АСТРОФИЗИКА

ТОМ 43 ФЕВРАЛЬ, 2000 ВЫПУСК 1

УДК: 52-64

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ РАССЕЯНИИ В ДОПЛЕРОВСКОМ ЯДРЕ ЛИНИИ

С.И.ГРАЧЕВ

Поступила 28 июня 1999
Принята к печати 15 октября 1999

В первой из серии статей Иванова и др. было показано, что модельная задача о переносе поляризованного излучения в результате резонансного рассеяния на двухуровенных атомах в однородной плоской атмосфере при отсутствии ЛТР сводится в приближении полного перераспределения по частоте к решению матричного интегрального уравнения типа Винера-Хопфа для матричной (2x2) функции источников $S(\tau)$. Во второй работе этой серии, посвященной векторной проблеме Милна, найдены полные асимптотические разложения матрицы $I(z)$ (которая является по-существу преобразованием Лапласа матрицы $S(\tau)$) для случая доплеровского профиля коэффициента поглощения, и коэффициенты асимптотических разложений $S(\tau)$ $(\tau >> 1)$ выражены через коэффициенты разложений $I(z)$. Мы показываем, что асимптотические разложения $S(\tau)$ можно найти непосредственно из матричного интегрального уравнения типа Винера-Хопфа для $S(\tau)$. Мы даем новые рекуррентные соотношения для коэффициентов этих разложений, а также новый вывод асимптотических разложений матрицы I, включая ее второй столбец, который рассматривался в работе Иванова и др. лишь кратко.

1. *Введение.* В первой из серии статей Иванова и др. [1] сформулирована стандартная задача о многократном резонансном рассеянии в полубесконечной атмосфере с равномерно распределенными источниками частично поляризованного излучения в линии в предположении о полном перераспределении по частоте (ППЧ) при доплеровском профиле коэффициента поглощения. Во второй статье серии [2] сделано обобщение хорошо известной скалярной асимптотической теории образования линий в чисто рассеивающих атмосферах при ППЧ [3-6] на матричный случай. Для случая консервативного рассеяния были найдены полные асимптотические разложения матричной функции $S(\tau)$ и матрицы $I(z)$ (которая определяется через преобразование Лапласа $S(\tau)$). В качестве отправного пункта использовалось линейное интегральное уравнение для матрицы I. Вывод этих разложений (принадлежащий В.В.Иванову) дан (в целях экономии места) только для первых столбцов матриц и в основе его - асимптотическое разложение дисперсионной матрицы, найденное в первой статье серии.

В настоящей статье мы даем совершенно новый метод получения полных асимптотических разложений матрицы S прямо из исходного матричного уравнения Винера-Хопфа. Мы приводим также альтернативный вывод асимптотических разложений матрицы I. Рассматривается как консервативное $\left(\lambda_1 = 1,\ \lambda_Q < 1\right)$, так и биконсервативное (в пределе $\lambda_1 = 1,\ \lambda_Q \to 1$) а также и неконсервативное $\left(\lambda_1 < 1,\ \lambda_Q < 1\right)$ рассеяния. В разделе 2 приведены исходные интегральные уравнения и асимптотические разложения некоторых ядерных функций. В разделах 3 и 4 даны выводы асимптотических разложений матриц S и I соответственно. Основные результаты суммированы в разделе 5.

2. *Основные уравнения.* В [1] было показано, что в рамках приближения ППЧ матричная (2х2) функция источников $S(\tau)$ в стандартной двухуровенной задаче о переносе поляризованного излучения в линии в полубесконечной среде с равномерно распределенными первичными источниками частично поляризованного излучения удовлетворяет матричному интегральному уравнению типа Винера-Хопфа

$$S(\tau) = \int_0^\infty K_1(\tau - \tau') S(\tau') d\tau' + \varepsilon^{1/2}, \tag{1}$$

где ядерная матрица $K_1(\tau)$ представима в виде непрерывной суперпозиции экспонент:

$$K_1(\tau) = \int_0^\infty e^{-|\tau|/z} G(z) dz/z. \tag{2}$$

Ее нормировка такова, что

$$\int_{-\infty}^\infty K_1(\tau) d\tau = 2\int_0^\infty G(z) dz = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_Q\right). \tag{3}$$

Здесь $\lambda_1 \equiv 1 - \varepsilon_I$ - обычное альбедо однократного рассеяния, а $\lambda_Q \equiv 1 - \varepsilon_Q$ - эквивалент альбедо однократного рассеяния для параметра Стокса Q, ε_I и ε_Q - соответствующие вероятности гибели. Параметр λ_Q выражается через λ_1 и параметр деполяризации W:

$$\lambda_Q = \frac{7}{10} W \lambda_1. \tag{4}$$

Значение $W = 1$ соответствует дипольному рассеянию (нет деполяризации) и $W = 0$ дает деполяризованное изотропное рассеяние.

Явные выражения для матрицы $G(z)$ в общем случае произвольного профиля рассеяния в линии $\phi(x)$ в предположении о ППЧ даны в работе [1] (формулы (32)-(33)). Нам потребуется лишь асимптотическое разложение $G(z)$ при $z \to \infty$, которое приводится ниже. Источниковое слагаемое в правой части уравнения (1)

$$\varepsilon^{1/2} = \mathrm{diag}\left(\varepsilon_I^{1/2}, \varepsilon_Q^{1/2}\right). \tag{5}$$

Интегрируя по частям в правой части (1), получаем альтернативную форму этого уравнения

$$\varepsilon S(\tau) = \varepsilon^{1/2} - K_2(\tau) S(\tau) - \int_0^\tau [K_2(\tau') - K_2(\tau)] S'(\tau - \tau') d\tau' + \\ + \int_0^\infty K_2(\tau') S'(\tau + \tau') d\tau', \tag{6}$$

где так называемая вторая ядерная матрица

$$K_2(\tau) = \int_\tau^\infty K_1(\tau) d\tau \tag{7}$$

и $S'(\tau) = dS(\tau)/d\tau$. Заметим, что согласно (3) $2K_2(0) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_Q)$.

Пусть $I(z)$ - матрица Стокса выходящего излучения:

$$I(z) = \int_0^\infty S(\tau) e^{-\tau/z} d\tau/z, \ \ z \geq 0. \tag{8}$$

Матрица $I(z)$ удовлетворяет двум матричным уравнениям (см. [1]), одно из которых линейное:

$$\varepsilon I(z) = \varepsilon^{1/2} + \int_0^\infty G(z') \frac{(z+z') I(z') - 2z' I(z)}{z'^2 - z^2} z' dz', \tag{9}$$

а другое нелинейное:

$$I(z) \left[\varepsilon^{1/2} + \int_0^\infty I^T(z') G(z') \frac{z' dz'}{z+z'} \right] = E, \tag{10}$$

где "T" означает транспонирование и E - единичная матрица. Последнее из этих уравнений будет использовано для нахождения главных членов асимптотических разложений матриц S и I в биконсервативном пределе, когда линейные интегральные уравнения (1) и (9) становятся однородными, позволяя найти асимптотические разложения с точностью до численных множителей. Именно таким методом были впервые найдены асимптотики при ППЧ в скалярном случае [7,8].

Мы будем также использовать следующую альтернативную форму линейного уравнения (9):

$$\varepsilon I(z) = \varepsilon^{1/2} - W(z) I(z) + \int_0^\infty G(z') \frac{I(z') - I(z)}{z' - z} z' dz', \tag{11}$$

где

$$W(z) \equiv \int_0^\infty \frac{G(z')}{z' + z} z' dz'. \tag{12}$$

Заметим, что $W(z)$ представляет собой по существу преобразование Лапласа второй ядерной матрицы, а именно: $W(z) = (1/z) \overline{K}_2(1/z)$ (черта сверху обозначает преобразование Лапласа).

Уравнения (9), (11) и (6) являются исходными для получения асимптотических разложений матриц I и S соответственно. Что же касается ядерных матриц G и K_2, входящих в эти уравнения, то нам необходимо знать только их асимптотические разложения. Для случая доплеровского профиля $\phi(x)=\pi^{-1/2}\exp\left(-x^2\right)$ эти разложения можно найти, например, в [1] (см. также [9]):

$$K_2(\tau)\sim\frac{1}{4\tau}T^{-1/2}\kappa_1\odot\sum_{n=0}^{\infty}k_nT^{-n},\ G(z)\sim\frac{1}{4z^2}Z^{-1/2}\kappa_1\odot\sum_{n=0}^{\infty}g_nZ^{-n},\tag{13}$$

где

$$T=\ln\frac{\tau}{\sqrt{\pi}},\quad Z=\ln\frac{z}{\sqrt{\pi}},\tag{14}$$

$$\kappa_1=\begin{pmatrix}\lambda_I & \sqrt{\lambda_I\lambda_Q}\\ \sqrt{\lambda_I\lambda_Q} & \lambda_Q\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{7}}\\ -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{7}} & \frac{5}{7}\end{pmatrix},\tag{15}$$

$$k_n=(2n-1)!!\sum_{i=0}^{n}2^{-i}\frac{\Gamma^{(i)}(1)}{i!(2n-2i-1)!!}g_{n-i},\tag{16}$$

$$g_n=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^{2n}}\begin{pmatrix}1 & 3\cdot2^{-n}-2\\ 3\cdot2^{-n}-2 & \frac{1}{2}\left(5-3\cdot2^{1-n}+3^{1-n}\right)\end{pmatrix},\tag{17}$$

$\Gamma^{(i)}(1)$ - i-ая производная гамма-функции Эйлера. Символ $\odot$ обозначает поэлементное перемножение матриц, так что $Z=X\odot Y$, если $z_{ij}=x_{ij}y_{ij},\quad i,j=1,2$.

Мы также используем асимптотическое разложение матрицы $W(z)$, которое имеет вид

$$W(z)\sim\frac{\sqrt{Z}}{2z}\kappa_1\odot\sum_{n=0}^{\infty}w_nZ^{-n},\quad z\to\infty,\tag{18}$$

где

$$w(n)=-(2n-3)!!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kb_k}{2^kk!(2n-2k-1)!!}g_{n-k}.\tag{19}$$

Здесь мы ввели следующее обозначение:

$$b_n=\int_0^{\infty}\frac{\ln^nx}{(x+1)^2}dx=2\left|2^{n-1}-1\right|\pi^n\left|B_n\right|,\quad n=0,1,2,\cdots\tag{20}$$

где B_n - числа Бернулли. Коэффициенты разложения (18) приведены в табл.1.

3. *Асимптотические разложения матрицы источников* $S(\tau)$. *3.1. Консервативное рассеяние:* $\lambda_I=1,\ \lambda_Q<1$. Введем следующие обозначения:

$$P\left(K_2,S\right)\equiv\int_0^{\tau}\left[K_2(\tau')-K_2(\tau)\right]S'(\tau-\tau')d\tau'+\int_0^{\infty}K_2(\tau')S'(\tau+\tau')d\tau',\tag{21}$$

Таблица 1

КОЭФФИЦИЕНТЫ ω_k^{ij} АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ $W(z)$

k	ω_k^{11}	ω_k^{12}	ω_k^{22}
0	1.000000E+00	1.000000E+00	1.000000E+00
1	2.500000E-01	-1.250000E-01	3.750000E-01
2	-4.737335E-01	-3.331085E-01	-5.310252E-01
3	3.553001E-01	-2.303844E-01	5.648512E-01
4	-2.219812E+00	-1.187571E+00	-2.651205E+00
5	3.884671E+00	-2.845546E+00	6.379722E+00
6	-3.784506E+01	-1.716281E+01	-4.661044E+01
7	1.040739E+02	-8.047507E+01	1.736252E+02
8	-1.390005E+03	-5.827530E+02	-1.734437E+03
9	5.212521E+03	-4.119859E+03	8.753853E+03
10	-8.939213E+04	-3.633101E+04	-1.120961E+05

$$J(K_2,S) \equiv -K_2(\tau)S(\tau)+P(K_2,S). \tag{22}$$

Тогда компоненты 11 и 21 матричного уравнения (6) переписываются в виде

$$0=J\left(K_2^{11},S^{11}\right)+J\left(K_2^{12},S^{21}\right), \tag{23}$$

$$\varepsilon_Q S^{21}(\tau)=J\left(K_2^{12},S^{11}\right)+J\left(K_2^{22},S^{21}\right). \tag{24}$$

Физически очевидно, что глубоко в среде поле излучения становится почти изотропным, и поляризация стремится к нулю. Таким образом, имеем $S^{21}(\tau)\to 0$, $S^{11}(\tau)\to S(\tau)$ при $\tau\to\infty$, где $S(\tau)$ - функция источников в скалярном случае. Тогда при $\tau \gg 1$ можно пренебречь вторыми слагаемыми в правых частях (23) и (24), что дает

$$J\left(K_2^{11},S^{11}\right)\sim 0, \tag{25}$$

$$S^{21}(\tau)\sim \frac{1}{\varepsilon_Q+K^{22}(\tau)}J\left(K_2^{12},S^{11}\right). \tag{26}$$

Из первого из этих уравнений получается асимптотическое разложение $S^{11}(\tau)$, а из второго - асимптотическое разложение $S^{21}(\tau)$. Асимптотическое разложение $S(\tau)$ в скалярной задаче Милна получено ранее В.В.Ивановым [3], причем коэффициенты этого разложения выражены через коэффициенты асимптотического разложения H-функции. Имеем (см. [3])

$$S(\tau)\sim \bar{s}_0\sqrt{\tau}\,T^{1/4}\sum_{l=0}^{\infty}s_l T^{-l}, \tag{27}$$

где $\bar{s}_0=4/\pi$, $s_0=1$. Дифференцируя (27), получаем

$$S'(\tau)\sim \frac{\bar{s}_0}{2}\tau^{-1/2}\,T^{1/4}\sum_{l=0}^{\infty}r_l T^{-l}, \tag{28}$$

где

$$r_0 = s_0 = 1, \ \ r_l = s_l - \left(2l - 5/2\right) s_{l-1}, \ \ l = 1,2,3,\cdots \tag{29}$$

Асимптотическое разложение (13) для любого элемента второй ядерной матрицы можно переписать в виде

$$K_2(\tau) \sim \widetilde{k}_0 \, \tau^{-1} T^{-1/2} \sum_{l=0}^{\infty} k_l \, T^{-l}, \ \ k_0 = 1. \tag{30}$$

Таким образом, нам следует найти скалярное асимптотическое разложение $J\left(K_2, S\right)$, используя разложения (30) и (27) для $K_2(\tau)$ и $S(\tau)$ соответственно. В качестве первого шага сделаем в интеграле в правой части (21) замену переменных, получив

$$\begin{aligned} P(K_2 S) = \tau \int_0^1 \Big\{ &(1-x)^{-2} K_2\big(\tau x/(1-x)\big) S'\big(\tau/(1-x)\big) - \\ &- \big[K_2(\tau x) - K_2(\tau)\big] S'\big(\tau(1-x)\big) \Big\} dx. \end{aligned} \tag{31}$$

Далее, из (30) следует, что

$$K_2(\tau z) \sim z^{-1} K_2(\tau) + \widetilde{k}_0 (z\tau)^{-1} T^{-1/2} \sum_{l=1}^{\infty} q_l(z) T^{-l}, \tag{32}$$

где

$$q_l(z) = \sum_{i=0}^{l-1} k_i \, d_{l-i}\left(-i - 1/2\right) \ln^{l-i} z, \ \ l = 1,2,\cdots, \tag{33}$$

а $d_k(p)$ - биномиальные коэффициенты:

$$d_0(p) = 1, \ \ d_k(p) = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}, \ \ k = 1,2,\cdots \tag{34}$$

Аналогичным образом из (28) получаем

$$S'(\tau z) \sim z^{-1/2} S'(\tau) + \frac{\widetilde{s}_0}{2} (\tau z)^{-1/2} T^{1/4} \sum_{l=1}^{\infty} p_l(z) T^{-l}, \tag{35}$$

где

$$p_l(z) = \sum_{i=0}^{l-1} r_i d_{l-i}\left(-i + 1/4\right) \ln^{l-i} z, \ \ \ l = 1,2,\cdots \tag{36}$$

Подстановка формул (32), (35) и (28), (30) в правую часть (22) дает

$$J\left(K_2, S\right) \sim \frac{1}{2} \widetilde{s}_0 \widetilde{k}_0 \, \tau^{-1/2} T^{-1/4} \sum_{l=2}^{\infty} j_l(k,s) T^{-l}, \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned} j_l(k,s) = -\pi^2 (l-1) r_{l-1} + \textstyle\sum_{m=0}^{l-2} \Big\{ &-\frac{1}{2}(4m+3)(4m-1) s_m k_{l-2-m} + \\ r_m \Big[&-\frac{\pi^2}{2}(l+m-1) k_{l-m-1} + \textstyle\sum_{i=2}^{l-m} k_{l-m-i} \big[2(-2)^i \, i! \, d_i(-m+1/4) + \\ &\textstyle\sum_{j=1}^{i} d_{i-j}(m+i-l-1/2)\big(d_j(l-3/4) - d_j(-m+1/4)\big) a_{j,i-j} \big]\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{38}$$

$r_0 = s_0, \ \ r_m = s_m - \left(2m - 5/2\right) s_{m-1},$

$$a_{j,k} = \int_0^1 \frac{\ln^j(1-x)\ln^k x}{x\sqrt{1-x}}dx, \quad j=1,2,\cdots; \; k=0,1\cdots \tag{39}$$

(вычисление коэффициентов $a_{j,k}$ обсуждается в Приложении А).

Подстановка разложения (37) в (25) дает $j_l\left(k^{11},s^{11}\right) = 0$, $l = 2,3,\cdots$, откуда вытекает, согласно (38), следующее рекуррентное соотношение для коэффициентов асимптотического разложения $S^{11}(\tau)$:

$$s_{l-1}^{11} = \left(2l-9/2\right)s_{l-2}^{11} + \frac{1}{\pi^2(l-1)}\sum_{m=0}^{l-2}\left\{-\frac{1}{2}(4m+3)(4m-1)s_m^{11}k_{l-2-m}^{11} + \right.$$

$$r_m^{11}\left[-\frac{\pi^2}{2}(l+m-1)k_{l-m-1}^{11} + \sum_{i=2}^{l-m}k_{l-m-i}^{11}\left[2(-2)^i\, i!\, d_i\left(-m+1/4\right) + \right.\right. \tag{40}$$

$$\left.\left.\left.\sum_{j=1}^{i} d_{i-j}\left(m+i-l-1/2\right)\left(d_j\left(l-3/4\right)-d_j\left(-m+1/4\right)\right)a_{j,i-j}\right]\right]\right\}, \quad l=2,3,\cdots,$$

причем $s_0^{11} = 1$. Далее, при достаточно больших τ, а именно, когда $K^{22}(\tau) << \varepsilon_Q$, подстановка (37) в (26) дает

$$S^{21}(\tau) \sim \frac{3\pi}{128}\sqrt{\frac{5}{7}}\lambda_Q^{1/2}\varepsilon_Q^{-1}\tau^{-1/2}\,T^{-9/4}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{s_l^{21}}{T^l}, \tag{41}$$

где

$$s_l^{21} = -\frac{16}{3\pi^2}\,j_{l+2}\left(k^{12},s^{11}\right), \tag{42}$$

а $j_{l+2}\left(k^{12},s^{11}\right)$ можно найти из (38) подстановкой известных коэффициентов $s_m = s_m^{11}, k_m = k_m^{12}$. В частности, имеем

$$s_1^{21} = -\frac{15}{8} - \frac{9}{4}A, \quad s_2^{21} = \frac{1}{32}\left(89\pi^2 + 117A^2 + 195A + \frac{513}{4}\right), \tag{43}$$

где $A = C + 2\ln 2$, $C = 0.577216$ - постоянная Эйлера.

Рассмотрим теперь второй столбец матрицы S. Компоненты 12 и 22 матричного уравнения (6) таковы:

$$0 = -K_2^{11}(\tau)S^{12}(\tau) - K_2^{12}(\tau)S^{22}(\tau) + P\left(K_2^{11},S^{12}\right) + P\left(K_2^{12},S^{22}\right), \tag{44}$$

$$\varepsilon S^{22}(\tau) = \varepsilon_Q^{1/2} - K_2^{12}(\tau)S^{12}(\tau) - K_2^{22}(\tau)S^{22}(\tau) + P\left(K_2^{12},S^{12}\right) + P\left(K_2^{22},S^{22}\right). \tag{45}$$

Второе из этих уравнений позволяет сделать вывод, что

$$S^{22}(\tau) \sim \varepsilon_Q^{-1/2} + O\left(\tau^{-1}T^{-1/2}\right), \quad \tau >> 1, \tag{46}$$

так что последними слагаемыми в правых частях (44) и (45) можно пренебречь. В результате имеем

$$K_2^{11}(\tau)S^{12}(\tau) \sim -\varepsilon_Q^{-1/2}\,K_2^{12}(\tau) + P\left(K_2^{11},S^{12}\right), \tag{47}$$

$$\left[\varepsilon_Q + K_2^{22}(\tau)\right]S^{22}(\tau) \sim \varepsilon_Q^{1/2} - K_2^{12}(\tau)S^{12}(\tau) + P\left(K_2^{12},S^{12}\right). \tag{48}$$

Из (47) следует, что разложение $S^{12}(\tau)$ должно иметь вид

$$S^{12}(\tau) \sim \tilde{s}_0^{12} \sum_{i=0}^{\infty} s_i^{12} T^{-i}, \quad s_0^{12} = 1, \tag{49}$$

поскольку аналогичный вид имеет асимптотическое разложение отношения $K_2^{12}(\tau)/K_2^{11}(\tau)$. Таким образом, остается найти разложение $P(K_2, S)$, где K_2 и S имеют разложения (13) и (49) соответственно. Дифференцируя (49), получаем (опуская для простоты верхний индекс 12)

$$S'(\tau z) \sim -\tilde{s}_0 (z\tau)^{-1} T^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} p_m(z) T^{-m}, \tag{50}$$

где

$$p_m(z) = \sum_{l=0}^{m} (i+1) s_{i+1} d_{m-i}(-i-2) \ln^{m-l} z. \tag{51}$$

При помощи формул (32) и (50) находим из (21), что

$$P(K_2, S) \sim \tilde{s}_0 \tilde{k}_0 \tau^{-1} T^{-5/2} \sum_{l=1}^{\infty} j_l(k,s) T^{-l}, \quad \tau >> 1, \tag{52}$$

где

$$j_l(k,s) = \sum_{m=0}^{l-1} (m+1) s_{m+1} \sum_{i=1}^{l-m} k_{l-m-i} \sum_{j=1}^{i} \{ d_{i-j}(i-l+m-1/2) \big[d_j(-m-2) - \\ - d_j(l+3/2) \big] + d_j(i-l+m-1/2) d_{i-j}(-m-2) \} b_{j,l-j}, \tag{53}$$

причем

$$b_{j,k} = \int_0^1 \ln^j (1-x) \ln^k x \frac{dx}{x}. \tag{54}$$

(вычисление $b_{j,k}$ обсуждается в Приложении А). В частности, мы имеем $j_1(k^{11}, s) = (5/6)\pi^2 s_1$. Конечный результат таков:

$$S^{12}(\tau) \sim \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5\lambda_Q}{7\varepsilon_Q}} \sum_{i=0}^{\infty} s_i^{12} T^{-i}, \tag{55}$$

причем s_i^{12} определяются из рекуррентного соотношения

$$s_i^{12} = k_i^{12} - \sum_{j=0}^{i-1} s_j^{12} k_{i-j}^{11} + (\text{если } i \ge 3) + j_{i-2}(k^{11}, s^{12}), \quad i \ge 1, \quad s_0^{12} = 1, \tag{56}$$

где $j_l(k^{11}, s^{12})$ даются формулой (53). Заметим, что согласно (44) и (52)

$$S^{12}(\tau) \sim -\varepsilon_Q^{-1/2} \frac{K_2^{12}(\tau)}{K_2^{11}(\tau)} + O(T^{-3}). \tag{57}$$

При $K_2^{22}(\tau) << \varepsilon_Q$, т.е. при достаточно больших τ, можно переписать уравнение (45) в виде

$$S^{22}(\tau) \sim \varepsilon_Q^{-1/2} - \varepsilon_Q^{-3/2} K_2^{22}(\tau) - \varepsilon_Q^{-1} K_2^{12}(\tau) S^{12}(\tau) + \varepsilon_Q^{-1} P(K_2^{12}, S^{12}). \tag{58}$$

Подставляя разложение (57) в (58) и принимая во внимание (52), получаем

$$S^{22}(\tau) \sim \varepsilon_Q^{-1/2} - \varepsilon_Q^{-3/2} \frac{\det K_2(\tau)}{K_2^{11}(\tau)} + O(\tau^{-1} T^{-7/2}). \tag{59}$$

Полное асимптотическое разложение $S^{22}(\tau)$ получается подстановкой разложений $K_2^{22}(\tau)$, $K_2^{12}(\tau)$, $S^{12}(\tau)$ и $P\left(K_2^{12}, S^{12}\right)$ в уравнение (48). В результате имеем

$$S^{22}(\tau) \sim \varepsilon_Q^{-1/2} - \frac{75}{448}\frac{\lambda_Q \varepsilon_Q^{-3/2}}{\tau\sqrt{T}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{s_l^{22}}{T^l}, \tag{60}$$

где $s_0^{22} = 1$,

$$s_l^{22} = \frac{16}{15} k_l^{22} - \frac{1}{15}\sum_{j=0}^{l} s_j^{12} k_{l-j}^{12} + (\text{если } l \geq 3) + \frac{1}{15} j_{l-2}\left(k^{12}, s^{12}\right). \tag{61}$$

Последнее слагаемое в правой части (61) находится из (53) подстановкой $k_i = k_i^{12}$ и $s_i = s_i^{12}$.

Численные значения коэффициентов $s_i^{\alpha\beta}$ $\left(\alpha, \beta = 1,2;\ i = 1,2,\cdots\right)$, рассчитанных как описано выше, совпадают со значениями, представленными в [2]. Поэтому мы их здесь не приводим.

3.2 *Биконсервативный предел:* $\lambda_I = 1$, $\lambda_Q \to 1$. Естественно предположить, что в случае биконсервативного рассеяния $\left(\lambda_I = 1,\ \lambda_Q = 1\right)$ асимптотическое разложение матрицы S имеет такой же вид, как и в скалярном случае, а именно:

$$S(\tau) \sim \frac{4}{\pi}\tau^{1/2} T^{1/4} \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{s}_l T^{-l}. \tag{62}$$

Далее, обозначим $\widetilde{k}_n = \kappa_1 \odot k_n$ в асимптотическом разложении (13). (Заметим, что $\widetilde{k}_0 = \kappa_1$.) Тогда, подставляя разложения (62) и (13) в матричное уравнение (1), получаем (совершенно аналогично скалярному соотношению (40)) следующее матричное рекуррентное соотношение:

$$\begin{gathered}\widetilde{s}_{l-1} = \left(2l - 9/2\right)\widetilde{s}_{l-2} + \frac{\kappa_1^{-1}}{\pi^2 (l-1)} \sum\nolimits_{m=0}^{l-2} \left\{ -\frac{1}{2}(4m+3)(4m-1)\widetilde{k}_{l-2-m}\widetilde{s}_m + \right. \\ + \left[-\frac{\pi^2}{2}(l+m-1)\widetilde{k}_{l-m-1} + \sum\nolimits_{i=2}^{l-m} \widetilde{k}_{l-m-i}\left[2(-2)^i\, i!\, d_i\left(-m+1/4\right) + \right.\right. \\ \left.\left.\left. \sum\nolimits_{j=1}^{i} d_{i-j}\left(m+i-l-1/2\right)\left(d_j\left(l-3/4\right) - d_j\left(-m+1/4\right)\right) a_{j,l-j}\right]\right] \widetilde{r}_m \right\},\quad l = 2,3,\cdots,\end{gathered} \tag{63}$$

где $\widetilde{r}_0 = \widetilde{s}_0$, $\widetilde{r}_m = \widetilde{s}_m - \left(2m - 5/2\right)\widetilde{s}_{m-1}$, $m = 1,2,\cdots$. Чтобы начать определение коэффициентов, необходимо найти матрицу $\widetilde{s}_0$. Мы вычислим ее в пределе $\lambda_I = 1$, $\lambda_Q \to 1$ и $\tau \to \infty$, используя найденные в предыдущем разделе асимптотические разложения в случае консервативного рассеяния. Прежде всего из (27) и (41) имеем $S^{21}(\tau)/S^{11}(\tau) \propto 1\Big/\left(\varepsilon_Q \tau T^{5/2}\right)$. Но разложение (41) справедливо при $\varepsilon_Q >> K_2^{22}(\tau) \propto \tau^{-1} T^{-1/2}$, поэтому мы получаем, что $S^{21}(\tau)/S^{11}(\tau) \to 0$ при $\varepsilon_Q \to 0$ и $\tau \to \infty$. Таким образом, мы приходим к выводу, что $\widetilde{s}_0^{21} = 0$ и тогда $\widetilde{s}_0^{11} = 1$, как в скалярном случае. Далее, из (55) и (60) следует, что $S^{12}(\tau)/S^{22}(\tau) \to \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{7}}$ при $\tau \to \infty$ и $\varepsilon_Q \to 0$, и, следовательно, можно заключить, что $\widetilde{s}_0^{12}/\widetilde{s}_0^{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{7}}$. Этого достаточно для нахождения всех коэффициентов разложений $S^{12}(\tau)$ и $S^{22}(\tau)$, нормированных, скажем, на коэффициент $\tilde{s}_0^{12}$, который можно найти отдельно из нелинейного уравнения (10) (см. ниже в разделе 4.2). В итоге имеем

$$\tilde{s}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\sqrt{15}} \\ 0 & \dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{7}{3}} \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Из (63) на первом шаге можно получить, что $\tilde{s}_0^{21} = \dfrac{7}{20}\dfrac{1}{\sqrt{35}}$, и асимптотическое разложение $S^{21}(\tau)$ принимает вид

$$S^{21}(\tau) \sim \frac{7}{5\pi\sqrt{35}}\tau^{1/2}\,T^{-3/4}\sum_{l=0}^{\infty} s_l^{21}\,T^{-l}, \tag{65}$$

где $s_0^{21} = 1$. Для остальных элементов матрицы S имеем

$$S(\tau) \sim \frac{4}{\pi}\tau^{1/2}\,T^{1/4}\tilde{s}_0 \odot \sum_{l=0}^{\infty} s_l T^{-l}, \tag{66}$$

где $s_0^{11} = s_0^{12} = s_0^{22} = 1$. Коэффициенты $s_l^{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta = 1,2$ приведены в табл.2.

Таблица 2

КОЭФФИЦИЕНТЫ s_k^{ij} АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ $S(\tau)$ В БИКОНСЕРВАТИВНОМ ПРЕДЕЛЕ $(\lambda_I = 1, \lambda_Q \to 1)$

k	s_k^{11}	s_k^{21}	s_k^{12}	s_k^{22}
0	1.000000E+00	1.000000E+00	1.000000E+00	1.000000E+00
1	1.283775E-01	-5.851325E-01	3.950442E-01	2.075442E-01
2	-7.542401E-01	5.581631E+00	-9.269421E-01	-8.172297E-01
3	7.470298E-01	-1.202030E+01	2.262757E+00	1.217243E+00
4	-8.620379E+00	1.411256E+02	-1.211964E+01	-9.868594E+00
5	1.906009E+01	-5.203293E+02	5.769297E+01	3.126382E+01
6	-2.822032E+02	7.222987E+03	-4.326420E+02	-3.352190E+02
7	9.772387E+02	-3.751873E+04	2.962681E+03	1.609954E+03
8	-1.735888E+04	6.062933E+05	-2.816356E+04	-2.113821E+04
9	8.202160E+04	-4.054924E+06	2.490678E+05	1.355085E+05
10	-1.699097E+06	7.527293E+07	-2.863916E+06	-2.104526E+06

3.3. *Неконсервативное рассеяние:* $\lambda_I < 1$, $\lambda_Q < 1$. Неконсервативные асимптотические разложения были найдены В.В.Ивановым (частное сообщение, 1995г.). Они получаются из (6), если просто пренебречь интегральными слагаемыми и затем разрешить оставшееся уравнение относительно $S(\tau)$. В итоге

$$S(\tau) \sim \left[E + \varepsilon^{-1} K_2(\tau)\right]^{-1} \varepsilon^{-1/2}, \tag{67}$$

что, очевидно, представляет собой матричное обобщение скалярного приближения вероятности выхода первого порядка. В том случае, когда

$$K_2^{11}(\tau) << \varepsilon_I, \quad K_2^{22}(\tau) << \varepsilon_Q, \tag{68}$$

окончательно имеем

$$S(\tau) \sim \varepsilon^{-1/2} - \varepsilon^{-1} K_2(\tau)\varepsilon^{-1/2}. \tag{69}$$

Можно проверить, что все отброшенные слагаемые имеют порядок τ^{-2}. Коэффициенты асимптотического разложения второй ядерной функции можно найти, например, в [1].

4. *Асимптотические разложения матрицы* $I(z)$. 4.1. *Консервативное рассеяние:* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_Q < 1$. Мы получим асимптотические разложения матрицы $I(z)$ из линейного уравнения (9). Введем обозначение

$$Q(G,I) \equiv \int_0^\infty G(z')\frac{(z+z')I(z') - 2z'I(z)}{z'^2 - z^2} z'\,dz'. \tag{70}$$

Можно переписать эту формулу также в виде

$$Q(G,I) \equiv U(G,I) - V(G,I), \tag{71}$$

или

$$Q(G,I) \equiv R(G,I) - W(z)\,I(z), \tag{72}$$

где

$$U(G,I) \equiv 2\int_0^\infty G(z')\frac{I(z') - I(z)}{z'^2 - z^2} z'^2 dz', \tag{73}$$

$$R(G,I) \equiv \int_0^\infty G(z')\frac{I(z') - I(z)}{z' - z} z'dz', \tag{74}$$

$$V(G,I) \equiv \int_0^\infty G(z')\frac{I(z')}{z' + z} z'dz', \tag{75}$$

$$W(z) \equiv \int_0^\infty \frac{G(z')}{z' + z} z'dz'. \tag{76}$$

Тогда первый столбец уравнения (9) переписывается следующим образом:

$$0 = Q(G^{11}, I^{11}) + Q(G^{12}, I^{21}), \tag{77}$$

$$\varepsilon_Q\, I^{21}(z) = Q(G^{12}, I^{11}) + Q(G^{22}, I^{21}). \tag{78}$$

Последними слагаемыми в правых частях этих уравнений можно пренебречь при достаточно больших значениях z, которые соответствуют большим оптическим глубинам τ, где поляризация мала. Поэтому имеем

$$Q(G^{11}, I^{11}) \sim 0, \tag{79}$$

$$I^{21}(z) \sim \frac{1}{\varepsilon_Q + W(z)} Q\left(G^{12}, I^{11}\right) \tag{80}$$

Первое из этих уравнений эквивалентно линейному уравнению для скалярной функции $H(z)$ (В.В.Иванов [3]), и из него получается известное асимптотическое разложение $I^{11}(z)$ $(= H(z))$, подстановка которого во второе уравнение дает затем асимптотическое разложение $I^{21}(z)$. В [3] найдено, что

$$I(z) \sim \tilde{i}_0 \sqrt{z}\, Z^{1/4} \sum_{k=0}^{\infty} i_k\, Z^{-k}, \tag{81}$$

где $\tilde{i}_0 = 2/\pi$, $Z = \ln z/\sqrt{\pi}$, причем мы опускаем для простоты верхний индекс 11 у $I(z)$. Нам потребуется также асимптотическое разложение матрицы $G(z)$ при $z \gg 1$. Согласно (13) для любого элемента матрицы G имеем

$$G(z) \sim \tilde{g}_0 z^{-2} Z^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} g_k\, Z^{-k}. \tag{82}$$

Затем мы делаем замену переменной $z' = zx$ в подинтегральном выражении в правой части (70), получая

$$Q(G, I) \equiv z \int_0^{\infty} G(zx) \frac{(x+1)\, I(zx) - 2x I(z)}{x^2 - 1}\, x dx. \tag{83}$$

Далее, из (82) и (81) при $z \gg 1$ и $x \neq 0$ вытекают следующие разложения:

$$z\, G(zx)\, I(zx) \sim \tilde{i}_0 \tilde{g}_0 z^{-1/2} Z^{-1/4}\, x^{-3/2} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l(x)\, Z^{-l}, \tag{84}$$

$$z\, G(zx)\, I(z) \sim \tilde{i}_0 \tilde{g}_0 z^{-1/2} Z^{-1/4} x^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l(x)\, Z^{-l}, \tag{85}$$

где

$$\alpha_l(x) = \sum_{m=0}^{l} i_m \sum_{n=0}^{l-m} g_{l-m-n}\, d_n(n - l - 1/4) \ln^n x, \tag{86}$$

$$\beta_l(x) = \sum_{m=0}^{l} i_m \sum_{n=0}^{l-m} g_{l-m-n}\, d_n(m + n - l - 1/2) \ln^n x, \tag{87}$$

а $d_n(p)$ - биномиальные коэффициенты. Подстановка (84) и (85) в (83) дает

$$Q(G, I) \sim 2 \tilde{i}_0 \tilde{g}_0 z^{-1/2} Z^{-1/4} \sum_{l=0}^{\infty} q_l(g, i)\, Z^{-l}, \tag{88}$$

где

$$q_l(g, i) = \int_0^{\infty} \frac{\alpha_l\left(x^2\right) - \beta_l(x)}{x^2 - 1}\, dx. \tag{89}$$

Согласно формулам (86) и (87) имеем $\alpha_0\left(x^2\right) = \beta_0(x)$ и $\alpha_1\left(x^2\right) = \beta_1(x)$. Поэтому суммирование в правой части (88) начинается реально с $l = 2$. Подстановка формул (86) и (87) в (89) дает

$$q_l(g, i) = \sum_{m=0}^{l-1} i_m \sum_{n=1}^{l-m} g_{l-m-n} \left[2^n d_n(n - l - 1/4) - d_n(m + n - l - 1/2)\right] a_n, \tag{90}$$

где

$$a_n = \int_0^\infty \frac{\ln^n x}{x^2-1}dx = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}\pi^{n+1}\left|B_{n+1}\right|, \ \ n = 1,2,\cdots \qquad (91)$$

Здесь B_n - числа Бернулли, так что $a_{2k} = 0$, поскольку $B_{2k+1} = 0$ при $k = 1,2,\cdots$ и только a_{2k+1} - ненулевые. В частности $a_1 = (3/2)\pi^2 B_2 = \pi^2/4$.

Из (88) и (79) следует тождество $q_l(g,i) = 0$, дающее согласно (90) следуюшее рекуррентное соотношение для определения коэффициентов разложения $I^{11}(z)$:

$$i_k^{11} = -\frac{2}{\pi^2 k}\sum_{l=0}^{k-1} i_l^{11} \sum_{m=1}^{k-l+1} a_m\, g_{k-l-m+1}^{11}\left[d_m(m-k+l-3/2) - 2^m d_m(m-k-5/4)\right]. \qquad (92)$$

Далее, при достаточно больших z, а именно: при $W(z) << \varepsilon_Q$, из (80) и (88) следует, что

$$I^{21}(z) \sim \frac{2}{\varepsilon_Q}\frac{\tilde{i}_0^{11}\,\tilde{g}_0^{12}}{\sqrt{z}\,Z^{9/4}}\sum_{k=0}^\infty \frac{i_k^{21}}{T^k}, \qquad (93)$$

где обозначено $i_k^{21} = q_{k+2}(g^{12}, i^{11})/q_2(g^{12}, i^{11})$. Принимая во внимание, что $g_k^{12} = g_k^{11}(3\cdot 2^{-k} - 2)$ и $q_2(g^{12}, i^{11}) = -3\pi^2/32$, получаем следующее выражение для коэффициентов разложения $I^{21}(z)$:

$$i_k^{21} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{l=0}^{k+1} i_l^{11} \sum_{m=0}^{k-l+2} 2^{m+l-k} a_m\, g_{k-l-m+2}^{11}\left[d_m(m-k+l-5/2) - 2^m d_m(m-k-9/4)\right]. \qquad (94)$$

Можно показать, что соотношения (92) и (94) эквивалентны найденным в [2]. В частности,

$$i_1^{21} = -\frac{15}{8}, \ \ i_2^{21} = \frac{295}{64}\pi^2 + \frac{513}{128}. \qquad (95)$$

Обратимся ко второму столбцу уравнения (9). Имеем

$$0 = Q(G^{11}, I^{12}) + Q(G^{12}, I^{22}), \qquad (96)$$

$$\varepsilon_Q I^{22}(z) = \sqrt{\varepsilon_Q} + Q(G^{12}, I^{12}) + Q(G^{22}, I^{22}). \qquad (97)$$

Воспользуемся сначала для $Q(G,I)$ представлением (72), которое показывает, что

$$I^{22}(z) \sim \varepsilon_Q^{-1/2} + O(z^{-1} Z^{1/2}) \qquad (98)$$

и

$$Q(G, I^{22}) \sim z^{-1}\omega(G, I^{22}) - \varepsilon_Q^{-1/2} W(z), \qquad (99)$$

где

$$\omega(G,I) = \int_0^\infty G(z)\left[I(\infty) - I(z)\right] z dz. \qquad (100)$$

Более того, мы приходим к выводу, что разложение элемента 12 должно иметь вид

$$I^{12}(z) \sim \tilde{i}_0 \sum_{k=0}^{\infty} i_k^{12} Z^{-k}, \tag{101}$$

поскольку аналогичный вид справедлив для разложения $W^{12}(z)/W^{11}(z)$ (см. формулу (18)). Поэтому

$$\tilde{i}_0 = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_Q}} \frac{\tilde{g}_0^{12}}{\tilde{g}_0^{11}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5\lambda_Q}{7\varepsilon_Q}}. \tag{102}$$

Далее мы используем представление (71) для $Q(G^{11}, I^{12})$ и $Q(G^{12}, I^{12})$ и представление (99) для $Q(G^{12}, I^{22})$ и $Q(G^{22}, I^{22})$, получая из (78) и (97)

$$0 \sim U(G^{11}, I^{12}) - V(G^{11}, I^{12}) - \varepsilon_Q^{-1/2} W^{12}(z), \tag{103}$$

$$\varepsilon_Q I^{22}(z) \sim \sqrt{\varepsilon_Q} + U(G^{12}, I^{12}) - V(G^{12}, I^{12}) - \varepsilon_Q^{-1/2} W^{22}(z) + z^{-1}\omega(G^{22}, I^{22}), \tag{104}$$

причем последнее соотношение справедливо при $W^{22}(z) << \varepsilon_Q$. Таким образом, требуется найти асимптотические разложения $U(G, I^{12})$ и $V(G, I^{12})$ при $G(z)$ и $I^{12}(z)$, имеющих разложения вида (82) и (101) соответственно. Имеем

$$U(g,i) \sim 2\frac{\tilde{i}_0\, \tilde{g}_0}{z\sqrt{Z}} \sum_{n=2}^{\infty} u_n(g,i) Z^{-n}, \tag{105}$$

где

$$u_n(g,i) = \sum_{l=1}^{n-1} i_l \sum_{m=l}^{n-1} g_{m-l}\, a_{n-m}\left[d_{n-m}(-m-1/2) - d_{n-m}(l-m-1/2)\right], \tag{106}$$

и

$$V(g,i) \sim 2\tilde{i}_0 \tilde{g}_0 z^{-1} \sqrt{Z} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(g,i) Z^{-n}, \tag{107}$$

где

$$v_n(g,i) = \sum_{l=0}^{n} i_l \sum_{m=l}^{n} g_{m-l} \frac{b_{n-m}}{1-2m} d_{n-m}(-m+1/2). \tag{108}$$

Здесь коэффициенты a_n и b_n определены выше формулами (91) и (20) соответственно, причем мы опускаем для простоты верхний индекс 12 у i_l. Подстановка этих разложений (вместе с разложением (18)) в (103) дает следующее рекуррентное соотношение для определения коэффициентов i_l^{12}: $i_0^{12} = 1$, $i_1^{12} = 3/8$, $i_2^{12} = -21/64$, и при $k \geq 3$

$$i_k^{12} = \frac{1}{4} i_{k-1}^{12} + (2k-1)\left(C_{0k}^{12} - C_{0k}^{11}\right) - (2k-1)\sum\nolimits_{l=1}^{k-2} i_l^{12}\Big\{C_{lk}^{11} - \sum\nolimits_{m=1}^{k-l-1} a_m\, g_{k-m-l-1}^{11}\left[d_m(m-k+l+1/2) - d_m(m-k+1/2)\right]\Big\}, \tag{109}$$

где

$$C_{lk}^{ij} = i^{2i} \sum_{m=l}^{k} \frac{b_{k-m}}{2m-1} g_{m-l}^{ij} d_{k-m}(-m+1/2). \tag{110}$$

Далее мы подставляем (105), (107) и (18) в (104) и находим разложение $I^{22}(z)$:

$$I^{22}(z) \sim \varepsilon_Q^{-1/2} + \frac{\omega\left(G^{22}, I^{22}\right)}{\varepsilon_Q z} - \frac{75}{224}\lambda_Q \varepsilon_Q^{-3/2} \frac{\sqrt{Z}}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i_k^{22}}{Z^k}, \tag{111}$$

где $i_0^{22} = 1$, $i_1^{22} = 13/30$, $i_2^{22} = -\left(\pi^2 + 401/120\right)/24$ и при $k \geq 3$ значения i_k^{22} выражаются через i_l^{12}, $l = 1, \cdots, k$. Их можно найти по формуле

$$15(2k-1)\, i_k^{22} = i_k^{12} + \frac{1}{8} i_{k-1}^{12} - (2k-1)\left(C_{0k}^{22} - C_{0k}^{12}\right) + (2k-1)\sum\nolimits_{l=1}^{k-2} i_l^{12}\Big\{C_{lk}^{12} - \sum\nolimits_{m=1}^{k-l-1} a_m\, g_{k-m-l-1}^{12}\Big[d_m(m-k+l+1/2) - d_m(m-k+1/2)\Big]\Big\}. \tag{112}$$

Коэффициенты i_l^{12} и i_l^{22} приведены в [2].

4.2. *Биконсервативный предел:* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_Q \to 1$. Естественно предположить, что в случае биконсервативного рассеяния ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_Q = 1$) асимптотическое разложение матрицы I имеет ту же форму, что и в скалярном случае:

$$I(z) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{1/2} Z^{1/4} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mathrm{i}}_k Z^{-k}. \tag{113}$$

Обозначим $\tilde{g}_n = \kappa_1 \odot g_n$ в асимптотическом разложении (13). (Заметим, что $\tilde{g}_0 = \kappa_1$). Тогда подстановка разложений (113) и (13) в матричное уравнение (9) дает (аналогично скалярному соотношению (92)) следующее матричное рекуррентное соотношение:

$$\tilde{i}_k = -\frac{2}{\pi^2 k} \kappa_1^{-1} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=1}^{k-l+1} a_m\, \tilde{g}_{k-l-m+1}\, \tilde{i}_l \Big[d_m(m-k+l-3/2) - 2^m\, d_m(m-k-5/4)\Big] \tag{114}$$

Для начала необходимо найти матрицу $\tilde{i}_0$. Мы вычислим ее в пределе $\lambda_1 = 1$, $\lambda_Q \to 1$ и $z \to \infty$, используя консервативные асимптотические разложения, найденные в предыдущем разделе. Во-первых, из (81) и (93) следует, что $I^{21}(z)/I^{11}(z) \to 0$ при $\varepsilon_Q \to 0$ и $z \to \infty$. Таким образом, $\tilde{i}_0^{21} = 0$, и тогда $\tilde{i}_0^{11} = 1$, как и в скалярном случае. Далее, из разложений (101) и (111) следует, что $\tilde{i}_0^{12}/\tilde{i}_0^{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{7}}$. Этого достаточно для нахождения всех коэффициентов разложений $I^{12}(z)$ и $I^{22}(z)$, нормированных, например, на коэффициент $\tilde{i}_0^{12}$, который можно найти отдельно из нелинейного уравнения (10) тем же методом, что и в скалярном случае [7,8]. Так, подстановка главного члена разложения (113) в (10) дает $\tilde{i}_0 \tilde{i}_0^{\mathrm{T}} \tilde{g}_0 = \mathrm{E}$. Это уравнение легко решается при заданном отношении $\tilde{i}_0^{12}/\tilde{i}_0^{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{7}}$. В итоге получаем для $\tilde{i}_0$ приведенное выше представление (64).

На первом шаге из (114) находим, что $\tilde{i}_0^{21} = \frac{7}{20}\frac{1}{\sqrt{35}}$. Поэтому можно переписать разложение $I^{21}(z)$ так:

$$I^{21}(\tau) \sim \frac{1}{10}\sqrt{\frac{7}{5\pi}}\, z^{1/2} Z^{-3/4} \sum_{k=0}^{\infty} i_k^{21} Z^{-k}, \tag{115}$$

где $i_0^{21} = 1$. Для остальных элементов матрицы I имеем:

$$I(z) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{1/2} Z^{1/4}\, \tilde{i}_0 \odot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i_k}{Z^k}, \tag{116}$$

где $i_0^{11} = i_0^{12} = i_0^{22} = 1$. Коэффициенты $i_k^{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 1,2$ приведены в табл.3.

Таблица 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ i_k^{ij} АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ $\mathrm{I}(z)$ В БИКОНСЕРВАТИВНОМ ПРЕДЕЛЕ ($\lambda_1 = 1,\ \lambda_Q \to 1$)

k	i_k^{11}	i_k^{21}	i_k^{12}	i_k^{22}
0	1.000000E+00	1.000000E+00	1.000000E+00	1.000000E+00
1	1.375000E-01	-6.125000E-01	4.041667E-01	2.166667E-01
2	-8.455160E-01	6.233334E+00	-1.025516E+00	-9.106722E-01
3	8.343349E-01	-1.346148E+01	2.524914E+00	1.357205E+00
4	-1.048550E+01	1.706433E+02	-1.440935E+01	-1.188819E+01
5	2.218519E+01	-6.144697E+02	6.882500E+01	3.686669E+01
6	-3.638422E+02	9.243081E+03	-5.420795E+02	-4.270276E+02
7	1.174218E+03	-4.605041E+04	3.710473E+03	1.979428E+03
8	-2.331978E+04	8.074472E+05	-3.663643E+04	-2.801373E+04
9	1.008590E+05	-5.115257E+06	3.229026E+05	1.716705E+05
10	-2.350184E+06	1.031191E+08	-3.826365E+06	-2.868439E+06

Для проверки расчетов асимптотическое разложение (62) матрицы $S(\tau)$ было подставлено в формуле (8) для матрицы $\mathrm{I}(z)$ и было найдено следующее соотношение между коэффициентами разложений этих двух матриц:

$$\tilde{\mathrm{i}}_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n} \tilde{s}_k\, d_{n-k}\left(\frac{1}{4} - k\right) \Gamma^{(n-k)}\left(\frac{3}{2}\right), \tag{117}$$

или

$$\tilde{\mathrm{s}}_n = \tilde{\mathrm{i}}_n - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{s}_k\, d_{n-k}\left(\frac{1}{4} - k\right) \Gamma^{(n-k)}\left(\frac{3}{2}\right). \tag{118}$$

Мы использовали коэффициенты $\tilde{i}_n$, чтобы вычислить $\tilde{\mathrm{s}}_n$ при помощи этого рекуррентного соотношения (именно так определялись коэффициенты разложения функции источников в скалярном случае [3]), и нашли, что численные значения $\tilde{\mathrm{s}}_n$, найденные таким способом, совпадают с рассчитанными назависимо в разделе 3.

4.3. ***Неконсервативное рассеяние:*** $\lambda_1 < 1,\ \lambda_Q < 1$. При больших z из уравнения (11) имеем:

$$I(z) \sim \left[E + \varepsilon^{-1} W(z)\right]^{-1} \left[\varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-1} \omega\, z^{-1}\right], \tag{119}$$

где

$$\omega = \int_0^{\infty} G(z) \left[\mathrm{I}(\infty) - I(z)\right] z dz. \tag{120}$$

В случае, когда

$$W^{11}(z) \ll \varepsilon_1, \; W^{22}(z) \ll \varepsilon_Q, \tag{121}$$

получаем

$$I(z) \sim \varepsilon^{-1/2} - \varepsilon^{-1} W(z) \varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-1} \omega z^{-1}. \tag{122}$$

Можно проверить, что сумма всех отброшенных слагаемых - порядка z^{-2}. Коэффициенты асимптотического разложения матрицы $W(z)$ приведены выше в табл.1.

5. ***Выводы.*** В рамках матричной версии полного перераспределения по частоте, сформулированной в [1], предложен новый метод вывода полных асимптотических разложений матричной функции источников $S(\tau)$ для случая доплеровского профиля в стандартной задаче о плоской аксиально симметричной среде с равномерно распределенными первичными источниками частично поляризованного излучения в спектральной линии. В качестве исходного используется матричное (2x2) уравнение для производной матрицы $S(\tau)$ по τ, получающееся из уравнения типа Винера-Хопфа для $S(\tau)$ интегрированием по частям. Мы находим асимптотические разложения непосредственно из уравнения для производной матрицы источников, и все, что при этом используется это - асимптотические разложения второй ядерной матрицы уравнения. Рассмотрены случаи консервативного ($\lambda_I = 1$, $\lambda_Q < 1$) и неконсервативного ($\lambda_I < 1$, $\lambda_Q < 1$) рассеяния, а также - биконсервативный предел ($\lambda_I = 1$, $\lambda_Q \to 1$). В качестве побочного результата получено новое рекуррентное соотношение для коэффициентов асимптотического разложения скалярной функции источников в задаче Милна ($\lambda_I = 1$). Дан также новый вывод полных разложений матрицы Стокса выходящего излучения $I(z)$ из линейного матричного уравнения, являющегося обобщением скалярного линейного уравнения H-функции. В случае консервативного рассеяния коэффициенты наших разложений совпадают с найденными в [2]. Мы приводим таблицы коэффициентов асимптотических разложений в биконсервативном пределе.

Работа выполнена при поддержке грантом РФФИ и ISF P39300, а также грантом РФФИ 96-15-96622 (Программа поддержки ведущих научных школ).

Астрономический институт им. В.В.Соболева
Санкт-Петербургского университета, Россия

ASYMPTOTIC THEORY OF POLARIZED LINE FORMATION BY RESONANCE SCATTERING WITHIN THE DOPPLER CORE

S.I.GRACHEV

In the first of the series of papers by Ivanov et al it was shown that the model two-level problem of non-LTE formation in homogeneous plane atmospheres with the complete account of polarization due to resonance scattering assuming complete frequency redistribution is reduced to the 2x2 matrix Wiener-Hopf integral equation for the matrix source function S (τ). In the second paper devoted to the vector Milne problem, fill asymptotic expansions of I (z) matrix (which is essentially Laplace transform of S (τ)) are obtained for the particular case of the Doppler profile and then the coeflicients of asymptotic expansions for S (τ) (τ>>1) are expressed through those for I (z). We show that those asymptotic expansions for S (τ) can be derived directly from matrix Wiener-Hopf integral equation for S (τ). We give new recursion relations for the coefficients of these expansions together with the new derivation of the I-matrix asymptotic expansions inchluding its second column which have been considered by Ivanov et al only briefly.

ЛИТЕРАТУРА

1. *V.V.Ivanov*, *S.I.Grachev*, *V.M.Loskutov*, Astron. Astrophys., **318**, 315, 1997.
2. *V.V.Ivanov*, *S.I.Grachev*, *V.M.Loskutov*, Astron. Astrophys., **321**, 968, 1997.
3. *В.В.Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
4. *H.Frisch*, *U.Frisch*, JQSRT, **28**, 361, 1982.
5. *D.I.Nagirner*, Astrophys. Space Phys. Rev., **3**, 255, 1984.
6. *H.Frisch*, in Radiation in Moving Gaseous Media, eds. Y.Chmielewsky, T.Lanz, Geneva Observ., 1988.
7. *В.В.Иванов*, Вестник ЛГУ, N 19, 117, 1960.
8. *В.В.Иванов*, Уч. зап. ЛГУ, N 307, 52, 1962.
9. *M.Faurobert-Scholl*, *H.Frisch*. Astron. Astrophys., **219**, 338, 1989.
10. *М.Абрамовиц*, *И.Стиган*, Справочник по специальным функциям, Наука, М., 1979.

Приложение А.

Вычисление коэффициентов a_{jk} и b_{jk}, определенных формулами (39) и (54). Очевидно можно переписать формулы (39) и (54) в виде

$$a_{jk} = \left.\frac{\partial^{j+k} B(\alpha,\beta)}{\partial\beta^j \partial\alpha^k}\right|_{\alpha=0,\beta=1/2}, \quad b_{jk} = \left.\frac{\partial^{j+k} B(\alpha,\beta)}{\partial\beta^j \partial\alpha^k}\right|_{\alpha=0,\beta=1}, \tag{A1}$$

где $B(\alpha,\beta)$ - бета-функция Эйлера, которая выражается через гамма-функцию Эйлера:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{A2}$$

Подстановка (A2) в (A1) дает следующие рекуррентные соотношения:

$$a_{m,n-m} = -\frac{\psi^{(n)}(1/2)}{n-m+1} - \sum_{j=0}^{n-m-1} C_{n-m}^j \left\{ \frac{\psi^{(m+j)}(1/2)}{j+1} D_{n-m-j} + \sum_{l=1}^{m-1} C_{m-1}^l \, a_{lj} \, \psi^{(n-1-l-j)}(1/2) \right\}, \tag{A3}$$

$$b_{m,n-m} = -\frac{\psi^{(n)}(1)}{n-m+1} - \sum_{j=0}^{n-m-1} C_{n-m}^j \sum_{l=1}^{m-1} C_{m-1}^l \, b_{lj} \, \psi^{(n-1-l-j)}(1), \tag{A4}$$

где $C_n^m = n!/[m!(n-m)!]$, $\psi(z) = d\ln\Gamma(z)/dz$, $\psi^{(n)}(z)$ - n-ая производная $\psi(z)$, а коэффициенты D_n в (A3) вычисляются по рекуррентной формуле

$$D_n = \Gamma^{(n)}(1) - \pi^{-1/2} \sum_{l=1}^{n} \Gamma^{(l)}(1/2) C_n^l D_{n-l}, \quad D_0 = 1. \tag{A5}$$

Что касается вычисления производных гамма-функции, то мы используем следующую рекуррентную формулу:

$$\Gamma^{(n+1)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}\left[\Gamma(z)\psi(z)\right] = \sum_{l=1}^{n} C_n^l \, \Gamma^{(l)}(z) \psi^{(n-l)}(z), \tag{A6}$$

причем полигамма-функция при $z=1$ и $z=1/2$ определяется через ζ-функцию Римана (см. например, Абрамовиц и Стиган [10]):

$$\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} n! \zeta(n+1), \quad \psi^{(n)}(1/2) = \left(2^{n+1}-1\right)\psi^{(n)}(1). \tag{A7}$$

Численные значения $\zeta(n)$ были взяты из справочника Абрамовица и Стигана [10].

С целью контроля расчетов мы также использовали для a_{jk} следующие два представления:

$$a_{m,n-m} = (-1)^n (n-m)! \sum_{l=0}^{\infty} (m+l)^{m-n-1} \sum_{k=0}^{l} \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} c_{l-k}(m), \tag{A8}$$

и

$$a_{m,n-m} = (-1)^n \, m! \sum_{l=0}^{\infty} \left(n-m+l+1/2\right)^{-m-1} \sum_{k=0}^{l} c_k(n-m), \tag{A9}$$

где коэффициенты $c_j(k)$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$c_j(k+1)=\sum_{i=0}^{j}\frac{c_j(k)}{j-i+1},\quad c_i(1)=\frac{1}{i+1}. \tag{A10}$$

Формула (A8) получается непосредственно из (39) заменой переменной интегрирования $x=e^{-t}$ и подстановкой разложений $\ln^j\left(1-e^{-t}\right)$ и $\left(1-e^{-t}\right)^{-1/2}$ в подинтегральном выражении в ряды по степеням e^{-t}. Формула (A9) получается аналогично, но на первом шаге переменная интегрирования x заменяется на $1-e^{-t}$ и затем функции $\ln^k\left(1-e^{-t}\right)$ и $\left(1-e^{-t}\right)^{-1}$ раскладываются в ряды по степеням e^{-t}.