

УДК: 524.8:531.51

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДИЛАТОНА В СТРУННОЙ КОСМОЛОГИИ. II

А.А.СААРЯН

Поступила 29 октября 1999

Принята к печати 1 декабря 1999

В первой части работы предложен механизм фиксации поля дилатона в рамках низкоэнергетической струнной гравитации с петлевыми поправками к дилатонным функциям связи. Механизм основан на предположении, что петлевые поправки генерируют сингулярную дилатонную кинетическую функцию при некотором значении поля дилатона. Для негравитационного источника с постоянным баротропным индексом система космологических уравнений сводится к автономной динамической системе третьего порядка. Для различных значений показателя сингулярности методами качественной теории динамических систем исследовано поведение общего решения в окрестности сингулярностей дилатонной функции связи. Выявлены условия, при которых решения с постоянным дилатоном являются аттрактором для общего решения с переменным дилатоном. Рассмотрена эволюция моделей, построены соответствующие фазовые картины и исследован вопрос эффективности фиксации дилатона.

1. *Введение.* Проблема стабилизации модулей вообще и поля дилатона, в частности, является одной из основных в струнной феноменологии [1,2]. К настоящему времени предложены различные механизмы такой стабилизации, наиболее популярными из которых являются различные схемы генерации нарушающих суперсимметрию потенциалов и механизм Демура-Полякова. В основе последнего лежит предположение о том, что петлевые поправки к дилатонным функциям связи с другими полями генерируют немонотонные функции, в точках экстремума которых происходит фиксация дилатона в результате космологического расширения [3]. Такая фиксация особенно эффективна, если Вселенная в начале своей эволюции прошла через фазу ускоренного расширения (инфляция) [4]. Вариации дилатона в конце такой фазы настолько малы, что дальнейшая эволюция фактически не отличается от моделей стандартной космологии, соответствующих постоянному значению дилатона.

В первой части данной работы [5] предложен новый возможный механизм фиксации дилатона. Как и в варианте Демура-Полякова здесь основную роль играют петлевые поправки к дилатонным функциям связи. Однако стабилизация дилатона происходит не в точках экстремума функции связи, а в сингулярных точках кинетической функции дилатона. Возможность генерации последних петлевыми поправками является основным предположением предложенного механизма. В [5] было показано, что

существует класс однородных и изотропных космологических моделей с постоянным дилатоном, соответствующим точкам сингулярности кинетической функции.

Систему уравнений струнной эффективной гравитации, описывающей однородные и изотропные космологические модели, можно записать в виде следующей автономной динамической системы третьего порядка [5]:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= f(\varphi)x, \\ \frac{dx}{d\tau} &= [n(n-1) - x^2][f(\varphi)\alpha(\varphi)/2 - bhx], \\ \frac{dh}{d\tau} &= (1-h^2)[(n-1)(nb-1) - bx^2], \quad b = \frac{1-a}{2(n-1)} \end{aligned} \quad (1)$$

относительно набора переменных (φ, x, h) . Здесь φ - поле дилатона, n - размерность пространства, $a = p/\varepsilon$ - баротропный индекс дополнительного источника с эффективным давлением p и плотностью энергии ε ,

$$d\tau = \sqrt{H^2 + k} dt_c, \quad h = \frac{H}{\sqrt{H^2 + k}}, \quad H = \frac{d \ln R}{dt_c}, \quad (2)$$

$k = 0, 1, -1$ для моделей с плоским пространством, с пространством положительной и отрицательной кривизны, соответственно, t_c - конформная временная координата. Плотность энергии выражается через решения системы (1) с помощью соотношения

$$R^2 \varepsilon = (H^2 + k)[n(n-1) - x^2]. \quad (3)$$

Функция $f(\varphi)$ связана с кинетической функцией дилатона соотношением $f(\varphi) = 1/\sqrt{-4F_\varphi(\varphi)}$ (см. [5]). В сингулярных точках кинетической функции имеем $f(\varphi) = 0$ и из (1) получаем динамическую систему второго порядка относительно переменных (x, h) , описывающую модели с постоянным дилатоном. Эти модели исследовались в первой части.

В данной работе исследовано поведение моделей с переменным дилатоном в окрестности сингулярностей дилатонной кинетической функции. Рассмотрен вопрос о возможности стабилизации дилатона в этих точках, а также эффективность такой стабилизации. Во втором разделе проведен качественный анализ пространственно-плоских космологических моделей для различных случаев поведения кинетической функции вблизи точки сингулярности. Общий случай искривленных моделей с дополнительным баротропным источником рассмотрен в следующей части работы.

2. Пространственно-плоские модели. Рассмотрим модели с переменным дилатоном и их поведение в окрестности сингулярных точек дилатонной кинетической функции. Соответствующие решения с постоянным дилатоном исследовались в [5]. В общем случае фазовое пространство динамической системы, описывающей космологические решения, является

трехмерным. Однако для пространственно-плоских моделей $h = h_0 = \pm 1$, и задача сводится к анализу фазовой картины следующей автономной системы второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= f(\varphi)x, \\ \frac{dx}{d\tau} &= [n(n-1) - x^2][f(\varphi)\alpha(\varphi)/2 - bh_0 x], \end{aligned} \quad (4)$$

где $h_0 = 1(-1)$ соответствует моделям расширения (сжатия) и $\tau = h_0 \ln R$. Фазовые картины для моделей расширения и сжатия связаны преобразованием

$$\tau \rightarrow -\tau, \quad x \rightarrow -x. \quad (5)$$

Характер всех возможных особых точек системы (4), отличных от нулей функции $f(\varphi)$, исследовался в нашей предыдущей работе [8]. Поэтому здесь мы рассмотрим лишь особые точки с $\varphi = \varphi_0$, где $f(\varphi_0) = 0$. Это точки плоскости (φ, x) с координатами

$$(\varphi_0, \pm \sqrt{n(n-1)}) \quad (6)$$

$$(\varphi_0, 0), \quad (7)$$

где (6) описывает чисто грави-дилатонные модели. Для определенности сначала будем рассматривать область $\varphi \leq \varphi_0$. Пусть в окрестности $\varphi = \varphi_0$ функция $f(\varphi)$ имеет вид

$$f(\varphi) = f_1(\varphi_0 - \varphi)^\beta, \quad f_1, \beta > 0. \quad (8)$$

Соответствующее поведение дилатонной кинетической функции в струнном представлении дается выражением

$$\tilde{F} = (\varphi_0 - \varphi)^{-2\beta}, \quad \varphi \rightarrow \varphi_0. \quad (9)$$

В окрестности точки (6) уравнение фазовых траекторий динамической системы (4), $x = x(\varphi)$, и функция $\varphi = \varphi(\tau)$ имеют вид

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{n(n-1)} + \text{const} \cdot \exp \left[\pm \frac{\alpha_0}{f_1(\beta-1)} (\varphi_0 - \varphi)^{1-\beta} \right], \\ \varphi &= \varphi_0 - \left[\pm (\beta-1) f_1 \sqrt{n(n-1)} (\tau - \tau_0) \right]^{1/(1-\beta)} \end{aligned} \quad (10)$$

при $\beta \neq 1$ и

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{n(n-1)} + \text{const} \cdot (\varphi_0 - \varphi)^{\alpha_0/f_1}, \\ \varphi &= \varphi_0 - \text{const} \cdot \exp \left[\pm f_1 \sqrt{n(n-1)} \tau \right] \end{aligned} \quad (11)$$

при $\beta = 1$ и введено обозначение

$$\alpha_0 = 2b \sqrt{n(n-1)}. \quad (12)$$

Сепаратрисами точек (6) являются чисто грави-дилатонные решения и решения с постоянным дилатоном, $\varphi = \varphi_0$, рассмотренные в разделе 3 первой части работы. Для класса решений с $\varphi < \varphi_0$ точка $(\varphi_0 \sqrt{n(n-1)})$ неустойчива

и имеет седловой характер. Точка же $(\varphi_0, -\sqrt{n(n-1)})$ является неустойчивым узлом (см. рис.1(а,б), на этих рисунках предварительно проведено отображение фазового пространства (φ, x) , $\varphi \leq \varphi_0$, $|x| \leq \sqrt{n(n-1)}$ на прямоугольную область (19) согласно (20)). При $\beta \geq 1$ все траектории в окрестности этой точки выходят из нее, касаясь решения $\varphi = \varphi_0$. При $\beta < 1$ из точки $(\varphi_0, -\sqrt{n(n-1)})$ выходят только две траектории: $\varphi = \varphi_0$ и $x = -\sqrt{n(n-1)}$. В ее окрестности все остальные траектории разветвляются из точек с $\varphi = \varphi_0$, $x \neq \sqrt{n(n-1)}$ в некоторый конечный момент синхронной в E -представлении временной координаты, причем в этот момент конечным является также масштабный фактор. Нетрудно видеть, что при $\beta < 1$ такое поведение в окрестности решения $\varphi = \varphi_0$ характерно и для других точек (см., например, рис.1 (с-е)). Действительно, решение системы (4) и соответствующее уравнение фазовых траекторий в окрестности точки $(\varphi_0, x = x_0)$ имеют вид

$$x = x_0 + bh_0 \frac{n(n-1) - x_0^2}{f_1(1-\beta)} (\varphi_0 - \varphi)^{1-\beta},$$

$$\varphi = \varphi_0 - [(\beta - 1) f_1 x_0 (\tau - \tau_0)]^{1/(1-\beta)} \quad (13)$$

при $\beta \neq 1$ и

$$x = x_0 + \frac{bh_0}{f_1} [n(n-1) - x_0^2] \ln|\varphi_0 - \varphi|,$$

$$\varphi = \varphi_0 - \text{const} \cdot \exp(f_1 x_0 \tau) \quad (14)$$

при $\beta = 1$. Здесь выбором постоянной интегрирования мы выделили решение, соответствующее траектории с $\varphi = \varphi_0$, $x = x_0$ при $\tau = \tau_0$ причем $\tau < \tau_0$ ($> \tau_0$) при $x_0 > 0$ (< 0).

Таким образом, при $\beta < 1$ в окрестности решения $\varphi = \varphi_0$ фазовые траектории, описывающие модели с переменным дилатоном, касаются этого решения в некоторый конечный момент времени, при конечном значении масштабного фактора. При $x > 0$ решение $\varphi = \varphi_0$ является устойчивым в классе моделей с $\varphi \leq \varphi_0$, а при $x < 0$ - неустойчивым.

Для исследования характера точки (8) удобно сначала рассматривать случай рациональных β , $\beta = m/p$, где m и p целые числа. Предельным переходом нетрудно убедиться, что результаты проведенного качественного анализа остаются в силе и для иррациональных β . Введем новую переменную

$$u = (\varphi - \varphi_0)^{1/p} \quad (15)$$

в окрестности $\varphi = \varphi_0$, систему (4) можно записать в виде

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{f_1}{p} x u^{m-p+1},$$

$$\frac{dx}{d\tau} = [n(n-1) - x^2] [f_1 \alpha(\varphi_0) u^m / 2 - bh_0 x]. \quad (16)$$

При $m \geq p-1$ правые части этой системы аналитичны, и она может быть исследована стандартными методами (см., например, [9,10]). Следует различать следующие случаи:

2.1 $\beta \geq 1$. Для системы (16) $m \geq p$, и особая точка ($u=0, x=0$) является вырожденной. Анализ с учетом нелинейных членов показывает, что точка имеет характер узла, устойчивого при $\alpha(\varphi_0) > 0$ ($h_0=1$) и седла при $\alpha(\varphi_0) < 0$. В первом случае в окрестности особой точки все траектории с $\varphi < \varphi_0$ входят в эту точку, касаясь решения

$$x = \frac{f_1 \alpha(\varphi_0)}{2bh_0} (\varphi_0 - \varphi)^\beta, \quad \varphi \rightarrow \varphi_0, \quad (17)$$

и имеют асимптотику

$$\varphi = \varphi_0 - \left[(2\beta - 1) f_1^2 \alpha(\varphi_0) \tau / 2bh_0 \right]^{1/(1-2\beta)}, \quad \tau = \ln R \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Соответствующая фазовая картина изображена на рис.1а для функции $\alpha(\varphi)/4b\sqrt{n}$, представленной графиком (а) рис.1f. Фазовое пространство (φ, x) , $\varphi \leq \varphi_0$, $|x| \leq \sqrt{n(n-1)}$ динамической системы (4), соответствующей моделям с неотрицательной плотностью энергии, отображено на прямоугольную область

$$\{0 \leq y \leq y_0, |x| \leq \sqrt{n(n-1)}\}, \quad (19)$$

согласно

$$e^\varphi = \frac{y}{1-y}, \quad (20)$$

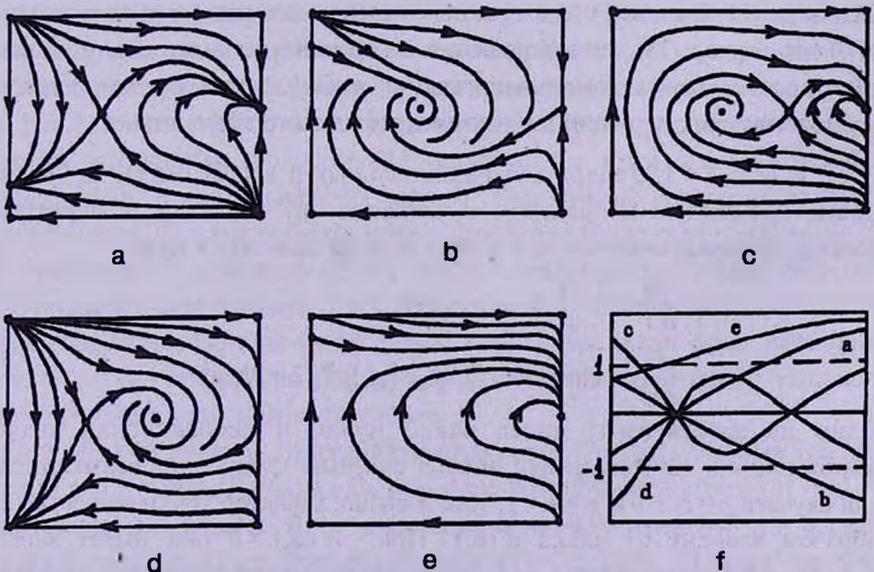


Рис.1. Фазовые картины пространственно плоских моделей с $\varphi \leq \varphi_0$ в случае сингулярной кинетической функции дилатона, описываемые системой (4) и отображенные на прямоугольник (19). На последней диаграмме f приведены графики функций $\alpha(\varphi)/4b\sqrt{n}$, соответствующих картинам (а-е).

а y_0 соответствующее φ_0 значение. Ноль функции $\alpha(\varphi)$ является особой точкой. Картина фазовых траекторий в окрестности точек, отличных от (6) и (7), построена на основе результатов [8]. В частности, ноль функция $\alpha(\varphi)$ является седлом, поскольку производная $\alpha'(\varphi)$ положительна в этой точке. Из фазовой диаграммы следует, что решения, фазовые траектории которых лежат выше устойчивых сепаратрис седла ($\varphi = \varphi_1$, $x = 0$), $\alpha(\varphi_1) = 0$, в ходе космологической эволюции стремятся к решениям с постоянным дилатоном $\varphi = \varphi_0$, представленным точкой (7). Траектории же, лежащие ниже указанных сепаратрис, уходят в область слабой связи ($\varphi \rightarrow -\infty$) с асимптотикой $x = \sqrt{n-1}\alpha(-\infty)/4b$, где мы воспользовались выражением дилатонных функций связи при $\varphi \rightarrow -\infty$, приводящих к $f(-\infty) = \sqrt{n-1}/2$. Соответствующие асимптотические выражения для этих решений, а также значение величины $\alpha(-\infty)$ для различных источников, приведены в [8].

При $\alpha(\varphi_0) < 0$ точка (7) является седлом с неустойчивой сепаратрисой (17). Соответствующая фазовая диаграмма приведена на рис. 1b на примере функции $\alpha(\varphi)/4b\sqrt{n}$, зависимость от y которой соответствует графику (b) рис. 1f. Теперь в нуле-функции $\alpha(\varphi)$ производная $\alpha'(\varphi)$ отрицательна, и эта точка является устойчивым фокусом или узлом (см. [8], здесь мы рассматриваем случай фокуса). Все траектории с переменным дилатоном заканчивают свою эволюцию в этой точке, соответствующей решениям ОТО. Происходит эффективная стабилизация дилатона в ходе космологической эволюции. Это соответствует механизму Демура-Полякова [3]. Заметим, что в отличие от степенного закона (относительно $\tau = \ln R$) для случая (18), теперь решения с переменным дилатоном стремятся к решению с $\varphi = \text{const}$ по экспоненциальному закону. Таким образом, подавление космологических вариаций в данном случае намного эффективнее.

2.2 $1/2 < \beta < 1$. Теперь для рациональных β в (16) имеем $m < p$. Введя новую временную координату τ' , согласно $d\tau' = u^{m-p+1}d\tau$, в окрестности особой точки динамическую систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau'} &= -\frac{f_1}{p}x, \\ \frac{dx}{d\tau'} &= n(n-1)u^{p-m-1} \left[f_1 \alpha(\varphi_0) u^m / 2 - bh_0 x \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Одно из собственных чисел равно нулю, и особая точка является вырожденной. Качественный анализ системы следует провести отдельно для случаев $p = m + 1$ и $p > m + 1$. Как и выше, характер точки существенным образом зависит от знака $\alpha(\varphi_0)$. При $\alpha(\varphi_0) > 0$ она имеет характер устойчивого узла при $h_0 = 1$. Соответствующая фазовая диаграмма, отображенная на прямоугольник (19), изображена рис. 1c на примере функции $\alpha(\varphi)/4b\sqrt{n}$ с графиком (c) рис. 1f. Вертикальные отрезки $y = y_0$ ($\varphi = \varphi_0$) соответствуют решениям с постоянным дилатоном, рассмотренным в первой

части данной работы. В окрестности точки (7) (точка $(y=y_0, x=0)$ на диаграмме) существуют два класса решений, разделенных сепаратрисой

$$x = \frac{nh_0(1-a)}{2f_1(1-\beta)}(\varphi_0 - \varphi)^{1-\beta}, \quad \varphi \rightarrow \varphi_0 \quad (22)$$

с асимптотикой

$$\varphi = \varphi_0 + \text{const} \cdot \exp\left[\frac{n(1-a)}{2(\beta-1)}h_0\tau\right], \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Траектории первого класса расположены ниже траектории, описываемой (22), и при $\tau \rightarrow \infty$ входят в особую точку $(\varphi_0, 0)$, касаясь решения (17). Их асимптотическое поведение имеет вид (18), и подавление вариаций дилатона происходит по степенному закону относительно τ . Для особого же решения, представленного сепаратрисой (22), затухание вариаций происходит намного эффективнее, по экспоненциальному закону. При этом эффективность затухания зависит от баротропного индекса негравитационного источника и наиболее эффективна для источника с $a=-1$.

Траектории второго класса расположены выше сепаратрисы (22). В конечный момент времени, соответствующий конечному значению масштабного фактора, они касаются решения $\varphi=\varphi_0, x>0$ и сливаются с ним. В частности, отсюда следует, что решение $\varphi=\varphi_0, x>0$ является устойчивым в классе моделей с $\varphi \leq \varphi_0$. Решение же $\varphi=\varphi_0, x<0$ неустойчиво. В окрестности этой сепаратрисы траектории с переменным дилатоном в конечный момент времени разветвляются из этого решения в касательном направлении. Для функции $\alpha(\varphi)$, соответствующей фазовой картине рис.1с, кроме точки (7) существуют еще две особые точки с $x=0$, представляющие решения с постоянным дилатоном и соответствующие нулям функции $\alpha(\varphi)$ (см. рис.1с). Для левого нуля производная $\alpha'(\varphi)$ отрицательна, и она является устойчивым фокусом. Для правого же нуля эта производная положительна, и точка является седлом. Устойчивые сепаратрисы этого седла разделяют фазовое пространство на две качественно различные области. Для траекторий, лежащих между этими сепаратрисами, стабилизация функции дилатона происходит в устойчивом нуле функции $\alpha(\varphi)$ по механизму Демура-Полякова. Остальные же траектории заканчивают свою эволюцию в точке $(\varphi=\varphi_0, x=0)$. Для них фиксация дилатона происходит согласно схеме, предложенной в данной работе.

При $\alpha(\varphi_0)<0$ точка $(\varphi_0,0)$ имеет характер седла. Соответствующая фазовая картина для функции $\alpha(\varphi)/4b\sqrt{n}$, график которой имеет вид (d) рис.1f, представлена на рис.1d. В ее окрестности теперь имеются три класса решений, разделенных сепаратрисами (17) и (22). Первая из них расположена выше сепаратрисы (22) и имеет тот же качественный характер, что и в случае $\alpha(\varphi_0)>0$. Траектории второго класса расположены между сепаратрисами (17) и (22). Они после максимального приближения к особой

точке, соответствующей точке пересечения с осью φ (точке с $x=0$), отталкиваются от нее и стремятся к решению, описываемому (17) и (18). Для рассмотренного примера функции $\alpha(\varphi)$ в ходе дальнейшей эволюции происходит стабилизация дилатона согласно сценарию Демура-Полякова, и решения стремятся к решениям ОТО. Траектории третьего класса расположены ниже траектории (17). Они в некоторый конечный момент времени разветвляются от решения $\varphi = \varphi_0$, $x < 0$ и асимптотически стремятся к (17). Для части этих решений дилатон фиксируется в устойчивом нуле функции $\alpha(\varphi)$, другие же уходят в область слабой связи, $\varphi \rightarrow -\infty$, в ходе эволюции.

2.3 $\beta = 1/2$. Особая точка ($u=0$, $x=0$) динамической системы (16) является невырожденной. Собственные числа определяются соотношениями

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}n(1-a) \left[-h_0 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2f_1}{\alpha_0}\right)^2 \alpha(\varphi_0)} \right], \quad (24)$$

и следует различать следующие случаи:

(а) При $0 < \alpha(\varphi_0) < \alpha_0^2/4f_1^2$ для моделей расширения ($h_0=1$) собственные числа действительны и отрицательны и особая точка имеет характер устойчивого узла. В ее окрестности существуют два класса решений. Решения, расположенные ниже траектории с асимптотикой

$$x = -\frac{2\lambda_2}{f_1} \sqrt{\varphi_0 - \varphi}, \quad \varphi = \varphi_0 - \text{const} \cdot \exp(2\lambda_2\tau), \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (25)$$

входят в особую точку при $\tau \rightarrow \infty$, касаясь траектории с асимптотикой

$$x = -\frac{2\lambda_1}{f_1} \sqrt{\varphi_0 - \varphi}, \quad \varphi = \varphi_0 - \text{const} \cdot \exp(2\lambda_1\tau), \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Траектории, расположенные выше (25), в некоторый конечный момент времени сливаются с решением $\varphi = \varphi_0$, $x > 0$, касаясь этого решения. В окрестности точки слияния (φ_0, x_0) решение имеет вид (13). Решение же $\varphi = \varphi_0$, $x < 0$, неустойчиво. В его окрестности решения с переменным дилатонem удаляются от него, касаясь в некоторый начальный момент времени. Качественная картина фазовых траекторий в окрестности точки $(\varphi_0, 0)$, та же, что и в случае $\alpha(\varphi_0) > 0$ предыдущего пункта и изображена на рис.1с.

(б) При $\alpha(\varphi_0) < 0$ собственные числа (24) имеют разные знаки и точка является седлом. В ее окрестности имеются три класса решений, разделенных сепаратрисами (25) и (26). Как и в пункте (а), траектории, расположенные выше (25), при некотором конечном значении масштабного фактора сливаются с решением $\varphi = \varphi_0$, $x > 0$. Траектории, расположенные между сепаратрисами (25) и (26), после максимального приближения к особой точке при $x=0$ отталкиваются от нее и стремятся к решению (26). Эти

решения являются также асимптотикой для траекторий с переменным дилатоном, разветвляющихся от решения $\varphi = \varphi_0$, $x < 0$ при конечном значении масштабного фактора. Поведение фазовых траекторий в окрестности точки $(\varphi_0, 0)$ качественно эквивалентно картине, приведенной на рис.1d.

(с) При $\alpha(\varphi_0) > \alpha_0^2/4 f_1^2$ собственные числа являются комплексно-сопряженными. В окрестности особой точки все траектории с переменным дилатоном разветвляются от решения $\varphi = \varphi_0$, $x < 0$ при некотором значении масштабного фактора и сливаются с решением $\varphi = \varphi_0$, $x > 0$ при другом значении. Соответствующая этому случаю фазовая диаграмма изображена на рис.1 е на примере функции $\alpha(\varphi)/4 b \sqrt{n}$, график которой на рис.1f отмечен буквой (е). В окрестности точки $(\varphi_0, 0)$ поведение поля дилатона в зависимости от масштабного фактора определяется соотношением

$$\varphi = \varphi_0 - \text{const} \cdot R^{n(n-1)/2} \sin^2[\omega \ln(R/R_0)], \quad 1 \leq R/R_0 \leq e^{\pi/\omega}, \quad (27)$$

где введено обозначение

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{n(n-1)} \sqrt{n(n-1)b^2 - f_1^2 \alpha(\varphi_0)}, \quad (28)$$

а R_0 - постоянная интегрирования, определяющая значение масштабного фактора в точке разветвления от решения $\varphi = \varphi_0$, $x < 0$. В этом случае в точке слияния с решением $\varphi = \varphi_0$, $x > 0$ значение масштабного фактора равно $R_0 e^{\pi/\omega}$.

2.4. $0 < \beta < 1/2$. В окрестности особой точки характер фазовой картины описывается системой (21), где теперь $p - m > 1$. Одно из собственных чисел равно нулю, и точка является вырожденной. Соответствующий анализ показывает, что качественный характер фазовой картины в окрестности особой точки тот же, что и в случае (с) при $\alpha(\varphi_0) > 0$ и в случае (b) при $\alpha(\varphi_0) < 0$ предыдущего пункта. Во втором случае сепаратрисами седла являются траектории

$$x = \pm \sqrt{n(n-1) \alpha(\varphi_0) (\varphi - \varphi_0)}, \quad \varphi \rightarrow \varphi_0 \quad (29)$$

с асимптотическим поведением

$$\varphi = \varphi_0 - \left[\mp f_1 \sqrt{-n(n-1) \alpha(\varphi_0)} (\tau - \tau_0) \right]^{2/1-2\beta}. \quad (30)$$

Как видим, в отличие от предыдущего случая точке $(\varphi = \varphi_0, x = 0)$ теперь соответствует конечное значение масштабного фактора.

Выше мы рассмотрели качественное поведение космологических моделей в области значений дилатона $\varphi \leq \varphi_0$, где φ_0 - точка сингулярности дилатонной кинетической функции. Соответствующие фазовые диаграммы для $\varphi \geq \varphi_0$ можно получить из исследованных выше с учетом инвариантности динамической системы относительно преобразований

$$\varphi \rightarrow -\varphi, \quad x \rightarrow -x, \quad \alpha(\varphi) \rightarrow -\alpha(-\varphi), \quad f(\varphi) \rightarrow f(-\varphi). \quad (31)$$

Как было показано выше, в случае функции $f(\varphi)$, поведение которой в окрестности $\varphi = \varphi_0$ имеет вид (8) с $\beta < 1$, существуют решения, в конечный момент времени достигающие решения с постоянным дилатоном $\varphi = \varphi_0$. В этой точке конечно также значение масштабного фактора. Возникает естественный вопрос: какова дальнейшая эволюция этих моделей? Ответ на этот вопрос зависит от поведения функций $f(\varphi)$ и $\alpha(\varphi)$ при $\varphi > \varphi_0$. Исследуем сначала случай, когда функция $\alpha(\varphi)$ непрерывна в точке $\varphi = \varphi_0$, а функция $f(\varphi)$ в окрестности этой точки имеет вид

$$f(\varphi) = f_1 |\varphi - \varphi_0|^\beta, \quad \varphi \rightarrow \varphi_0, \quad \beta > 0. \quad (32)$$

Поскольку при $\beta \geq 1$, траектории с $\varphi < \varphi_0$ и $\varphi > \varphi_0$ составляют инвариантные подмножества и не переходят из одной области в другую, мы рассмотрим лишь значения $\beta < 1$. Пусть сначала $\alpha(\varphi_0) > 0$. Качественная картина фазовых траекторий в окрестности $\varphi \leq \varphi_0$ имеет вид, изображенный на рис.1с или е в зависимости от значений β . Для получения картины фазовых траекторий при $\varphi > \varphi_0$ заметим, что, согласно (31), она эквивалентна картине с $\varphi < \varphi_0$, $\alpha(\varphi_0) < 0$ с заменой $x \rightarrow -x$, т.е. получается из диаграммы рис.1d преобразованием $x \rightarrow -x$. В результате в окрестности $\varphi = \varphi_0$ получаем фазовую картину, изображенную на рис.2а, где для определенности рассмотрен случай $1/2 \leq \beta < 1$. Соответствующая диаграмма при $0 < \beta < 1/2$ отличается лишь тем, что теперь картина при $\varphi < \varphi_0$, $\varphi \rightarrow \varphi_0$ эквивалентна изображенной на рис.1е. Мы привели фазовую картину в окрестности точки $\varphi = \varphi_0$. Поведение траекторий в других особых точках, а также на бесконечности $\varphi \rightarrow +\infty$ исследовалось в работе [8] и поэтому здесь на этом останавливаться не будем. Как видно из изображенной диаграммы, в точках с $\varphi = \varphi_0$ имеются два решения: решение $\varphi = \varphi_0$ с постоянным дилатоном (вертикальные отрезки) и решения с переменным дилатоном, которые в конечный момент времени переходят из области $\varphi < \varphi_0$ в область $\varphi > \varphi_0$ при $x > 0$ и из области $\varphi > \varphi_0$ в область $\varphi < \varphi_0$ при $x < 0$. Это является следствием того, что правая часть динамической системы (1) не является

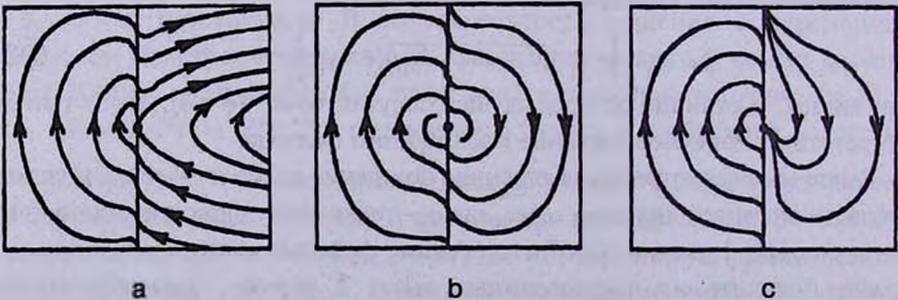


Рис. 2. Примеры фазовых диаграмм пространственно-плоских моделей в окрестности сингулярной точки $\varphi = \varphi_0$ при $\beta < 1$. а) $\beta \geq 1/2$, $\alpha(\varphi_0) > 0$; б) $0 < \beta < 1/2$, $\alpha(\varphi_0^-) > 0$, $\alpha(\varphi_0^+) < 0$; в) $0 < \beta < 1/2$ при $\varphi < \varphi_0$, $\beta \geq 1$ при $\varphi > \varphi_0$, $\alpha(\varphi_0^-) > 0$; $\alpha(\varphi_0^+) < 0$.

аналитической в точке $\varphi = \varphi_0$, и условия теоремы о единственности решений не выполнены. Для этих решений значения функций и их первых производных совпадают в общей точке $\varphi = \varphi_0$, высшие же производные отличаются.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $\alpha(\varphi)$ имеет разрыв в точке $\varphi = \varphi_0$, причем $\alpha(\varphi_0^-) > 0$ и $\alpha(\varphi_0^+) < 0$. Из проведенного выше анализа и инвариантности динамической системы относительно (31) следует, что картина траекторий имеет вид, изображенный на рис.2b для случая $0 < \beta < 1/2$ или $\beta = 1/2$, $|\alpha(\varphi_0 \pm)| > n(n-1)b^2/h^2$, когда особая точка имеет характер устойчивого фокуса. Аналогичным образом можно построить картины для других комбинаций параметров.

Рассмотрим также случай, когда показатель степени β в (32) является различным для областей $\varphi < \varphi_0$ и $\varphi > \varphi_0$. Соответствующие фазовые картины получаются различными комбинированиями рис.1a, b, с одной стороны, и рис.1c-e, с другой. В качестве примера на рис.2c изображен случай, когда $0 < \beta < 1/2$, $\alpha(\varphi_0^-) > 0$ при $\varphi < \varphi_0$ и $\beta \geq 1$, $\alpha(\varphi_0^+) < 0$ при $\varphi > \varphi_0$. Решения с переменным дилатоном в области $\varphi < \varphi_0$ разветвляются от решения $\varphi = \varphi_0$, $x < 0$ в некоторый конечный момент времени и сливаются с решением $\varphi = \varphi_0$, $x > 0$ в другой конечный момент времени. Эти решения не могут перейти в область $\varphi > \varphi_0$, и в ходе дальнейшей эволюции дилатон остается постоянным. Таким образом, имеем решения с начальной и конечной стадиями постоянного дилатона и промежуточной стадией с переменным дилатоном. Однако заметим, что решение $\varphi = \varphi_0$, $x > 0$ неустойчиво: сколь угодно малое возмущение с $\varphi - \varphi_0 > 0$ переводит это решение в решение с переменным дилатоном, которое удаляется от отрезка $\varphi = \varphi_0$, $x > 0$.

Модели с искривленным пространством будут рассмотрены в следующей нашей работе.

Ереванский государственный университет, Армения

ON DILATON STABILIZATION IN STRING COSMOLOGY. II

A.A.SAHARIAN

In the first part of the present paper a mechanism for dilaton stabilization have been proposed within the framework of low-energy string gravity with higher-loop corrections. The mechanism is based on the assumption that loop corrections generate singular dilaton kinetic function for some finite value of dilaton field. For a nongravitational source with constant barotropic index the set of

cosmological equations are presented in the form of third order autonomous dynamical system. For various values of singularity parameter the behaviour of general solution is investigated near singular point by using qualitative methods. The conditions are specified under which the solutions with constant dilaton are attractors for general solution. The evolution of both spatially-flat and curved models is considered and corresponding phase diagrams are plotted. The efficiency of dilaton stabilization by proposed mechanism is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *T.Banks, M.Berkooz, P.J.Steinhardt*, Phys. Rev., **D52**, 705, 1995.
2. *T.Banks, M.Berkooz, S.H.Shenker, G.Moore, P.J.Steinhardt*, Phys. Rev., **D52**, 3452, 1995.
3. *T.Damour, A.M.Polyakov*, Nucl. Phys., **B423**, 532, 1994.
4. *T.Damour, A.Vilenkin*, Phys. Rev., **D53**, 2981, 1996.
5. А.А.Саарян, *Астрофизика* **43**, 123, 2000.
6. А.А.Saharian, *Class. Quantum Grav.*, **15**, 1951, 1998.
7. А.А.Саарян, *Астрофизика*, **42**, 117, 295, 1999.
8. А.А.Saharian, *Class. Quantum Grav.*, **16**, 2057, 1999.
9. *Н.Н.Баутин, Е.А.Леонтович*, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*, Наука, М., 1976.
10. *О.И.Богоявленский*, *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике*. Наука, М., 1980.