + T_\zeta - s^2 \frac{GM^{5/2}}{(I_\rho + I_\zeta)^{1/2}} = 2E \tag{34}$$

(интеграл энергии) и

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt} I_\rho + \frac{d}{dt} I_\zeta\right)^2 - 2(I_\rho + I_\zeta)(T_{\|} + T_\zeta) = \mathcal{E} \tag{35}$$

(интеграл инерционной энергии).

4. ***Переход к безразмерным переменным.*** В положении равновесия для системы уравнений (30) - (33) выполняется теорема вириала, т.е. $W = 2E$. Обозначим значение момента инерции в положении равновесия через I_e. В силу (22) получаем, что

$$I_e = \frac{s^4 G^2 M^5}{16(-E)^2}. \tag{36}$$

Для преобразования системы уравнений (30) - (33) к безразмерной форме в качестве единицы момента инерции возьмем I_e в качестве единицы энергии - $(-E)$, а в качестве единицы времени $-t_0 = \frac{1}{2} I_e^{1/2}(-E)^{-1/2}$. Введем безразмерные велиины

$$\iota_\rho = I_\rho / I_e, \quad \iota_\zeta = I_\zeta / I_e, \quad æ_{\|} = \frac{1}{2} T_{\|} \Big/ (-E), \quad æ_\zeta = \frac{1}{2} T_\zeta \Big/ (-E), \quad \tau = t/t_0. \tag{37}$$

В них система (30) - (33) принимает следующий вид:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\iota_\rho = æ_{\|} - (\iota_\rho + \iota_\zeta)^{-3/2}\iota_\rho, \tag{38}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\iota_\zeta = æ_\zeta - (\iota_\rho + \iota_\zeta)^{-3/2}\iota_\zeta, \tag{39}$$

$$\frac{d}{d\tau}æ_{\|} = -(\iota_\rho + \iota_\zeta)^{-3/2}\frac{d}{d\tau}\iota_\rho, \tag{40}$$

$$\frac{d}{d\tau}æ_\zeta = -(\iota_\rho + \iota_\zeta)^{-3/2}\frac{d}{d\tau}\iota_\zeta, \tag{41}$$

Интеграл энергии (34) сводится теперь к инвариантному соотношению

$$æ_{\|} + æ_\zeta - 2(\iota_\rho + \iota_\zeta)^{-1/2} = -1, \tag{42}$$

а интеграл инерционной энергии (35) в безразмерной форме принимает вид

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d}{d\tau}(\iota_\rho + \iota_\zeta)\right]^2 + (\iota_\rho + \iota_\zeta) - 2(\iota_\rho + \iota_\zeta)^{1/2} = \varepsilon = \mathrm{const} \tag{43}$$

С помощью интеграла (43) можно определить $(\iota_\rho + \iota_\zeta)$ как периодическую (при $\varepsilon < 0$) функцию τ. Тогда система (38) - (42) сводится к системе *линейных* (!) уравнений с периодическими коэффициентами. Теория таких уравнений подробно разработана (см. [24]). Однако исследование нашей системы оказывается слишком сложной задачей. Причина этого отчасти лежит в том, что зависимость коэффициентов от переменной τ не выражается в конечном виде через элементарные функции. В настоящей работе в качестве первого шага к исследованию системы (38) - (39) ограничимся нахождением ее решения в окрестности положения равновесия. Полученные результаты будут приведены в продолжении этой статьи.

Автор благодарен Т.А.Агекяну, В.А.Антонову и Б.П.Кондратьеву за стимулирующее обсуждение. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований по грантам 95-02-05007 и 96-02-19658 и выполнена в рамках Государственной комплексной научно-технической программы "Астрономия" (проект 1.2.4.5).

Санкт-Петербургский государственный универститет,
Россия

SMALL VIRIAL OSCILLATIONS OF AXISYMMETRIC GRAVITATING SYSTEMS. I

L.P.OSSIPKOV

A closed system of equations describing gross-dynamics of axisymmetric collisionless gravitating systems is suggested. The equations were transformed into a dimensionless form. The system of equations is reduced to the system of linear equations with periodic coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г.Г.Кузмин*, Тр. Астрофиз. ин-та АН КазССР, 5, 11, 1965.
2. *К.Ф.Огородников*, Динамика звездных систем, Физматгиз, М., 1958.
3. *J.Binney*, *S.Tremaine*, Galactic Dynamics, Princeton Univ. Press, Princeton, 1987.
4. *U. van Wijk*, Ann. Astrophys., **12**, 87, 1949.
5. *I.King*, Astron. J., **66**, 68, 1961.
6. *Г.Г.Кузмин*, Публ. Тартуск. астрон. обсерв., **34**, 10, 1963.
7. *J.J.Binney*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **183**, 501, 1978.
8. *Б.П.Кондратьев*, Письма в Астрон. ж., 7, 83, 1981.
9. *J. Som Sunder*, *R.K.Kochnar*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **221**, 553, 1987.
10. *Л.П.Осипков*, в кн. "Звездные скопления и проблема звездной эволюции", Изд. Уральск. ун-та, Свердловск, 1983, с.20.
11. *Л.П.Осипков*, в кн. "Вопросы астрофизики", Изд. Мордовск. ун-та, Саранск, 1984, с.55.
12. *Л.П.Осипков*, в кн. "Астрономо-геодезические исследования", Изд. Уральск. ун-та, Свердловск, 1983, с.9.
13. *Л.П.Осипков*, в кн. "Проблемы физики и динамики звездных систем", Изд. Ташкентск. ун-та, Ташкент, 1989, с.52.
14. *Л.П.Осипков*, Вестн. С.-Петербургск. ун-та, сер.1, вып. 3, 125, 1993.
15. *Л.П.Осипков*, Астрон. циркуляр, №1359, 7, 1985.
16. *С.Чандрасекар*, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
17. *V.I.Ferronsky*, *S.I.Denisik*, *S.V.Ferronsky*, Jacobi Dynamics, D. Reidel Publ. Co, Dordrecht, 1985.
18. *В.Д.Мак-Миллан*, Динамика твердого тела, ИЛ, М., 1951.
19. *S.Chandrasekhar*, *D.Elbert*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **155**, 435, 1972.

20. *В.А.Брумберг*, *Л.М.Генкина*, Тр. Астрофиз. ин-та АН КазССР, **35**, 8, 1981.
21. *L.R.Yangurazova*, *G.S.Bisnovatyi-Kogan*, Astrophys. Space Sci., **100**, 319, 1984.
22. *M.David*, *S.Theuns*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **240**, 957, 1989.
23. *С.А.Кутузов*, Публ. Тартуск. астрофиз. обсерв., **36**, 379, 1967.
24. *В.А.Якубович*, *В.М.Старжинский*, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими уравнениями и их приложения, Наука, М., 1972.