АСТРОФИЗИКА

ТОМ 42 АВГУСТ, 1999 ВЫПУСК 3

УДК: 524.8

ФРИДМАНОВСКАЯ КОСМОЛОГИЯ КАК ГЛОБАЛЬНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ В ДИНАМИКЕ ОТО

В.В.ПАПОЯН[1], В.Н.ПЕРВУШИН[2], В.И.СМИРИЧИНСКИЙ[2]

Поступила 4 сентября 1998
Принята к печати 10 января 1999

В сформулированной в терминах конформно-инвариантных переменных эйнштейновской теории гравитации вводится переменная глобального возбуждения, как зависящий только от времени множитель конформного фактора метрики. Динамика этого глобального возбуждения выделяется из уравнений Эйнштейна прямым усреднением их динамической части по большим пространственным объемам. Найдены условия, при которых эта динамика повторяет динамику фридмановской космологической модели.

1. *Введение.* Недавно предложена космологическая модель [1-3], суть которой состоит в выборе конформных переменных и полном отделении динамических степеней свободы от связанных с репараметризацией времени нефизических переменных. Это отделение достигается благодаря каноническому преобразованию масштабного фактора и сопряженного ему импульса [4,5]. В результате связь первого рода становится линейной функцией нового импульса. Точное разрешение такой связи позволяет отождествить новый импульс с энергией материального источника, а новый масштабный фактор - в инвариантный временной параметр эволюции.

Такое превращение компоненты метрического тензора во "время" решает проблему нормируемости волновой функции и позволяет установить связь с данными наблюдательной космологии [2,3].

В настоящей работе, используя АДМ-параметризацию [6,7] и конформно-инвариантные полевые переменные Лихнеровича [8-10], из метрики ОТО выделяется зависящий лишь от времени множитель конформного фактора метрики и анализируется его динамика.

2. *Модель и переменные.* Рассмотрим систему гравитационного и электромагнитного полей, исходя из действия Гильберта-Эйнштейна

$$W=\int d^4x\sqrt{-g}\left[-\mu^2\frac{{}^{(4)}R(g)}{6}-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right];\quad \left(\mu^2=M_{PL}^2\frac{3}{8\pi}\right) \qquad (1)$$

($F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, M_{PL} — масса Планка). Это действие инвариантно относительно общекоординатных преобразований:

$$x_\mu \Rightarrow x'_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3). \qquad (2)$$

В гамильтоновом подходе удобно выбрать хорошо известную параметризацию метрики [6,7]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \equiv N^2dt^2 - g_{ij}^{(3)}\breve{d}x^i\breve{d}x^j; \quad \left(\breve{d}x^j = dx^j + N^j dt\right), \qquad (3)$$

где N - функция смещения, а N^i — вектор сдвига. Такая параметризация редуцирует явную инвариантность действия (1) относительно (2) к инвариантности относительно кинеметрических преобразований [7]

$$t \Rightarrow t' = t'(t); \qquad x_i \Rightarrow x'_i = x'_i(t, x_1, x_2, x_3). \qquad (4)$$

Введем в (1) конформно-инвариантные переменные [8-10]:

$$h_{ij} = \left(\left\|g^{(3)}\right\|\right)^{-1/3} g_{ij}^{(3)}; \qquad \sqrt{h} = 1 \qquad (5)$$

и в соответствии с этим перепишем пространственно-временной интервал в виде

$$(ds)^2 = a^2(t,x)\left[N_c^2dt^2 - h_{ij}\breve{d}x^i\breve{d}x^j\right]; \qquad a = \left\|g^{(3)}\right\|^{1/6}, \qquad (6)$$

где квадрат пространственного масштаба $a(t,x)$ является также конформным фактором.

В терминах переменных $[a, N_c, N^k, h_{ij}]$ действие (1) записывается следующим образом:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x\left[L_{(a)} + L_{(h)} + L_{(A)} + L_{(S)}\right], \qquad (7)$$

где пространственный поверхностный член

$$L_{(S)} = -\mu^2\left[\partial_k\left(N^k a \overset{\odot}{a}\right) + \frac{1}{3}\partial_k\left(a\,\partial^k(aN_c)\right)\right], \qquad (8)$$

а

$$L_a = \mu^2\left[\partial_0\left(a\overset{\odot}{a}\right) - N_c\overset{\odot}{a}{}^2\right]; \quad \overset{\odot}{a} = \frac{1}{N_c}\left(\dot{a} - N^k\,\partial_k a - \frac{a\,\partial_k N^k}{3}\right), \qquad (9)$$

$$L_h = \frac{\mu^2}{6}a^2N_c\left[\frac{\overset{\odot}{h}{}^2}{4} - \overline{R}(h)\right]; \quad \overline{R} = {}^{(3)}R(h) + 8\,a^{-1/2}\,\Delta\,a^{1/2}, \qquad (10)$$

$$L_A = N_c\frac{1}{2}\left[\overset{\odot}{A}{}^2 - \frac{1}{2}F_{ij}F^{ij}\right]; \quad \overset{\odot}{A}_k = \frac{1}{N_c}\left(\dot{A}_k - \partial_k A_0 - N^l F_{lk}\right). \qquad (11)$$

В эти выражения введена кинеметрически инвариантная временная производная

$$\overset{\odot}{h}_{ij} = \frac{1}{N_c}\left(\dot{h}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i + \frac{2}{3} h_{ij}\,\partial_k N^k\right),$$

$$\overset{\odot}{h}{}^2 = \overset{\odot}{h}_{ij}\,\overset{\odot}{h}_{kl} h^{ik} h^{jl}; \qquad \overset{\odot}{A}{}^2 = \overset{\odot}{A}_k\,\overset{\odot}{A}_l h^{kl} \tag{12}$$

∇_i ковариантная производная в метрике h_{ij}, а $\Delta(\ldots) = \nabla_k \partial^k(\ldots)$.

Полезно отметить мизнеровскую параметризацию пространственного масштаба и функции смещения [11]

$$\alpha = \exp(-\omega); \quad N_c = N_\omega \exp(-2\omega). \tag{13}$$

В этой параметризации часть действия, связанная с (9), принимает вид

$$W_{(\alpha)} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x\, \mu^2 \left[-\partial_0 \overset{\odot}{\omega} - N_\omega \overset{\odot}{\omega}{}^2 \right], \tag{14}$$

$$\overset{\odot}{\omega} = \frac{1}{N_\omega}\left(\dot{\omega} - N^k \partial_k \omega + \frac{1}{3}\partial_k N^k\right). \tag{15}$$

3. *Глобальное возбуждение.* В группе кинеметрических преобразований (4) выделена глобальная подгруппа репараметризации времени $t \mapsto t' = t'(t)$. Инвариантность относительно репараметризации времени в системах, подобных рассматриваемой, означает, что одна из исходных динамических переменных превращается в инвариантный параметр эволюции [1,3].

В работах [9,10] указывалось на возможность выбора такой переменной в ОТО (инвариантный параметр эволюции), которая пропорциональна следу второй квадратичной формы (13).

В отличие от [9,10], мы предположим, что след второй квадратичной формы может быть разложен на глобальное и локальное возбуждения:

$$\omega(x,t) \overset{\text{def}}{\equiv} \omega_0(t) + \underline{\omega}(x,t), \tag{16}$$

$$\overset{\odot}{\omega}(x,t) \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{\dot{\omega}_0(t)}{N_\omega} + \overset{\odot}{\underline{\omega}}(x,t), \tag{17}$$

с дополнительным условием

$$\int d^3x\, \overset{\odot}{\underline{\omega}}(x,t) = 0. \tag{18}$$

В этом случае лагранжиан (9) принимает вид

$$L_a = \mu^2 \left[-\dot{\omega}_0 V_0 - \dot{\omega}_0^2 \left(N_\omega^0\right)^{-1} V_0 - \int d^3x\, \overset{\odot}{\underline{\omega}}{}^2 \right], \tag{19}$$

где

$$V_0\left(N_\infty^0\right)^{-1} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \int d^3x\, N_\infty^{-1} \tag{20}$$

есть нулевая мода мизнеровской функции смещения, а V_0 — параметр объема.

Перейдем далее к конформным переменным, используя преобразования

$$N_c = N_\infty \exp(-2\omega) = \left[N_\infty^0 \exp(-2\omega_0)\right]\left(\underline{N_\infty}\exp(-2\omega)\right) = \left[N_0\right]\left(\underline{N_c}\right), \tag{21}$$

$$a = \exp(-\omega) = \exp(-\omega_0)\exp(-\underline{\omega}) = a_0(t)\underline{a}(x,t). \tag{22}$$

4. ***Динамика глобального возбуждения***. Уравнение на глобальное возбуждение

$$\int d^3x \underline{N_c}\frac{\delta W}{\delta N_c} = 0; \quad \frac{\delta W}{\delta a_0} = 0 \tag{23}$$

может быть получено из действия

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\sum_F \overset{\circledcirc}{F} P_F + P_0\dot{a}_0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{P_0 a_0}{2}\right) - N_0 H_E\right], \tag{24}$$

где

$$\sum_F \overset{\circledcirc}{F} P_F \equiv \int d^3x\left[\overset{\circledcirc}{a} P_{(a)} + \overset{\circledcirc}{h} P_{(h)} + \overset{\circledcirc}{A} P_{(A)}\right], \tag{25}$$

$P_{(a,h,A)}$ - импульсы

$$P_0 = \frac{\partial L_{(a)}}{\partial \dot{a}_0}; \quad P_h = \frac{\partial L_{(h)}}{\partial \overset{\circledcirc}{h}}; \quad P_A = \frac{\partial L_{(A)}}{\partial \overset{\circledcirc}{A}}; \quad \underline{P}_a = \frac{\partial L_{(a)}}{\partial \underline{\dot{a}}}, \tag{26}$$

$$H_E = V_\mu\left\{-\left[\frac{P_0}{2V_\mu}\right]^2 + a_0^{-2}\langle K\rangle + a_0^2\langle\overline{R}\rangle + \langle H_A\rangle\right\} \tag{27}$$

и

$$V_\mu = \mu^2 V_0; \quad \langle K\rangle = \frac{1}{V_\mu}\int d^3x \frac{\underline{N_c}}{\mu^2}\left[-\frac{\underline{P}_a^2}{4} + \frac{6P(\mu)}{\underline{a}^2}\right], \tag{28}$$

$$\langle\overline{R}\rangle = \frac{1}{6V_0}\int^3 x\, \underline{N}_c \underline{a}^2\, \overline{R}; \quad \langle H_A\rangle = \frac{1}{V_\mu}\int d^3x\, \overline{N}_c H_A. \tag{29}$$

H_A - плотность энергии электромагнитного поля (11)

$$H_A = \frac{1}{2}\left[\dot{P}_A^2 + F_{ij}F^{ij}/2\right]. \tag{30}$$

В (24) глобальное возбуждение $a_0(t)$ может трактоваться как инвариантный временной параметр эволюции [3], если ввести следующие переобозначения:

$$dt\frac{dF}{dt}=da_0\frac{dF}{da_0};\quad dt\left(\frac{d\,a_0}{dt}\right)=da_0;\quad F(t)=\overline{F}\bigl(a_0(t)\bigr), \tag{31}$$

и в качестве генератора эволюции выбрать импульс P_0 как решение связи $H_E=0$:

$$H_E=0\rightarrow\ \frac{P_0}{2V_\mu}=\pm\left[a_0^{-2}\langle K\rangle+a_0^2\langle R\rangle+\langle H_A\rangle\right]^{1/2}\equiv\pm\wp. \tag{32}$$

Тогда как эволюция глобального возбуждения a_0 по отношению к инвариантному времени

$$N_0 dt=d\,\eta \tag{33}$$

следует из определения импульса (26)

$$\frac{da_0}{d\,\eta}=-\frac{P_0}{2V_\mu}=\mp\wp(a_0). \tag{34}$$

Решение этого уравнения приводит к выражению, совпадающему по форме с фридмановской для эволюции Вселенной:

$$\eta_{(\pm)}(a_0)=\pm\int\limits_0^{a_0}d\,\tau\,\wp^{-1}(\tau). \tag{35}$$

В соответствии с двумя решениями (32) для времен, в которых эволюционирует Вселенная, получаются две возможности $\eta_{(+)}(a_0)$ и $\eta_{(-)}(a_0)$. Уравнения движения физических переменных определяются действием

$$W_{(\pm)}^{Red}=\int\limits_{a_0(1)}^{a_0(2)}d\,a_0\left[\sum_F\overset{\circ}{F}\,\overline{P}_F\mp2\wp V_\mu\right]\pm\wp V_\mu\Big|_{a_0(1)}^{a_0(2)}. \tag{36}$$

Переменная a_0 исключена из набора независимых физических переменных [1,3], как и в мизнеровской модели [11]. Зависимость a_0 от конформного времени может трактоваться как закон Хаббла.

5. *Космология*. Временной параметр η и время во фридмановской космологической модели t_f (время в синхронной системе отсчета) связаны следующим образом:

$$t_f(\eta)=\int\limits_0^{\eta}d\,\overline{\eta}\,a_0(\overline{\eta}). \tag{37}$$

А энергия радиации в той же модели определяется соотношением

$$E_f=\frac{\langle H_A\rangle}{a_0(\eta)}=\frac{\langle H_A\rangle}{a_0(t_f)}. \tag{38}$$

Для вывода закона Хаббла, в рассматриваемом подходе, достаточно перейти к пределу больших значений a_0

$$a_0^2\langle\overline{R}\rangle+\langle H_A\rangle \gg \frac{\langle K\rangle}{a_0^2}. \qquad (39)$$

В этом случае формула для красного смещения спектральных линий

$$Z=\frac{E(t_f-D_f)}{E(t_f)}-1=D_f H_0(t_f)+O(D_f^2), \qquad (40)$$

в соответствии с (38), ведет к стандартному определению константы Хаббла,

$$H_0(t_f)=\frac{1}{a(t_f)}\frac{da}{dt_f}. \qquad (41)$$

Константа $\langle\overline{R}\rangle$ играет роль кривизны в эффективном метрическом пространстве Фридмана-Робертсона-Уолкера

$$\langle\overline{R}\rangle=\frac{k}{r_0^2}, \quad k=\pm 1,0. \qquad (42)$$

В области малых a_0, когда

$$\langle K\rangle \gg a_0^2\langle H_A\rangle+\langle\overline{R}\rangle a_0^4, \qquad (43)$$

можно пренебречь как членами, пропорциональными $<H_A>$, так и $\langle\overline{R}\rangle$. Тогда $<K>$ становится интегралом движения, и мы приходим к мизнеровской космологии [11] пространства Бьянки I.

6. *Заключение*. В использующей конформно-инвариантные переменные формулировке ОТО выделена глобальная часть масштабного фактора и рассмотрены ее динамические свойства. Введение глобальной переменной, в случае АДМ-параметризации действия, приводит к факторизации функции смещения, разделяющей коллективную и локальную части. И, как следствие этого расщепления, получено два инвариантных временных параметра: "глобальный масштабный фактор" и конформное время, которое формируется глобальной частью функции смещения. Решение уравнений для глобальной части масштабного фактора и функции смещения может быть представлено в форме интегралов, описывающих фридмановскую эволюцию Вселенной. В то же время, локальная динамика определяется редуцированным гамильтонианом и зависит от глобальной моды точно.

Когда глобальная часть масштабного фактора мала, рассмотренная система эквивалентна анизотропной мизнеровской Вселенной пространства Бьянки I. В противоположном случае глобальная динамика повторяет динамику фридмановской космологической модели.

Выделение глобальной переменной и глобальной динамики стало возможным благодаря прямому усреднению скалярной комбинации динамических уравнений Эйнштейна по большим пространственным объемам. В рассматриваемом случае такой комбинацией явилась скалярная кривизна. Если считать пространство однородным и изотропным (как это принято в случае крупномасштабного усреднения), а состояние вещества описывать тензором энергии - импульса идеальной жидкости, то, как и должно было быть, мы приходим к космологической модели Фридмана. Важно отметить, что глобальная динамика учитывает также и непертурбативные локальные вклады гравитационного поля, которые никак не могут быть учтены стандартной техникой космологической теории возмущения.

Авторы благодарны проф. П.Айчельбургу, Б.М.Барбашеву, С.Гогелидзе, А.Хведелидзе и В.Куммеру за полезные обсуждения и замечания.

[1] Ереванский государственный университет,
Армения
[2] Объединенный институт ядерных исследований,
Дубна, Россия

FRIEDMAN'S COSMOLOGY AS GLOBAL EXITATION IN DYNAMICS OF GENERAL RELATIVITY

V.PAPOYAN, V.PERVUSHIN, V.SMIRICHINSKY

The General Relativity is formulated in terms of conformal invariant variables and introduced a global exitation variable as a time part of the metrics conformal factor. We extract the dynamics this global exitation from the Einstein equation of gravity. We found conditions for which this dynamics repeats the dynamics of standard cosmological model.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.Khvedelidze*, *V.Papoyan*, *V.Pervushin*, Phys. Rev., **D 51**, 5654, 1995.
2. *V.N.Pervushin et al.*, Phys. Let., **B 365**, 35, 1996.
3. *S.Gogilidze et al.*, "Gravitation and Cosmology", **3**, 17, 1997; *A.Khvedelidze*, *Yu.Palii*, *V.Papoyan*, *V.Pervushin*, Phys. Let., **B 402**, 263, 1997.
4. *S.A.Gogilidze*, *A.M.Khvedelidze*, *V.N.Pervushin*, Phys. Rev., **D 53**, 2160, 1996; *S.A.Gogilidze*, *A.M.Khvedelidze*, *V.N.Pervushin*, J. Math. Phys., **37**, 1760, 1996.

5. *T.Levi-Civita*, Prace Mat.-Fiz., 17, 1, 1906; *S.Shanmugadhasan*, J. Math. Phys., **14**, 677, 1973.
6. *R.Arnowitt*, *S.Deser*, *C.Misner*, Phys. Rev., **117**, 1595, 1960.
7. *A.L.Zelmanov*, Dokl.AN USSR, **107**, 315, 1956; ibid **209**, 822, 1973.
8. *A.Lichnerovicz*, J. Math. Pures and Appl., **23**, 37, 1944.
9. *James W.York*, Phys. Rep. Lett., **28**, 1082, 1972; ibid **26**, 1656, 1971.
10. *K.Kuchar*, J. Math. Phys., **13**, 768, 1972.
11. *C.Misner*, Phys. Rev., **186**, 1319, 1969.