АСТРОФИЗИКА

ТОМ 43 ФЕВРАЛЬ, 2000 ВЫПУСК 1

УДК: 521.172

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЗРЫВОПОДОБНОГО ИМПУЛЬСА ВО ВЛОЖЕННОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЛЕГКОМ ГАЗОВОМ ДИСКЕ

М.Г.АБРАМЯН, С.Г.ХАЧАТРЯН

Поступила 30 июня 1999
Принята к печати 1 ноября 1999

Изучено распространение осесимметричных нелинейных возмущений плотности, образованных в центральной части вложенного вращающегося газового диска, возмущениями гравитационного поля которого можно пренебречь. Обсуждено ранее примененное нами приближение непрерывных решений и реализован численный метод характеристик при интегрировании системы двумерных гидродинамических уравнений. Аналитически получено качественное описание движения пиков вдали от центра диска. С учетом диссипативных сил прослежена эволюция взрывоподобного возмущения по диску.

1. Введение. Задача распространения осесимметричных возмущений плотности во вложенном бесконечно тонком вращающемся газовом диске в пренебрежении самогравитацией была поставлена в работе [1]. Была оценена возмущенная гравитационная сила по сравнению с возмущенной гидродинамической силой и показано, что в легких горячих дисках вокруг массивных компактных объектов и в центральных областях экстремально плоских подсистем галактик возмущениями гравитационного потенциала при изучении динамики газового диска можно пренебречь.

Система двумерных гидродинамических уравнений

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}-2\Omega v_\phi-\frac{v_\phi^2}{2}=-c_s^2\left(\frac{\sigma_g}{\sigma_{0g}}\right)^{\gamma-2}\frac{1}{\sigma_{0g}}\frac{\partial \sigma_g}{\partial r}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+\frac{\chi^2}{2\Omega}v_r+\frac{v_r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\phi\right)=0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_g}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma_g v_r\right)=0, \qquad (3)$$

(где $\Omega(r)$ - угловая скорость вращения диска, $\chi=2\Omega\sqrt{1+\frac{r}{2\Omega}\frac{d\Omega}{dr}}$ - эпициклическая частота, γ - "плоский" показатель политропы [2-4], v_ϕ — возмущение азимутальной скорости, v_r - радиальная скорость, $\sigma_g=\sigma_{0g}+\sigma'_g$

- полная возмущенная поверхностная плотность газа), соответствующая такой постановке, является, как показано ниже, гиперболической системой квазилинейных уравнений. В общем случае, следовательно, она приводит к образованию разрывов, допуская их распространение [5].

В работе [1] изучалась динамика достаточно коротковолновых ($L/2\pi R << 1$) стационарных прогрессивных возмущений вида

$$\sigma_g = \sigma_g(r-wt),\ \upsilon_r = \upsilon_r(r-wt),\ \upsilon_\varphi = \upsilon_\varphi(r-wt), \tag{4}$$

где w - постоянная скорость распространения нелинейной волны. В этом случае система разрешима в квадратурах. Приведем два из основных результатов, первый из которых является определением предельной амплитуды, а аналогия со вторым будет прослежена ниже.

а) При заданных значениях параметров w и γ амплитуда нелинейной прогрессивной волны ограничена значением

$$\Sigma_{0b} = w^{2/(\gamma+1)} - 1. \tag{5}$$

б) Между предельными значениями амплитуд радиальной скорости и плотности существует простая связь:

$$u_{0b} = \Sigma_{0b} = w^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}, \tag{6}$$

При естественном для межзвездной среды значении $\gamma=1$ имеем

$$u_{0b} = \Sigma_{0b} = w - 1. \tag{7}$$

В работе [6] нестационарные решения в окрестности точки τ радиусом $\Delta\tau$ были представлены в виде локального степенного ряда

$$\upsilon(x,\tau+\Delta\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x,\tau)\Delta\tau^k, \tag{8}$$

где коэффициенты C_k - непрерывные, двукратно дифференцируемые по x функции. Рассматривалась модель твердотельно вращающегося $(\chi/2\Omega = 1)$ изотермического диска ($\gamma=1$) и были выявлены следующие основные закономерности распространения нелинейных возмущений при различных начальных условиях [6].

а) Случай слабой нелинейности ($\sigma'_g \le 0.1\sigma_{0g}$).

- Импульс распространяется со скоростью звука.

- Асимптотически выполняется соотношение, аналогичное (7): разность между амплитудами радиальной скорости и возмущения плотности стремится к нулю, при этом сами амплитуды также монотонно убывают.

б) Случай сильной нелинейности ($\sigma'_g \approx 2\sigma_{0g}$)

- Наблюдается характерное искажение профиля начального импульса: максимум постепенно заостряется до тех пор, пока на переднем фронте не появляется точка с бесконечно большой пространственной производной. Происходит опрокидывание волны — образуется ударная волна.

- Строго говоря, этим моментом ограничивается область применимости обсужденного метода, поскольку далее реальный профиль описывается разрывной функцией. Попытка продолжения расчетов, то есть моделирования профиля в точке разрыва узкой (шириной порядка Δx) областью непрерывного, но резкого скачка, приводит к резкому накоплению ошибок [7]. Это качественно трансформирует форму импульса: в области разрыва образуются высокочастотные осцилляции, распространяющиеся со временем по всему профилю, превращая его в серию узких пиков (см. [6]).

2. *Опрокидывающаяся волна и распространение разрывов.* Переходом к новым независимым переменным $x = \chi r/c_s$, $\tau = \chi t$ и введением безразмерных величин [8]

$$u = \frac{v_r}{c_s},\ \upsilon = \frac{2\Omega}{\chi c_s}v_\phi,\ \Sigma_1 = \ln\left(\frac{\sigma_g}{\sigma_{0g}}\right), \tag{9}$$

систему (1)-(3) можно представить в безразмерном виде

$$\frac{\partial u}{\partial\tau} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \upsilon - \frac{\upsilon^2}{x} + \frac{\partial\Sigma_1}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial\tau} + u + \frac{u}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x\upsilon) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\Sigma_1}{\partial\tau} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(xu) + u\frac{\partial\Sigma_1}{\partial x} = 0. \tag{12}$$

Матрица, составленная из коэффициентов при производных по пространственной переменной,

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} u(x,\tau) & 0 & 1 \\ 0 & u(x,\tau) & 0 \\ 1 & 1 & u(x,\tau) \end{pmatrix},$$

является вещественной и симметрической. Следовательно, уравнения (10)-(12) составляют гиперболическую систему, имеющую три семейства характеристик [5,9]. Соответствующие характеристические скорости суть собственные числа матрицы a_{ij}: $c_1 = u-1$, $c_2 = u$, $c_3 = u+1$.

Наиболее эффективным для решения гиперболических систем является метод интегрирования вдоль характеристик [10]. Этот метод использован в данном разделе.

Из (11), (12) следуют связи [11]

$$u = \frac{\partial\upsilon}{\partial\tau}\left[1 + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x\upsilon)\right]^{-1};\quad \Sigma_1 = \ln\left(1 + \frac{\partial}{\partial x}(x\upsilon)\right), \tag{13}$$

подстановкой которых в (10) получим уравнение второго порядка с характеристиками $c_1 = u-1$ и $c_3 = u+1$ относительно $\upsilon(x,\tau)$ [1]. Эффективный итеративный алгоритм интегрирования гиперболических уравнений второго порядка, использованный нами для решения системы уравнений (10), (13), описан в монографии [12].

Начальные условия выбирались такого же типа, что и в работе [6]: стационарное возмущение со скоростью распространения $w = \text{const}$ в начальный момент времени, удовлетворяющее закону сохранения массы -

$$\upsilon(x,0) = x^{\lambda}\left(x^{m}-1\right)e^{-\alpha x^{n}}; \quad \upsilon_{\tau}(x,0) = -w\,\upsilon_{x}(x,0), \tag{14}$$

где $\lambda \geq 1, m \geq 1, n \geq 1$. В отличие от предыдущей работы, где был исключен из рассмотрения центр диска, здесь начальное распределение возмущений задано вплоть до $x = 0$, что дополнительно ограничивает λ снизу. Из (13) и (14) легко можно установить поведение основных величин вблизи центра: $\upsilon(x,0) \sim x^{\lambda}$, $\Sigma_1(x,0) \sim x^{\lambda-1}$, $u(x,0) \sim x^{\lambda-1}$, при $x \to 0$. Подстановкой этих асимптотических выражений в систему (10)-(12), с требованием конечности каждого слагаемого в отдельности, определяется нижний предел параметра λ: $\lambda \geq 2$, в отличие от ранее принятого $\lambda = 1$ [6].

Никаких граничных условий при $x = 0$ не задавалось. Поэтому область интегрирования на (x,τ)-плоскости была ограничена полуосью $0 \leq x \leq +\infty$ и характеристической кривой $dx/d\tau = u+1$, выходящей из точки (0,0).

На рис.1 изображено распространение слабого импульса, уплотнение в котором не превышает 10% от равновесной плотности. Решение полностью согласуется с результатом работы [6] и подтверждает правомерность поиска решения в виде непрерывных функций для слабых возмущений.

Случай сильного возмущения изображен на рис.2, где распределение

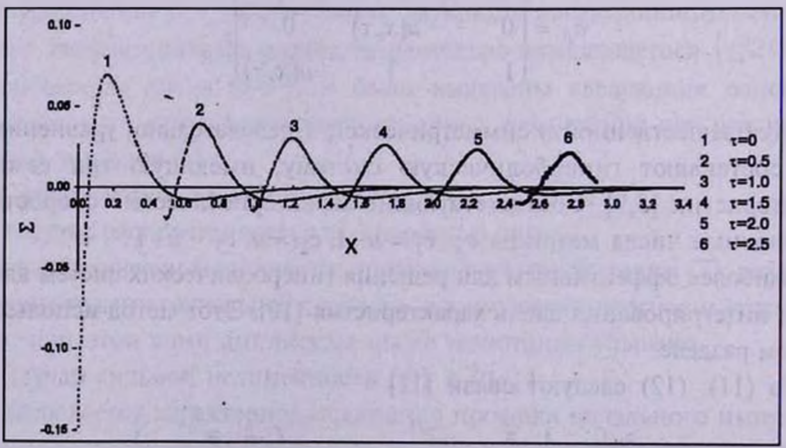

Рис.1. Распространение возмущения малой интенсивности. Решение получено методом характеристик. Распределение возмущенной плотности показано в моменты времени, указанные на рисунке.

плотности показано в моменты времени $\tau = 0;0.1;0.3;0.5$. Решение представляет собой опрокидывающуюся волну. И здесь оба обсужденных метода обеспечивают одинаковый результат до момента образования ударной волны: в начальной стадии распространения доминирующим является нелинейный эффект увеличения крутизны фронта пика, и, как следствие, волна опрокидывается. В дальнейшие моменты времени, однако, математически правильный результат достигается лишь методом характеристик. Более плотные участки возмущения продолжают двигаться с большей скоростью, и функция распределения плотности становится многозначной. Подобный профиль не имеет, конечно, физического смысла. Однако реальное решение в каждый данный момент можно смоделировать, введя разрыв первого рода, удовлетворяющий закону сохранения массы [5,9] (разрыв для момента $\tau = 0.5$ показан на рис.2 отрезком AB).

Определим условия на разрыве, которые выводятся из законов сохранений

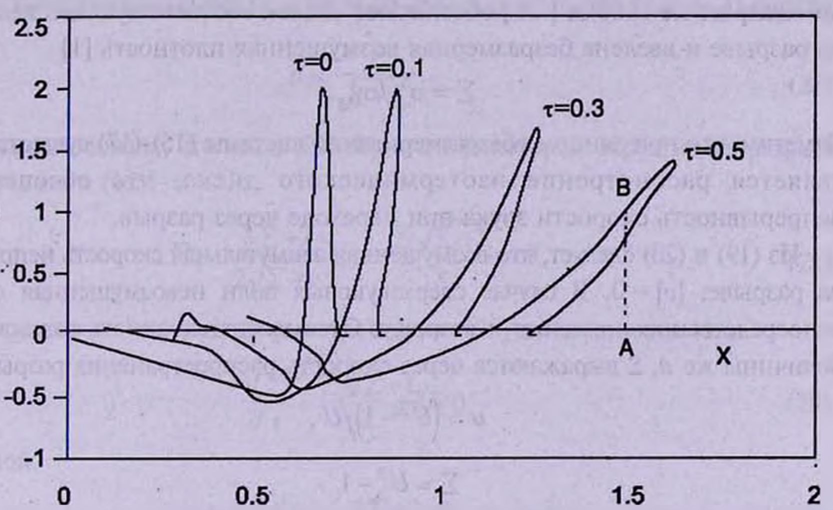

Рис.2. Распространение сильного импульса. Решение получено методом характеристик. Распределение возмущенной плотности показано в моменты времени, указанные на рисунке. Разрыв показан отрезком AB.

в интегральной форме. В нашем случае это законы сохранения импульса и массы. Если p - давление и Π_{ik} - тензор плотности потока количества движения, то в интегральной форме система (1)-(3) запишется как

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{r_1}^{r_2}\sigma_g v_r\, rdr + r\Pi_{rr}\Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2}\sigma_g\left(2\Omega v_\varphi + \frac{v_\varphi^2 - c_s^2}{r}\right) rdr = 0, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{r_1}^{r_2}\sigma_g v_\varphi\, rdr + r\Pi_{\varphi r}\Big|_{r_1}^{r_2} + 2\Omega\int_{r_1}^{r_2}\sigma_g v_r\, rdr = 0, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{r_1}^{r_2}\sigma_g\, r dr + r\,\sigma_g v_r\Big|_{r_1}^{r_2} = 0, \qquad (17)$$

где $\Pi_{rr} = p + \sigma_g v_r^2 = \sigma_g\left(v_r^2 + c_s^2\right)$, $\Pi_{\upsilon r} = \sigma_g v_r v_\varphi$.

Пусть в некоторый момент времени разрыв находится в точке r_0. Скорость его распространения обозначим через U. Беря пределы интегрирования в (15)-(17) по разные стороны разрыва $r_0-\delta$ и $r_0+\delta$ и переходя к пределу $\delta \to 0$, в безразмерном виде получим

$$U\left[(1+\Sigma)u\right] = \left[(1+\Sigma)\left(1+u^2\right)\right], \qquad (18)$$

$$U\left[(1+\Sigma)\upsilon\right] = \left[(1+\Sigma)\upsilon u\right], \qquad (19)$$

$$U\left[1+\Sigma\right] = \left[(1+\Sigma)u\right], \qquad (20)$$

где квадратные скобки [...] обозначают скачок соответствующей величины на разрыве и введена безразмерная возмущенная плотность [1]

$$\Sigma = \sigma_g'/\sigma_{0g}. \qquad (21)$$

Отметим, что при данном обезразмеривании системы (15)-(17) существенным является рассмотрение изотермического диска, что обеспечивает непрерывность скорости звука при переходе через разрыв.

Из (19) и (20) следует, что возмущенная азимутальная скорость непрерывна на разрыве: $[\upsilon]=0$. В случае сверхзвуковых волн невозмущенная область непосредственно прилегает к разрыву. Отсюда видно, что на разрыве $\upsilon=0$. Величины же u, Σ выражаются через скорость распространения разрыва U:

$$u = \left(U^2-1\right)/U, \qquad (22)$$

$$\Sigma = U^2 - 1. \qquad (23)$$

Условия на разрыве (22), (23) являются обобщением свойства (6) на нестационарный случай.

Теперь покажем, что на больших расстояниях от центра можно перейти к пределу

$$|\Sigma - u| \to 0, \qquad \text{при } x \to \infty \qquad (24)$$

для конечных значений амплитуд.

Образование ударной волны приводит к затуханию импульса. Действительно, при введении разрыва всегда отсекается вершина "опрокинувшегося" профиля [5]. А разрыв, то есть область больших градиентов, исчезает лишь асимптотически при $\tau \to \infty$ [9]. Это означает, что на больших расстояниях от центра диска в области пика в первом приближении можно пренебречь значениями функций по сравнению с их производными и опустить азимутальную скорость, так как она непрерывна.

Тогда вместо системы (10)-(12) основные уравненя запишутся как

$$u_\tau + \Sigma_{1x} = 0, \tag{25}$$

$$\Sigma_{1\tau} + u_x = 0. \tag{26}$$

Учитывая, что $u = 0$ при $\Sigma = 0$, из (21), (25) и (26) сразу следует, что при $\tau \to \infty$ $\Sigma = u$ и волна, вернее область, прилегающая к разрыву, стационарно распространяется со скоростью звука. В периферийных областях диска отсутствует характерное нелинейное искажение профиля пика, имеющего крутой передний фронт.

Метод характеристик не только позволяет решить уравнение с большой точностью, но и является удобным инструментом в выявлении общих закономерностей поведения решений. Оценим скорости распространения импульса и убывания его амплитуды. Идея состоит в том, что реальное решение аппроксимируется простой волной [5], то есть уравнение (10) заменяется функциональной зависимостью $u = u(\Sigma)$. Из (22), (23) следует

$$u = \frac{\Sigma}{\sqrt{1+\Sigma}}. \tag{27}$$

Теперь предположим, что связь (27) верна и в некоторой окрестности разрыва и подставим в (12):

$$\Sigma_\tau + \frac{3\Sigma+2}{2\sqrt{\Sigma+1}}\Sigma_x + \frac{\Sigma\sqrt{\Sigma+1}}{x} = 0 \tag{28}$$

В характеристической форме уравнение (28) представится как

$$\frac{d\Sigma}{d\tau} + \frac{\Sigma\sqrt{\Sigma+1}}{x} = 0 \tag{29}$$

на кривой

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{3\Sigma+2}{2\sqrt{\Sigma+1}}. \tag{30}$$

Из (30) следует, что $U \sim dx/d\tau \to 1$ при $\tau \to \infty$, когда $\Sigma \to 0$. Далеко от центра возмущение переходит в звуковую волну. Комбинируя (29) и (30), получим на характеристике обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Sigma}{dx} = -\frac{2\Sigma(\Sigma+1)}{x(3\Sigma+2)}, \tag{31}$$

которое легко интегрируется методом разделения переменных:

$$\Sigma^2(\Sigma+1) = C(\xi)x^{-2}, \tag{32}$$

где $x(\tau = 0) = \xi$ и $C(\xi)$ - постоянная интегрирования, зависящая от значения $\Sigma(\xi)$ в точке $(\xi,0)$ пересечения характеристики с осью x. Амплитуда возмущения асимптотически убывает как $1/x$. Заметим, что при связи (27) характеристики уравнений (10) и (12) совпадают с точностью до кубических по малой разности $U-1$ членов.

Оказывается, можно получить точный аналог стационарных плоских волн, обсужденных во введении, и в случае цилиндрических волн. Это получается в предположении следующей нелинейной зависимости:

$$u = w\frac{\Sigma}{\Sigma+1}, \tag{33}$$

вместо (27). Подставляя в (33) условия (22), (23), найдем, что $w=U$. При $U=\mathrm{const}$ уравнение (12) линеаризуется:

$$\Sigma_\tau + w\Sigma_x + w\Sigma/x = 0, \tag{34}$$

решение которого есть $\Sigma(x,\tau)=\Sigma(x-w\tau)/x$ (здесь $\Sigma(x)$ - начальное распределение плотности). В отличие от плоской волны в цилиндрическом случае амплитуда стационарной волны убывает как $1/x$. Противоречие с предположением $U=\mathrm{const}$ устраняется в пределе малых амплитуд ($U\to 1$) с точностью лишь до линейных по $U-1$ членов.

3. *Волны в вязком диске.* Чтобы избежать многозначных решений, учтем вязкость газового диска. В правых частях уравнений (1) и (2) появятся члены $\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \upsilon_r}{\partial r}\right)-\frac{\upsilon_r}{r^2}\right]$ и $\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \upsilon_\varphi}{\partial r}\right)-\frac{\upsilon_\varphi}{r^2}\right]$ соответственно, где ν – коэффициент вязкости среды диска [9]. В безразмерных переменных будем иметь следующую параболическую систему:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\upsilon-\frac{\upsilon^2}{x}+\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x}=\nu_1\left[\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{u}{x^2}\right], \tag{35}$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial \tau}+u+\frac{u}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x\upsilon)=\nu_1\left[\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)-\frac{\upsilon}{x^2}\right], \tag{36}$$

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \tau}+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(xu)+u\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x}=0, \tag{37}$$

где $\nu_1=\nu\chi/c_s^2$. Оценки коэффициента вязкости для межзвездного газа в области "3 кпк"-рукава Галактики дают порядок 10^{25}-10^{26} см^2/с [2], откуда, принимая $c_s=10$ км/с и $\chi=90$ км/с кпк, получим $\nu_1\sim 0.03$-0.3.

Сколь бы малым ни был коэффициент ν_1, большие значения второй производной обеспечивают сглаживание профиля и предотвращают опрокидывание волны. В работе [8] система (35)-(37) численно решалась с применением явных конечно-разностных схем. Гладкие решения были получены для сравнительно больших значений $\nu_1>0.2$, при которых, однако, диссипация настолько велика, что волна быстро затухает. При меньших значениях на переднем фронте максимума образуются характерные для метода [6] осцилляции. Основная причина их возникновения заключена в характере функций распределений. Малый коэффициент вязкости хотя и обеспечивает непрерывное решение, но передний фронт становится настолько крутым, что наперед заданный шаг Δx становится неадекватным. Уменьшением Δx можно увеличить разрешающую способность решетки. Но при этом доминирующими становятся быстро накапливаемые ошибки, связанные с округлением и конечным представлением чисел в компьютере [7,13]. Использование в разностной схеме сплайн-аппроксимации по пространственной переменной [14] также не обеспечивает существенного увеличения точности метода при малых ν_1.

В связи с этим был применен метод конечных элементов [13] для решения системы (35)-(37), сходимость которого не ограничена условием $\Delta x \to 0$, как это имеет место для метода конечных разностей.

Область изменеия x делится на N интервалов (в общем случае не обязательно равных) и определяются N базисных функций $\varphi_i(x)$, отличных от нуля только в соответствующем интервале (x_{i-1}, x_{i+1}). Далее зависимые переменные разлагаются в конечный ряд по базисным функциям

$$u(x,\tau) = [\varphi(x)]\{u(\tau)\},\ \upsilon(x,\tau) = [\varphi(x)]\{\upsilon(\tau)\},\ \Sigma_1(x,\tau) = [\varphi(x)]\{\Sigma_1(\tau)\}, \qquad (38)$$

где квадратные скобки обозначают N-мерный вектор-строчку, фигурные – вектор-столбец.

В общем случае разложение (38) не будет удовлетворять системе (35)-(37), и после подстановки уравнения будут выполняться лишь с точностью до остаточных ошибок R_u, R_υ, R_Σ соответственно. Среди различных способов минимизации этих ошибок в данной работе был выбран метод Галеркина. Процедура сводится к требованию

$$\int_0^\infty R(x,\tau)\varphi_i(x)\,dx = 0 \qquad (39)$$

для всех функций $\varphi_i(x)$. В нашей задаче требованием (39) определяются $3N$ обыкновенных дифференциальных уравнения для $3N$ неизвестных функций $\{u(\tau)\}$, $\{\upsilon(\tau)\}$, $\{\Sigma_1(\tau)\}$.

Включение центра диска в рассмотрение позволило задать очевидные граничные условия при $x = 0$: $u(0,\tau) = \upsilon(0,\tau) = 0$. Поверхностная плотность по-прежнему не задавалась явно в начале координат. Неполное задание граничных условий не позволяет при раскрытии (39) интегрировать диссипативный член по частям, вводя граничные условия непосредственно в систему дифференциальных уравнений и уменьшая на единицу порядок дифференцирования базисных функций. Это означает, что функции $\varphi_i(x)$ должны быть по крайней мере двукратно дифференцируемы на отрезке

(x_{i-1}, x_{i+1}). Они были выбраны в виде многочленов четвертой степени, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\varphi_i(x_i) = 1,\ \varphi_i(x_{i-1}) = \varphi_i(x_{i+1}) = 0,\ \varphi_i'(x_{i+1}) = -\varphi_i'(x_{i-1}) = s. \tag{40}$$

Параметр s определяется из требования тождественного равенства нулю интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\varphi_i(x)\,dx = \int_0^\infty \sum_{j=1}^N u_j(\tau)\varphi_j''(x)\varphi_i(x)\,dx \equiv 0 \tag{41}$$

в случае не зависящего от x распределения $u(x,\tau) = u(\tau)$ (для такого распределения тождество $\int_0^\infty \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\varphi_i(x)\,dx \equiv 0$ выполняется автоматически при любом s) и равен $s = 0.035$.

Теперь можно в гиперматричной форме [15] легко вычислить коэффициенты в результирующей системе, которые имеют вид $I_k = \int_0^\infty \frac{1}{x^k}\varphi_j^{(n)}(x)\varphi_i(x)\,dx$ и $J_k = \int_0^\infty \frac{1}{x^k}\varphi_k^{(m)}(x)\varphi_j^{(n)}(x)\varphi_i(x)\,dx$ $(k, m = 0,1;\ n = 0,1,2)$. Для этой цели был использован чрезвычайно мощный и удобный пакет Mathematica 3.0. При $k = 1$ получаются довольно громоздкие функции от i. Расчеты можно упростить, заменяя величины $I_1^{-1}(i)$ и $J_1^{-1}(i)$ линейными интерполяционными формулами. При этом ошибка не превосходит 10^{-6} для $i > 4$. В рамках такого упрощения последние слагаемые в правых частях уравнений (35), (36) могут быть опущены. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решалась методом Рунге-Кутта в среде приложения Microsoft Excel 97.

Начальные условия, моделирующие взрывоподобный импульс поверхностной плотности диска, зададим в виде

$$\Sigma_1(x,0) = \upsilon(x,0) = 0,\ \ u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{M}{x_0}x, & 0 \le x < x_0 \\ Me^{-\alpha(x-x_0)^2}, & x \ge x_0. \end{cases} \tag{42}$$

Начальная функция распределения радиальной скорости представлена на рис.3а. Распространение указанного возмущения подчиняется следующим основным закономерностям.

Всюду положительное начальное распределение радиальной скорости приводит к образованию уплотнения, скорость распространения которого больше скорости максимума u. При этом практически все вещество сразу выталкивается из центральной области диска. Этот процесс продолжается

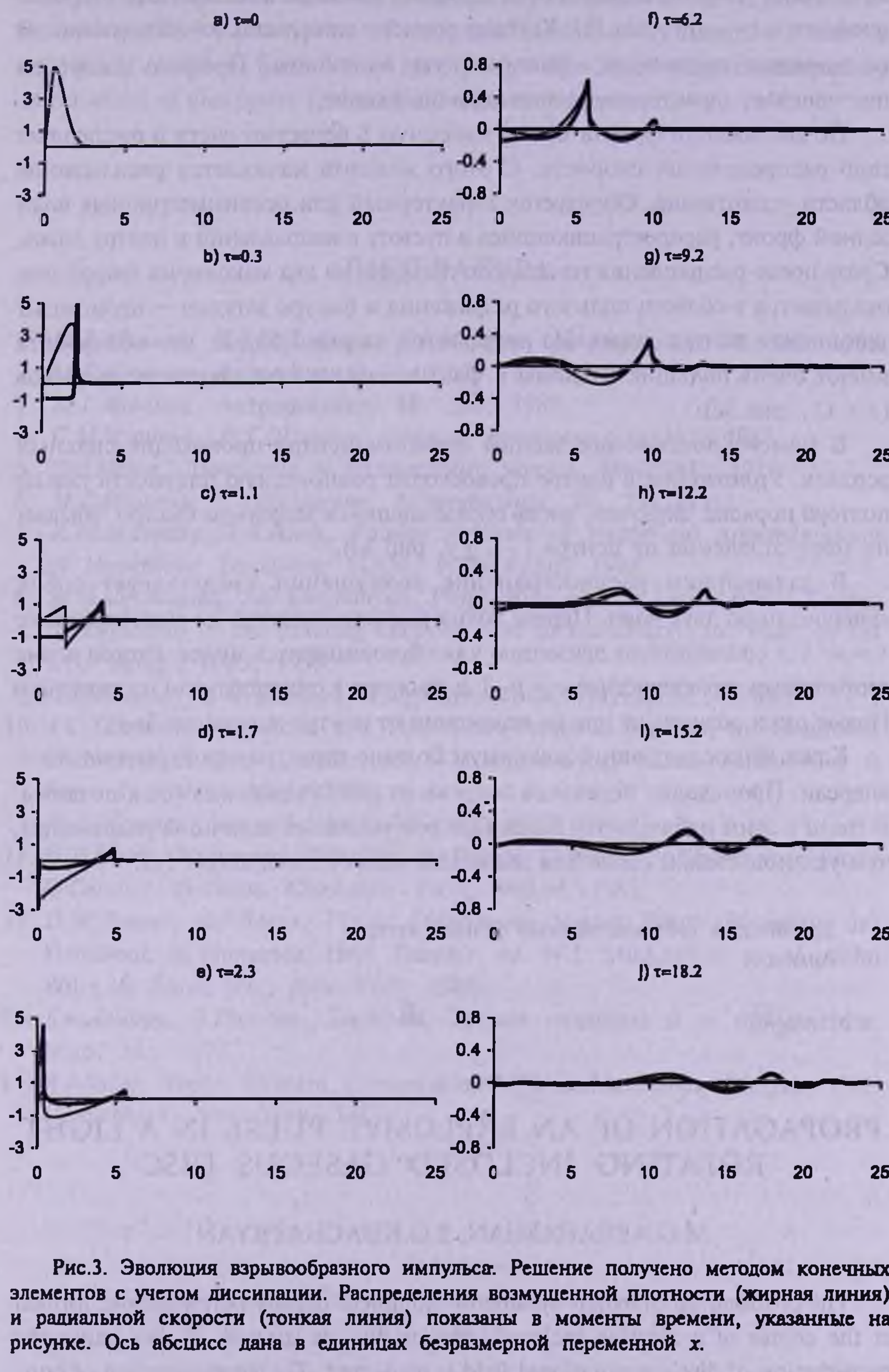

Рис.3. Эволюция взрывообразного импульса. Решение получено методом конечных элементов с учетом диссипации. Распределения возмущенной плотности (жирная линия) и радиальной скорости (тонкая линия) показаны в моменты времени, указанные на рисунке. Ось абсцисс дана в единицах безразмерной переменной x.

до тех пор, пока передний фронт профиля плотности не достигнет фронта профиля u ($\tau = 0.3$, рис.3b). К этому времени максимальное уплотнение на полпорядка превосходит равновесную плотность. Профиль скорости претерпевает характерное нелинейное искажение.

По достижении фронта $u(x,\tau)$ максимум Σ перестает расти и расщепляет горб распределения скорости. С этого момента начинается расплывание области уплотнения. Образуется характерный для осесимметричных волн задний фронт, распространяющийся в пустоту в направлении к центру диска. Сразу после расщепления начального профиля на два максимума второй пик оказывается в области сильного разряжения и быстро затухает — происходит заполнение центра диска. Из результатов на рис.3 видно, что оба фронта имеют очень большие наклоны и фактически не отличаются от разрывов ($\tau = 1.1$, рис.3c).

В момент достижения задним фронтом центра происходит сильный всплеск. Уплотнение в центре превосходит равновесную плотность уже на полтора порядка. Впрочем, вновь образовавшийся максимум быстро убывает по мере отдаления от центра ($\tau = 2.3$, рис.3d).

В дальнейшем распространение возмущения представляет собой суперпозицию двух волн. Первая волна распространяется по характеристике $c = u+1$ и соответствует движению уже образовавшихся пиков. Вторая волна соответствует характеристике $c = u-1$ и движется в отрицательном направлении. Новые пики возникают при ее отражении от центра диска (рис.3e-j).

Каждый последующий максимум больше пика, распространяющегося впереди. Происходит перекачка энергии от ранних максимумов к поздним. В связи с этим наблюдается более быстрое убывание величины уплотнений, чем установленный выше для движения одного пика закон $1/x$.

Ереванский государственный университет,
Армения

PROPAGATION OF AN EXPLOSIVE PULSE IN A LIGHT ROTATING INCLOSED GASEOUS DISC

M.G.ABRAHAMIAN, S.G.KHACHATRYAN

The propagation of axially symmetric nonlinear density perturbations, formed at the center of a rotating inclosed gaseous disc, is studied. In this paper the perturbation of disc's gravitational field is neglected. The approximation of continuous solutions, explored in the previous paper, is discussed. Two-dimensional system of hydrodynamic equations is numerically integrated along the characteristics and qualitative description of the peaks' motion away from the center is analytically obtained. Evolution of an explosion-like initial pulse is obtained by introduction of dissipative forces into the governing system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М.Г.Абрамян*, *Е.А.Михайлова*, *А.Г.Морозов*, Астрофизика, **24**, 167, 1986.
2. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **14**, 579, 1978.
3. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **18**, 350, 1982.
4. *С.М.Чурилов*, *И.Г.Шухман*, Астрон. циркуляр., N1157, 1981.
5. *Дж.Уизем*, Линейные и нелинейные волны, Мир, М., 1977.
6. *М.Г.Абрамян*, *С.Г.Хачатрян*, Астрофизика, **40**, 291, 1997.
7. *R.Vichnevetsky*, *J.B.Bowls*, Fourier Analysis of Numerical Approximations of Hyperbolic Equations, SIAM, Philadelphia, 1982.
8. *M.G.Abrahamian*, *S.G.Khachatryan*, Propagation of Non Linear Waves Caused by Explosion in the Rotating Gaseous Disc of the Galaxy, in: Proc. of 194 IAU Symp., BAO, 1999.
9. *Л.Д.Ландау*, *Е.М.Лифшиц*, Гидродинамика, Наука, М., 1988.
10. *J.C.Tannehill*, Hyperbolic and Hyperbolic-Parabolic Systems, in: Handbook of Numerical Heat Transfer, ed. W.J. Minkowycz, et. al., John Wiley & Sons, Inc.; New York, 1988.
11. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **22**, 487, 1985.
12. *G.D.Smith*, Numerical Solution of Partial Differential Equestions: Finite Difference Methods, Clarendon Press, Oxford, 1985.
13. *D.W.Pepper*, *A.J.Baker*, Finite Differences Versus Finite Elements, in: Handbook of Numerical Heat Transfer, ed. W.J. Minkowycz, et. al., John Wiley & Sons, Inc.; New York, 1988.
14. *Дж.Альберг*, *Э.Нильсон*, *Дж.Уолш*, Теория сплайнов и ее применения, Мир, М., 1972.
15. *A.J.Baker*, Finite Element Computational Fluid Mechanics, McGraw-Hill/ Hemisphere, New York, 1983.