АСТРОФИЗИКА

ТОМ 42 АВГУСТ, 1999 ВЫПУСК 3

УДК: 52+530.145+519.222

НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНОЙ СРЕДЕ

Д.М.СЕДРАКЯН, А.Ж.ХАЧАТРЯН

Поступила 1 июня 1999

В данной работе получена система линейных дифференциальных уравнений, определяющая амплитуду отражения R и амплитуду прохождения T для плоской волны (или электрона) и для произвольной среды (или одномерного потенциала произвольного вида). Показано, что задача определения параметров рассеяния R и T, в общем виде, сводится к задаче Коши для стационарного волнового уравнения (или для уравнения Шредингера).

1. *Введение.* Как известно, одной из важных задач астрофизики является проблема изучения явления переноса световой энергии в различных случайно-неоднородных средах и, в частности, в среде с произвольным неоднородным показателем преломления [1]. В данной работе предложен новый метод решения задачи о распространении плоской электромагнитной волны в одномерной линейной среде с произвольным показателем преломления. При получении дифференциальных соотношений, описывающих распространение волны в одномерной среде, нами используется метод В.А.Амбарцумяна "о добавлении слоя к среде". Полученные соотношения точно учитывают все интерференционные эффекты.

Рассмотрим стационарное волновое уравнение, которому удовлетворяет амплитуда волны в одномерной среде;

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left(E-V(x)\right)\psi(x)=0, \qquad (1)$$

где $V(x)$ - произвольная, ограниченная по всей оси x функция, стремящаяся к нулю при $x \to \pm\infty$. В случае электромагнитной волны E представляет собой ω^2/c^2, а $V(x)=\omega^2/c^2\left(1-n^2(x)\right)$, где $n(x)$ - показатель преломления среды, ω - частота света, c - скорость света. Отметим, что записанное в виде (1) волновое уравнение совпадает со стационарным уравнением Шредингера ($\hbar^2=2m=1$), и в этом случае, E - энергия электрона, $V(x)$ - потенциал рассеяния. Ясно, что с математической точки зрения, задачи рассеяния электромагнитной волны или электрона равносильны.

Пусть ассимптотический вид решения уравнения (1) имеет вид

$$\psi(x) = e^{ik_0x} + R(k_0)e^{-ik_0x}, \quad \text{при } x \to -\infty,$$
$$\psi(x) = T(k_0)e^{ik_0x}, \quad \text{при } x \to \infty, \tag{2}$$

где $k_0 = \sqrt{E}$. Величины $R(k_0)$ и $T(k_0)$ являются амплитудами отражения и прохождения волны.

Задача состоит в вычислении $R(k_0)$ и $T(k_0)$ по заданному виду функции $V(x)$.

2. *Рекуррентные соотношения для T_N и R_N.* Прежде чем рассматривать задачу (1), (2), рассмотрим задачу рассеяния волны на одномерной системе из конечного числа однородных слоев. Как известно, в этом случае задача определения R и T сводится к задаче вычисления произведения матриц второго порядка [2,3]

$$\begin{pmatrix} 1/T_N^* & -R_N^*/T_N^* \\ -R_N/T_N & 1/T_N \end{pmatrix} = \prod_{n=N}^{1} \begin{pmatrix} 1/t_n^* & -r_n^*/t_n^* \\ -r_n/t_n & 1/t_n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где T_N, R_N - параметры рассеяния системы, N - число однородных сред, r_n и t_n - параметры рассеяния n-ого однородного слоя [4];

$$\frac{1}{t_n} = e^{2ik_0d_n}\left[\cos 2k_nd_n - i\frac{k_n^2 + k_0^2}{2k_nk_0}\sin 2k_nd_n\right], \tag{4}$$

$$\frac{r_n}{t_n} = \frac{i}{2k_nk_0}e^{2ik_0x_n}\left(k_n^2 - k_0^2\right)\sin 2k_nd_n. \tag{5}$$

В (4), (5) $k_0 = \sqrt{E}$ и $k = \sqrt{E - V_n}$. Величины V_n характеризуют значение функции $V(x)$ в n-ом слое, x_n - координата середины n-ого слоя.

Как было показано в работе [5], задача (3) в общем виде сводится к задаче решения некоторой системы конечно-разностных уравнений. Введем следующие обозначения

$$\begin{pmatrix} 1/T_{N-1}^* & -R_{N-1}^*/T_{N-1}^* \\ -R_{N-1}/T_{N-1} & 1/T_{N-1} \end{pmatrix} = \prod_{n=N-1}^{2} \begin{pmatrix} 1/t_n^* & -r_n^*/t_n^* \\ -r_n/t_n & 1/t_n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Как ясно из (6), T_{N-1} и R_{N-1} являются амплитудами отражения и прохождения волны для системы, в которой отсутствуют 1-й и N-й однородные слои.

Непосредственно из (3) и (6), для величин $S_N = 1/T_N$ и $\bar{S}_N = R_N/T_N$, относительно дискретной переменной N, можно получить следующую систему разностных уравнений:

$$S_N = \frac{1}{t_Nt_1}S_{N-1} + \frac{r_Nr_1^*}{t_Nt_1^*}S_{N-1}^* + \frac{r_1}{t_Nt_1^*}\bar{S}_{N-1} + \frac{r_N}{t_Nt_1}\bar{S}_{N-1}^*, \tag{7}$$

$$\bar{S}_N = \frac{1}{t_Nt_1^*}\bar{S}_{N-1} + \frac{r_Nr_1}{t_Nt_1}\bar{S}_{N-1}^* + \frac{r_1}{t_Nt_1}S_{N-1} + \frac{r_N}{t_Nt_1^*}S_{N-1}^*. \tag{8}$$

Полученные соотношения (7) и (8) могут быть использованы для решения задачи (1)-(2), так как произвольная функция $V(x)$ (1) может быть с любой заданной точностью апроксимирована с помощью системы из однородных слоев.

3. *Дифференциальные уравнения для* $T(x)$ *и* $R(x)$. Введем функции $S(x_1,x_2)=1/T(x_1,x_2)$ и $\overline{S}(x_1,x_2)=R(x_1,x_2)/T(x_1,x_2)$, где $T(x_1,x_2)$ и $R(x_1,x_2)$ являются амплитудами прохождения и отражения волны от части "функции" $V(x)$, заключенной между точками x_1 и x_2. Так, если $x_1<x_2$

$$V(x,x_1,x_2)=V(x)\theta(x-x_1)\theta(x_2-x), \qquad (9)$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда.

Тогда функция $V(x,x_1-\Delta x_1,x_2+\Delta x_2)$, т.е. часть $V(x)$, заключенная между точками $x_1-\Delta x_1$ и $x_2+\Delta x_2$, где Δx_1 и Δx_2 малые величины, будет выглядеть как функция $V(x,x_1,x_2)$ (9), с добавленными к ней однородными слоями. Причем слой, добавленный слева, будет характеризоваться значением функции $V(x_1)$ и шириной Δx_1 , а слой, добавленный справа – параметрами $V(x_2)$ и Δx_2.

Из (4) и (5) для амплитуд отражения и прохождения бесконечно узкого слоя имеем

$$t_n=1+\frac{iV_n}{2k_0}, \quad r_n=-\frac{iV_n}{2k_0}e^{2ik_0x_n}. \qquad (10)$$

Подставляя в (7), (8) $S_N=S(x_1-\Delta x_1,x_2+\Delta x_2)$ и $\overline{S}_N=\overline{S}(x_1-\Delta x_1,x_2+\Delta x_2)$, $S_{N-1}=S(x_1,x_2)$, $\overline{S}_{N-1}=\overline{S}(x_1,x_2)$ и разлагая полученные соотношения относительно малых Δx_1 и Δx_2, с учетом (10) можно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}=-\frac{iV(x_1)}{2k_0}S-\frac{iV(x_1)}{2k_0}e^{-2ik_0x_1}\overline{S}, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial x_1}=\frac{iV(x_1)}{2k_0}\overline{S}+\frac{iV(x_1)}{2k_0}e^{2ik_0x_1}S, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2}=\frac{iV(x_2)}{2k_0}S-\frac{iV(x_2)}{2k_0}e^{2ik_0x_2}\overline{S}^*, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial x_2}=\frac{iV(x_2)}{2k_0}\overline{S}+\frac{iV(x_2)}{2k_0}e^{2ik_0x_2}S^*. \qquad (14)$$

Единственность решений системы (11)-(13) обеспечивается с помощью соответствующих начальных условий;

$$S(x_1,x_2)\big|_{x_1=x_2}=1, \quad \overline{S}(x_1,x_2)\big|_{x_1=x_2}=0. \qquad (15)$$

Докажем теперь, что из уравнений, определяющих $S(x_1,x_2)$ и $\overline{S}(x_1,x_2)$, вытекает требование сохранения плотности тока;

$$\left|S(x_1,x_2)\right|^2-\left|\overline{S}(x_1,x_2)\right|^2=\left|T(x_1,x_2)\right|^2+\left|R(x_1,x_2)\right|^2=1, \qquad (16)$$

для любых x_1 и x_2,

Действительно, дифференцируя (16) по x_1 и x_2, получим

$$S\frac{\partial S^*}{\partial x_1}+S^*\frac{\partial S}{\partial x_1}-\overline{S}\frac{\partial \overline{S}^*}{\partial x_1}-\overline{S}^*\frac{\partial \overline{S}}{\partial x_1}=0, \qquad (17)$$

$$S\frac{\partial S^*}{\partial x_2}+S^*\frac{\partial S}{\partial x_2}-\overline{S}\frac{\partial \overline{S}^*}{\partial x_2}-\overline{S}^*\frac{\partial \overline{S}}{\partial x_2}=0. \qquad (18)$$

Подставляя (11)-(14) в равенства (17), (!8), легко убедиться в выполнении последних.

Рассмотрим теперь уравнения (11), (12) для случая переменного x_1 и фиксированного x_2. Тогда, введя обозначения $S(x_1,x_2)\equiv P(x)$ и $\overline{S}(x_1,x_2)\equiv\overline{P}(x)$ для функций $P(x)$ и $\overline{P}(x)$, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{dP}{dx}=-\frac{iV(x)}{2k_0}P-\frac{iV(x)}{2k_0}e^{-2ik_0x}\overline{P}, \qquad (19)$$

$$\frac{d\overline{P}}{dx}=\frac{iV(x)}{2k_0}\overline{P}+\frac{iV(x)}{2k_0}e^{2ik_0x}P. \qquad (20)$$

Функции $P(x)$ и $\overline{P}(x)$ описывают закон изменения параметров рассеяния $T(x)$ и $R(x)$ для функции

$$U(x)=V(x)\theta(x-b),$$

в зависимости от x.

В случае переменного x_2 и фиксированного x_1 функции $S(x_1,x_2)\equiv D(x)$ и $\overline{S}^*(x_1,x_2)\equiv\overline{D}(x)$ описывают изменение $T(x)$ и $R(x)$ для функции

$$U(x)=V(x)\theta(a-x).$$

Для функций $D(x)$ и $\overline{D}(x)$ из (13), (14) получается следующая система уравнений;

$$\frac{dD}{dx}=\frac{iV(x)}{2k_0}D-\frac{iV(x)}{2k_0}e^{2ik_0x}\overline{D}, \qquad (21)$$

$$\frac{d\overline{D}}{dx}=-\frac{iV(x)}{2k_0}\overline{D}+\frac{iV(x)}{2k_0}e^{-2ik_0x}D. \qquad (22)$$

4. *Задача Коши для проблемы рассеяния.* Покажем теперь, что из систем уравнениий (19),(20) и (21),(22) можно получить линейные

уравнения для комбинаций функций $P(x)$, $\overline{P}(x)$ и $D(x)$, $\overline{D}(x)$, одно из которых совпадает с волновым уравнением (в случае рассмотрения задачи рассеяния электрона - с уравнением Шредингера), а другое - простым уравнением первого порядка. Действительно, запишем уравнения (19), (20) в следующем виде

$$e^{ik_0x}\frac{dP}{dx} = -\frac{iV(x)}{2k_0}\left(Pe^{ik_0x} + e^{-ik_0x}\,\overline{P}\right), \tag{23}$$

$$e^{-ik_0x}\frac{d\overline{P}}{dx} = \frac{iV(x)}{2k_0}\left(Pe^{ik_0x} + \overline{P}e^{-ik_0x}\right). \tag{24}$$

Введем обозначения:

$$Pe^{ik_0x} = F_1 \quad \text{и} \quad \overline{P}e^{-ik_0x} = \overline{F}_1, \tag{25}$$

тогда уравнения (23), (24) примут вид:

$$\frac{dF_1}{dx} - ik_0F_1 = -\frac{iV}{2k_0}\left(F_1 + \overline{F}_1\right), \tag{26}$$

$$\frac{d\overline{F}_1}{dx} + ik_0\overline{F}_1 = \frac{iV}{2k_0}\left(F_1 + \overline{F}_1\right). \tag{27}$$

Из этих уравнений легко показать, что для величин $L_1 = \left(F_1 + \overline{F}_1\right)$ и $Q_1 = \left(F_1 - \overline{F}_1\right)$ можно получить следующие уравнения:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(E - V(x)\right)\right]L_1(x) = 0, \quad Q_1 = -\frac{i}{k_0}\frac{dL_1}{dx}. \tag{28}$$

Введя величины $De^{-ik_0x} = F_2$ и $\overline{D}e^{ik_0x} = \overline{F}_2$ и совершая аналогичные операции к системе уравнений (21), (22), для величин $L_2 = \left(F_2 - \overline{F}_2\right)$, $Q_2 = \left(F_2 + \overline{F}_2\right)$ получим уравнения:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(E - V(x)\right)\right]L_2(x) = 0, \quad Q_2 = \frac{i}{k_0}\frac{dL_2}{dx}. \tag{29}$$

Так как добавление слоя справа и слева равносильны, то удобно рассмотреть случай когда добавление слоя производится справа. Обозначим $L_2 \equiv L, F_2 \equiv F$ и $\overline{F}_2 \equiv \overline{F}$, тогда первое из уравнений (29) примет вид

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(E - V(x)\right)\right]L(x) = 0, \tag{30}$$

а F и $\overline{F}$ выразятся через L формулами:

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{k_0}\frac{dL}{dx} + L\right), \quad \overline{F} = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{k_0}\frac{dL}{dx} - L\right). \tag{31}$$

Предположим, что имеется слой с началом в точке $x=a$ и толщиной $d=b-a$. Тогда, согласно (15), граничные условия для функции $L(x)$ в точке $x=a$ будут:

$$L(a)=e^{-ik_0a}, \quad \left.\frac{dL}{dx}\right|_{x=a}=-ik_0e^{-ik_0a}. \tag{32}$$

Ищем решение уравнения (30) в виде

$$L(x)=e^{-ik_0a}\left(H_1-ik_0H_2\right), \tag{33}$$

тогда действительные функции H_1 и H_2 удовлетворяют уравнению (30) с граничными условиями, вытекающими из (32):

$$H_1(a)=1, \; H_2(a)=0, \; \left.\frac{dH_1}{dx}\right|_{x=a}=0, \; \left.\frac{dH_2}{dx}\right|_{x=a}=1. \tag{34}$$

Подставляя решение (33) в (31) и учитывая связь между F, $\overline{F}$ и D, $\overline{D}$, окончательно получим:

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{2}e^{ik_0d}\left\{H_1+\frac{dH_2}{dx}-ik_0H_2+\frac{i}{k_0}\frac{dH_1}{dx}\right\}, \tag{35}$$

$$\frac{R}{T}=\frac{1}{2}e^{2ik_0x_0}\left\{-H_1+\frac{dH_2}{dx}-ik_0H_2-\frac{i}{k_0}\frac{dH_1}{dx}\right\}, \tag{36}$$

где $x_0=(a+b)/2$ - координата центра слоя.

Таким образом, мы показали, что решение задачи (1)-(2) сводится к задаче Коши для волнового уравнения (уравнения Шредингера) (30).

5. *Заключение.* В заключении сделаем, на наш взгляд, два важных замечания. Во-первых, заметим, что можно привести явный вид функционала $T[V(x)]$. Подставляя (10) в (7) получим

$$T_N^{-1}=1+\sum_{p=1}^{N}\sum_{1\le j_1<\ldots<j_p}^{N}\frac{iV_{j1}d_{j1}}{2k_0}\cdots\frac{iV_{jp}d_{jp}}{2k_0}\prod_{l=1}^{n-1}\left(1-\exp i2k\left(x_{j_{l+1}}-x_{j_l}\right)\right). \tag{37}$$

Устремляя $N\to\infty$ и $\max d_n\to 0$, можно получить явный вид функционала $T[V(x)]$;

$$T^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}W_n, \tag{38}$$

где

$$W_n=\int_{x_{n-1}}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{x_1}\frac{iV(x_1)}{2k_0}\cdots\frac{i\dot{V}(x_n)}{2k_0}\prod_{l=1}^{p-1}\left(1-\exp 2ik_0\left(x_{l+1}-x_l\right)\right)dx_1\ldots\, dx_n.$$

Во-вторых, из уравнений (19), (20) легко получить известные уравнения для функций $T(x)$ и $R(x)$, найденные в [6] методом фазовых функций. Действительно, подставляя в (19) и (20) $P(x)=1/T(x)$ и $\overline{P}(x)=R(x)/T(x)$, в частности для $R(x)$ получим обыкновенное уравнение Риккати:

$$\frac{dR(x)}{dx}=\frac{iV}{2k_0}\left(e^{ik_0x}+R(x)e^{-ik_0x}\right)^2, \quad R(\infty)=0. \tag{39}$$

Важно отметить, что для решения задачи рассеяния (1)-(2) использование уравнений типа (38) сталкивается с серьезными математическими трудностями. Для решения этой же проблемы, предложенное в данной работе уравнение (30) является не только линейным, но и уравнением, совпадающим с обычным волновым уравнением (уравнением Шредингера).

Авторы выражают благодарность Д.Бадаляну, А.Никогосяну и А.Саакяну за обсуждение полученных результатов.

Ереванский государственный университет, Армения
Государственный инженерный университет Армении

SOME DIFFERENTIAL RELATIONS FOR THE PROBLEM OF THE WAVE TRANSPORT IN AN ONE-DIMENSIONAL ARBITRARY MEDIUM

D.M.SEDRAKIAN, A.Zh.KHACHATRIAN

The system of linear differential equations defining the reflection R and transmission T coefficients for the plane wave (or electron) transmitting in an one-dimensional arbitrary madium (or in an one-dimensional arbitrary potential) have been derived. It is shown that the problem of determination of the scattering parameters R and T, in general case, comes to the problem of Caushy for the stationary wave equation (or the equation of Shrödinger).

ЛИТЕРАТУРА

1. *И.В.Кляцкин*, Метод погружения в теории распространения волн, Наука, М., 1986.
2. *P.Erdos*, *R.C.Herndon*, Adv. Phys., 31, 65, 1982.

3. *M.Ya.Azbel*, Phys. Rev., B22, 4106, 1983.
4. *Н.Д.Блохинцев*, Основы квантовой механики, Наука, М., 1983.
5. *Д.М.Седракян*, *А.Ж.Хачатрян*, Изв. НАН Армении, 34, 138, 1999.
6. *В.В.Бабиков*, Метод фазовых функций в квантовой механике, Наука, М., 1976.