АСТРОФИЗИКА

ТОМ 43 ФЕВРАЛЬ, 2000 ВЫПУСК 1

УДК: 524.74

ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ УГЛОВОГО МОМЕНТА ГАЛАКТИК. II

Л.П.ОСИПКОВ

Поступила 25 мая 1999
Принята к печати 15 октября 1999

Анализ уравнения Лагранжа-Якоби для нестационарных систем с отрицательной полной энергией позволяет найти верхний предел для углового момента нестационарных самогравитирующих систем, испытывающих так называемые квазигомологические вириальные колебания.

1. *Введение.* Продолжая наше исследование, рассмотрим в данной статье некоторые классы нестационарных вращающихся гравитирующих систем и покажем, что и для них существует ограничение на величину момента количества движения. Будем исходить из уравнения Лагранжа-Якоби

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\mathrm{T} + W$$

и закона сохранения энергии изолированной системы

$$T + W = E.$$

Здесь T - кинетическая, W - потенциальная, E - полная энергия системы. Потенциальная энергия

$$W = -k_1 G M^{5/2} I^{-1/2},$$

где G - гравитационная постоянная, M - масса, k_1 - безразмерный структурный множитель. Напомним также, что мы ввели эффективную угловую скорость

$$\omega = (2k_2)^{1/2} L I_R^{-1},$$

где L - угловой момент системы, I_R - момент инерции относительно оси вращения, k_2 - безразмерный структурный множитель, определяемый равенством $k_2 = KL^{-2} I_R$, где K - кинетическая энергия вращения. Эффективная сферичность системы $\varepsilon = (2I_z/I_R)^{1/2}$, где I_z - момент инерции относительно плоскости. Тогда $I_z/I = \varepsilon(2+\varepsilon^2)^{-1/2}$.

2. *Нестационарные квазигомологические системы.* Будем рассматривать специальный класс нестационарных систем, для которых в ходе эволюции $k_1 = \mathrm{const}$ (условие квазигомологичности). Тогда существует

интеграл уравнения Лагранжа - Якоби, который мы назвали интегралом инерционной энергии:

$$\frac{1}{2}\dot{I}^2 - \Pi(I) = \mathcal{E},$$

где

$$\Pi(I) = 4E + 4k_1 G M^{5/2} I^{1/2}$$

- так называемый потенциал инерции. Запишем этот интеграл в следующей форме:

$$\frac{1}{2}\dot{I}^2 - 4IT = \mathcal{E}. \qquad (1)$$

На этот раз кинетическая энергия $T = Q + K + S$, где $S \geq 0$ - кинетическая энергия вириальных колебаний, связанных с радиальными движениями центроидов. Тогда

$$4IK = (-\mathcal{E}) - 4I(Q+S) + \frac{1}{2}\dot{I}^2,$$

поэтому $K \leq \left[(-\mathcal{E}) + \frac{1}{2}\dot{I}^2\right] / (4I)$. Для стационарных систем это неравенство переходит в полученное выше. Переходя к угловому моменту L, находим, что

$$L^2 \leq \frac{1}{4k_2}\frac{I_R}{I}\left[(-\mathcal{E}) + \frac{1}{2}\dot{I}^2\right] = \frac{1}{2k_2}\frac{1}{2+k^2}\left[(-\mathcal{E}) + \frac{1}{2}\dot{I}^2\right]. \qquad (2)$$

В ходе квазигомологических вириальных колебаний величина $\dot{I}^2$ меняется (как и эффективная сферичность ε). Однако если $\mathcal{E} \leq 0, E \leq 0$, то интегральные кривые на фазовой полуплоскости $I \geq 0$, $\dot{I}$ являются замкнутыми овалами [5], так что величина $|\dot{I}|$ остается ограниченной. Поскольку $\frac{1}{2}(\dot{I}^2) = \mathcal{E} + \Pi(I)$, то получаем, что $\dot{I}^2$ достигает максимума при $\Pi'(I) = 0$, т.е. при $I = I_c$, где

$$I_c = (k_1^2/4) G^2 M^5 (-E)^{-2}. \qquad (3)$$

I_c - это такое значение момента инерции, при котором гравитирующая система с массой M и энергией E находится в состоянии вириального равновесия (является стационарной). Тогда

$$\frac{1}{2}(\dot{I}^2)_{\max} = \mathcal{E} + \Pi(I_c) = \mathcal{E} + 4I_c(-E), \qquad (4)$$

и

$$L^2 \leq \frac{2}{k_2}\frac{1}{2+\varepsilon^2} I_c(-E) \leq k_2^{-1} I_c(-E),$$

или

$$L^2 \le \left(k_2^{-1}k_1^2/4\right)G^2M^5(-E)^{-1}. \tag{5}$$

В последней форме неравенство (5) полностью совпадает с полученным в первой части работы неравенством (9), (14) для стационарных систем.

Для энергии вращения получаем , что $K \le (I/I_c)(-E)$ или $K \le 4(-W)(E/W)^3$, что отличается от неравенства $K \le (-W)$, следующего из закона сохранения энергии. Равенство достигается для "холодной" стационарной системы.

Физический смысл найденных неравенств состоит в том, что даже для нестационарных, но гравитационно связанных систем $(E \le 0!)$, момент вращения не может быть сколь угодно велик. Для астрономических приложений целесообразно ослабить последнее неравенство, заменив в нем E на W.

3. *Квазигомологические колебания.* Попытаемся уточнить полученное неравенство (5). Предположим, что параметр $\varepsilon^2 \ge 0$. Перепишем (2):

$$L^2 \le (4k_2)^{-1}\left[(-\mathcal{E}) + \frac{1}{2}\dot{I}^2\right].$$

Величина $\dot{I}^2$ является периодической функцией времени t с периодом $\mathcal{T}(E,\mathcal{E})$. Усредним последнее неравенство за период вириальных колебаний. Обозначим

$$C = (2\mathcal{T})^{-1}\int_0^{\mathcal{T}} \dot{I}^2 dt, \tag{6}$$

тогда

$$L^2 \le \frac{1}{4k_2}[(-\mathcal{E}) + C]. \tag{7}$$

Для нахождения величины C нужно знать решение уравнения Лагранжа - Якоби. Поскольку последнее не выражается в элементарных функциях, ограничимся вириальными колебаниями, близкими к положению равновесия.

Целесообразно перейти к безразмерным переменным. За единицу момента инерции возьмем I_c, единицу времени $-t_0 = \frac{1}{2}\left[I_c/(-E)\right]^{1/2}$. Обозначим $i = I/I_c$, $\tau = t/t_0$. Получим, что в безразмерной форме уравнение Лагранжа-Якоби записывается следующим образом:

$$d^2 i/d\tau^2 = -1 + i^{-1/2}. \tag{8}$$

Введем безразмерное отклонение от положения равновесия $\xi = i - 1$. Разлагая правую часть уравнения Лагранжа - Якоби (8) в ряд, сходящийся при $|\xi| \le 1$, перепишем его в следующем виде:

$$d^2\xi/d\tau^2 = -\lambda^2\xi+\psi(\xi), \qquad \psi(\xi)=\sum_{i=2}^{\infty}\alpha_i\xi^i, \tag{9}$$

где $\lambda^2 = 1/2$ - квадрат безразмерной частоты малых вириальных колебаний, $\alpha_2 = 3/8, \cdots$ Будем искать решение уравнения (9), удовлетворяющее начальным условиям

$$\xi(0)=c\geq 0, \qquad d\xi/d\tau(0)=0. \tag{10}$$

Методом Ляпунова можно получить [6], что

$$\xi = c\cos\tau^* + c^2\left(-\frac{3}{15}-\frac{1}{8}\cos\tau^* - \frac{1}{16}\cos2\tau^*\right)+O(c^3),$$

причем

$$\tau^* = \tau\lambda\left[1+c^2h+O(c^3)\right]^{-1}, \qquad h=-15/256. \tag{11}$$

Усредняя за период вириальных колебаний, находим, что

$$\left\langle (d\xi/d\tau)^2\right\rangle = \lambda^2c^2\left[(1/2)+(1/8)c+O(c^2)\right] \tag{12}$$

Вернемся к размерным величинам. Интересующая нас величина в неравенстве (7)

$$C=\frac{1}{2}(I_c/t_0)^2\left\langle (d\xi/d\tau)^2\right\rangle.$$

Подставляя (12), получаем, что

$$C=\frac{k_1^2}{2}\frac{G^2M^5}{(-E)}c^2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{8}c+O(c^2)\right]. \tag{13}$$

Вспомним, что в положении равновесия системы инерционная энергия $\mathcal{E}_c = k_1^2G^2M^5/E$. Легко найти, что величина c связана с относительным отклонением инерционной энергии от равновесного значения

$$\Delta\mathcal{E} = (\mathcal{E}-\mathcal{E}_c)/(-\mathcal{E}_c),$$

а именно,

$$\Delta\mathcal{E} = 2+c-2\sqrt{1+c}.$$

Для малых c

$$c^2 = 4\left[\Delta_\mathcal{E} + O(\Delta_\mathcal{E}^2)\right].$$

Тогда можно записать, что

$$C=\frac{1}{2}(\mathcal{E}-\mathcal{E}_c)\left[1+\frac{1}{4}c+O(c^2)\right]. \tag{14}$$

Заметим, что $\frac{1}{2}(\dot{I})^2_{\max} = \mathcal{E}-\mathcal{E}_c$. Таким образом, в результате усреднения по вириальным колебаниям соответствующий член в неравенстве (7) для L^2

уменьшился примерно вдвое. Это не удивительно: вблизи положения равновесия интегральные кривые на полуплоскости $I \ge 0, \dot I$ почти симметричны относительно прямой $I = I_c$.

4. *Неквазигомологические системы.* Для неоднородных гравитирующих систем условие квазигомологичности, вообще говоря, в точности не выполняется. Согласно численным экспериментам вириальные колебания являются менее правильными и их амплитуда со временем уменьшается. Это означает, что в уравнении Лагранжа - Якоби множитель k_1 не является постоянным и интеграл инерционной энергии не существует. Справедлива, однако, следующая важная теорема, доказанная Хильми [1]: если для всех $t \ge 0$ выполняется неравенство $0 \le I(t) \le k < \infty$, то для любых $\delta \ge 0$, $T_k \ge 0$ найдется такое $t' \ge T_k$, что $|W(t') - 2E| \le \delta$. Это означает, что система колеблется относительно положения равновесия.

Если отклонения от квазигомологичности заметны лишь на интервалах времени, много бо́льших периода вириальных колебаний, то вместо интеграла инерционной энергии можно использовать соответствующий адиабатический инвариант $\mathcal{J}$. По общему правилу

$$\mathcal{J} = \oint \left[2(\mathcal{E} + \Pi(I))\right]^{1/2} dI .$$

Мы ограничимся случаем систем, настолько близких к равновесному состоянию, что их квазигомологические вириальные колебания можно считать гармоническими [2,3]. Тогда

$$\mathcal{J} = (-\mathcal{E})\mathcal{T}(E,\mathcal{E})/(2\pi). \tag{15}$$

Из приведенных выше соотношений (3), (11) получаем, что

$$\mathcal{T} = t_0(2\pi/\lambda) = (\pi/2)(2I_c)^{1/2}(-E)^{-1/2},$$

тогда в нашем приближении

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{4}(2I_c)^{1/2}(-E)^{-1/2}\left[\frac{1}{2}\dot I^2 - \Pi(I)\right], \tag{16}$$

или, в развернутой форме,

$$\mathcal{J} = \frac{-k_1}{4\cdot 2^{1/2}}\frac{GM^{5/2}}{(-E)^{3/2}}\left[\frac{1}{2}\dot I^2 - 4IT\right] = \frac{1}{4\cdot 2^{1/2}}(-E)^{-3/2}(-W)I^{1/2}(-\mathcal{E}).$$

Дальнейший анализ проводится так же, как и для квазигомологических систем с заменой в (2) или (7) и (14) $(-\mathcal{E})$ на $4\left(2^{1/2}/k_1\right)(-E)^{3/2}\mathcal{J}/\left(GM^{5/2}\right)$. Адиабатический инвариант можно использовать и при учете изменения энергии системы E и массы M. Обычный интеграл энергии в этих случаях уже нельзя использовать, а соответствующий ему адиабатический инвариант не существует (вследствие некомпактности инвариантных многообразий в фазовом пространстве задачи N тел).

5. *Скопление на однородном фоне*. Рассмотрим звездную систему (скопление), расположенную в однородном, изотропном и стационарном гравитирующем фоне плотности ν. Запишем обобщение уравнения Лагранжа-Якоби для такой системы, найденное Дубошиным и Рыбаковым [4]:

$$d^2 I/dt^2 = 4H - 2W - 4æ^2 I, \tag{17}$$

где

$$H = T + W + \frac{1}{2}æ^2 I = \text{const}. \tag{18}$$

- обобщение интеграла энергии, а æ - частота колебаний пробного тела в фоне, т.е. $æ = (4/3)\pi G\nu$. Теперь потенциал инерции

$$\Pi(I) = 4HI + 4k_1 GM^{5/2} I^{1/2} - 2æ^2 I^2 = 4I\left(H - W - \frac{1}{2}æ^2 I\right). \tag{19}$$

Интеграл инерционной энергии

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\dot{I}^2 - 4IT. \tag{20}$$

Дальнейшее исследование проводится так же, как и для изолированной системы (с учетом ограниченности интервала возможных значений I). Качественный анализ обобщенного уравнения Лагранжа-Якоби (17), (18) выполнил автор [5,6], а его аналитическое решение нашел Кожанов [7]. Вместо обычного интеграла момента количества движения изолированной системы при этом следует использовать так называемые интегралы Чандрасекара (см. [6]).

6. *Основные результаты*. Использование вместо теоремы вириала интеграла инерционной энергии позволяет перенести результаты первой части работы на нестационарные квазигомологические гравитируюшие системы. Найденное ограничение сверху на квадрат углового момента таких систем имеет в точности такой же вид, как и для стационарных систем. Усреднение за период квазигомологических "вириальных" колебаний системы позволяет снизить этот верхний предел. Подобная процедура была проделана в явном виде для случая слабой нестационарности. Использование вместо интеграла инерционной энергии адиабатического инварианта вириальных колебаний позволяет исследовать и системы, не являющиеся квазигомологическими.

Данное исследование отчасти поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 95-02-05007 и 96-02-19658) и выполнено в соответствии с Государственной комплексной научно-технической программой России "Астрономия" (проект 1.2.4.5.). Автор благодарен С.А.Кутузову за полезные замечания.

Санкт-Петербургский государственный универститет,
Россия

THE UPPER LIMIT FOR ANGULAR MOMENTUM OF GALAXIES. II

L.P.OSSIPKOV

An analysis of the Lagrange-Jacobi's equation for negative energy systems allows to find the upper limit for angular momentum for time-dependent selfgravitating systems oscillating quasi-homologically.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г.Ф.Хильми,* Докл. АН СССР, **70**, 393, 1950.
2. *Su-Shu Huang*, Astron. J., **59**, 137, 1954.
3. *D.Lynden-Bell*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **136**, 101, 1967.
4. *Г.Н.Дубошин*, *А.И.Рыбаков*, Астрон. ж., **46**, 895, 1969.
5. *Л.П.Осипков*, в кн.: "Звездные скопления и проблемы звездной эволюции", Изд. Уральск. ун-та, Свердловск, 1983, с. 20.
6. *Л.П.Осипков*, Вестн. С.-Петербургск. ун-та, сер. 1, вып. 1, 125, 1993.
7. *Т.С.Кожанов*, в кн.: "Звездные скопления и проблемы звездной эволюции", Изд. Уральск. ун-та, Свердловск, 1983, с. 111.