

УДК: 524.52

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗОВОГО ДИСКА НА ГРАНИ ГРАВИТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И СПИРАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ГАЛАКТИК

М.Г.АБРАМЯН, С.Г.ХАЧАТРЯН

Поступила 17 марта 1999

Принята к печати 28 апреля 1999

Исследованы нелинейные возмущения неустойчивых по Джинсу газовых дисков и показано, что взаимодействия экспоненциально нарастающих возмущений в определенных случаях приводят к установлению нелинейных спиральных структур. Обсужден вопрос спиральной структуры галактик с точки зрения нелинейной волновой теории.

1. *Введение.* Нелинейная теория возмущений гравитирующего вращающегося диска показала возможность самоорганизации стационарных огибающих туго закрученных спиральных возмущений диска в виде солитонов и периодических волн [1-3]. Эти результаты представляют большой интерес с точки зрения объяснения наблюдаемых спиральных структур галактик с одновременным решением проблемы возбуждения и поддержания спирального узора [4,5]. Для последних целей является возможным исследование нелинейных возмущений неустойчивых по Джинсу дисков (или дисков, некоторые области которых находятся в состоянии гравитационной неустойчивости), так как при этом источником возбуждения и поддержания спиральных возмущений является гравитационная неустойчивость.

Действительно, с точки зрения нелинейной теории причиной возбуждения спиральных волн могут служить слабые, даже случайные, флуктуации. Можно предположить, например, что диск газа и звезд находится, по крайней мере в некоторых его частях, на грани гравитационной неустойчивости (обычно в реальных дисках галактик это - области коротации), где случайные флуктуации могут привести к неустойчивости. Здесь должны раскачиваться волны плотности с экспоненциально нарастающими амплитудами. С ростом амплитуд волн и в результате их взаимодействия может появиться самосогласованная, более устойчивая нелинейная структура. Если она обладает свойствами, соответствующими реальным рукавам, то таким путем и решается проблема возбуждения спирального узора без

привлечения внешних причин<sup>1</sup>.

2. *Основное нелинейное уравнение.* Систему двумерных уравнений, описывающих динамику вложенного гравитирующего вращающегося тонкого газового диска, составляют уравнения движения газа

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) v_r - 2\Omega v_\varphi + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{\partial(V^* + V)}{\partial r} - \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) v_\varphi + \frac{\chi^2}{2\Omega} v_r + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \frac{\partial(V^* + V)}{r \partial \varphi} - \frac{1}{r \Sigma} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \quad (2)$$

уравнения неразрывности и Пуассона

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \sigma + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r v_r (1 + \sigma)] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} [v_\varphi (1 + \sigma)] = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -2\pi G \Sigma_0 (1 + \sigma), \quad (4)$$

а также политропное уравнение состояния [6]

$$\Pi = \frac{c_s^2}{\gamma_s} \Sigma_0 (1 + \sigma)^{\gamma_s}, \quad c_s^2 = \gamma_s \frac{\Pi_0}{\Sigma_0}; \quad \gamma_s = 3 - 2/\gamma, \quad (5)$$

где  $V^*$  - гравитационный потенциал неплоских подсистем галактики,  $c_s$  - скорость звука,  $\gamma_s, \gamma$  - поверхностный и объемный показатели политропы соответственно. В уравнениях (1)-(5) парциальная поверхностная плотность диска и скорость газа представлены как  $\Sigma = \Sigma_0(r) + \Sigma_1$ ,  $\bar{v}(v_r, \Omega r + v_\varphi, 0)$  и введены безразмерная поверхностная плотность ( $\sigma$ ) и эпициклическая частота ( $k$ )

$$\sigma = \frac{\Sigma}{\Sigma_0} - 1, \quad k^2 = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^4 \Omega^2). \quad (6)$$

Гравитационный потенциал неплоских подсистем  $V^*$  обеспечивает равновесие диска с поверхностной плотностью  $\Sigma_0(r)$  и угловой скоростью вращения  $\Omega(r)$  и непосредственно не участвует в возмущениях диска. Подставляя также  $\Pi = \Pi_0 + \Pi_1$ ,  $V = V_0(r) + V_1$ , считая равновесные параметры  $\Sigma_0, \Pi_0, V_0, k, \Omega$  медленно меняющимися по радиусу диска функциями, в главном порядке ВКБ-приближения, соответствующего туго закрученным спиральным возмущениям, систему уравнений (1)-(5) сводим к виду [4]

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \varepsilon + u \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{|\psi'|} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} - u_s^2 (1 + \sigma)^{\gamma_s - 2} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + u + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} = 0, \quad (8)$$

<sup>1</sup> О других подходах к изучению спиральной структуры галактик в рамках нелинейной теории см., например, [7-10].

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + (1 + \sigma) \frac{\partial u}{\partial \rho} + u \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} = 0, \quad (9)$$

где предположено  $\sigma \sim \exp[i\psi(\rho)]$  и использовано ВКБ-решение уравнения Пуассона (см. [7])

$$V_1 = -\frac{c_s^2}{u_s^2 |\psi'|} \sigma(\rho, \tau), \quad (10)$$

а также введены безразмерные обозначения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad k_0 = \frac{k^2}{2\pi G \Sigma_0}, \quad \rho = k_0 r, \quad (11)$$

$$u = k_0 v_r / k, \quad \varepsilon = 2\Omega k_0 v_\varphi / k^2, \quad u_s = k_0 c_s / k.$$

Из уравнений (8),(9) следуют точные соотношения

$$u = -\frac{\partial \varepsilon / \partial \tau}{1 + \partial \varepsilon / \partial \rho}, \quad \sigma = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}, \quad (12)$$

с учетом которых из (7) получим основное нелинейное уравнение возмущений вращающегося вложенного газового диска в ВКБ-приближении [4]:

$$\frac{\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2}}{1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}} - \frac{\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)^2}{\left( 1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)^2} + \frac{\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)^2}{\left( 1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)^3} = - \left( 1 + \frac{1}{|\psi'|} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) \varepsilon + u_s^2 \left( 1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)^{\gamma_s - 2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2}. \quad (13)$$

В линейном по амплитуде возмущений приближении уравнение (13) с учетом (12) сводится к

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} + \sigma + \frac{1}{|\psi'|} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \rho^2} - u_s^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \rho^2} = 0, \quad (14)$$

из которого, предполагая  $\sigma \sim \exp(i(v_1 \tau + \chi \rho))$ , получим дисперсионное уравнение линейных спиральных волн плотности

$$v_1^2 = 1 - |\chi| + u_s^2 \chi^2 = -\gamma_1^2. \quad (15)$$

Из (15) видно, что при  $u_s < 1/2$  газовый диск неустойчив по Джинсу, и спиральные волны с волновым числом

$$\chi_0 = \frac{1}{2u_s^2} \quad (16)$$

нарастают экспоненциально с максимальным инкрементом

$$\gamma_0 = -i v_1(\chi_0) = \sqrt{\chi_0 / 2 - 1}. \quad (17)$$

Точка  $\chi_0$  соответствует минимуму дисперсионной кривой, а  $u_s$  — минимальному значению безразмерной скорости звука при принятии во внимание дифференциальности вращения и неоднородного распределения поверхностной плотности диска.

Пусть в некоторых частях диск гравитационно неустойчив. Тогда в диске будут раскачиваться волны плотности с инкрементом (17), в результате чего между различными их гармониками возникнут нелинейные взаимодействия. Учет этих взаимодействий произведем методом работы [1].

Нас интересует вопрос: могут ли эти взаимодействия привести к стационарной спиральной картине с малой, но конечной амплитудой возмущения плотности диска?

3. *Уравнение кубической нелинейности.* Разложим нелинейное возмущение плотности газового диска в ряд

$$\sigma(\rho, \tau) = \sum_l \sigma_l(\tau) e^{llxp}, \quad l = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

Предположим, что инкремент линейных волн - малая величина порядка  $\sigma_1$ :  $d\sigma_1/d\tau \sim \sigma_1^2$ , где  $\sigma_1$  - амплитуда основной моды возмущения, и ограничимся кубическим по  $\sigma_1$  приближением. В указанном приближении первое соотношение в (12) упрощается:  $u = -\partial\epsilon/\partial\tau$ , а уравнение (13), с учетом второго, представится в виде

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} + \left( 1 + \frac{1}{|i\psi|} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - u_s^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) \sigma = -\frac{2-\gamma_s}{2} u_s^2 \frac{\partial^2 \sigma^2}{\partial \rho^2} + \frac{(2-\gamma_s)(3-\gamma_s)}{6} u_s^2 \frac{\partial^2 \sigma^3}{\partial \rho^2}. \quad (19)$$

Подставляя (18) в (19), получим

$$\begin{aligned} \sum_l \left( \frac{d^2 \sigma_l}{d\tau^2} + v_l^2 \sigma_l \right) e^{llxp} = & \frac{2-\gamma_s}{2} u_s^2 \chi^2 \sum_l \sum_n (1+n)^2 \sigma_l \sigma_n e^{i(l+n)xp} - \\ & - \frac{(2-\gamma_s)(3-\gamma_s)}{6} u_s^2 \chi^2 \sum_l \sum_n \sum_m (1+n+m)^2 \sigma_l \sigma_n \sigma_m e^{i(l+n+m)xp}, \end{aligned} \quad (20)$$

где введено обозначение

$$v_l^2 = 1 - |l\chi| + (lu_s \chi)^2 \equiv -\gamma_l^2. \quad (21)$$

Раскрывая (20) и приравнивая коэффициенты при одинаковых фазовых множителях, получим уравнения относительно амплитуд первых двух мод:

$$\frac{d^2 \sigma_1}{d\tau^2} - \gamma_1^2 \sigma_1 = (2-\gamma_s) u_s^2 \chi^2 \sigma_2 \sigma_{-1} - \frac{(2-\gamma_s)(3-\gamma_s)}{2} u_s^2 \chi^2 |\sigma_1|^2 \sigma_1, \quad (22)$$

$$v_1^2 \sigma_2 = 2(2-\gamma_s) u_s^2 \chi^2 \sigma_1^2. \quad (23)$$

Исключением амплитуды второй гармоники получим нелинейное уравнение для амплитуды основной гармоники возмущения в кубическом приближении:

$$\frac{d^2 \sigma_1}{d\tau^2} - \gamma_1^2 \sigma_1 + 2\alpha(\chi) |\sigma_1|^2 \sigma_1 = 0, \quad (24)$$

где

$$\alpha(\chi) = 0.25(2-\gamma_s) u_s^2 \chi^2 \left( 3 - \gamma_s - 4(2-\gamma_s) u_s^2 \chi^2 / v_2^2 \right). \quad (25)$$

Пусть около волнового числа (16) возбужден узкий пакет волн с  $\Delta\chi$ . Для получения пространственной структуры этих возмущений, следуя работе [1], разложим  $\gamma_1^2(\chi)$  в ряд Тейлора

$$\gamma_1^2(\chi_0 + \Delta\chi) = \gamma_0^2 - u_s^2(\Delta\chi)^2 \quad (26)$$

и, подставляя в (24), перейдем к координатному представлению:

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \tau^2} - u_s^2 \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \rho^2} = \gamma_0^2 \sigma_1 - 2\alpha(\chi_0) |\sigma_1|^2 \sigma_1. \quad (27)$$

4. *Нелинейные стационарные решения.* Будем искать действительное решение уравнения (27) в виде

$$\sigma_1(\rho, \tau) = \sigma_1(\rho + w\tau) \equiv \sigma_1(\eta), \quad (28)$$

где  $w$  — безразмерная скорость нелинейной волны плотности. С учетом (28) уравнение (27) дает

$$\frac{d^2 \sigma_1}{d\eta^2} = \frac{\gamma_0^2}{w^2 - u_s^2} \left( \sigma_1 - \frac{2\alpha_0}{\gamma_0^2} \sigma_1^3 \right) = 0, \quad (29)$$

первым интегралом которого является

$$\left( \frac{d\sigma_1}{d\eta} \right)^2 - \frac{\gamma_0^2}{w^2 - u_s^2} \sigma_1^2 + \frac{\alpha_0}{w^2 - u_s^2} \sigma_1^4 = E. \quad (30)$$

Формально, задача свелась к задаче о движении частицы в потенциальной яме с эффективным потенциалом

$$U(\sigma_1) = \frac{\gamma_0^2}{w^2 - u_s^2} \sigma_1^2 \left( \frac{\alpha_0}{\gamma_0^2} \sigma_1^2 - 1 \right). \quad (31)$$

На рис.1 изображена характерная зависимость  $U(\sigma_1)$  как для "сверх"-, так и для "дозвуковой" волн. Использование кавычек мы подчеркиваем тот факт, что речь идет об отношении безразмерных скорости распространения волны к скорости звука, которое не равно отношению соответствующих размерных скоростей (см. Результаты работы).

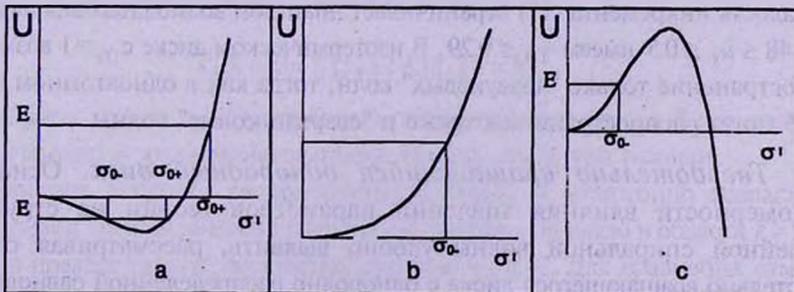


Рис.1. Характерная зависимость  $U(\sigma_1)$ . а) "сверхзвуковая" волна; б) "дозвуковая" волна,  $\alpha_0 < 0$ ; в) "дозвуковая" волна,  $\alpha_0 > 0$ .

Конечные периодические решения уравнения (30) выражаются через эллиптические функции Якоби:

I. "Сверхзвуковая" волна:  $w > u$ ,

а)  $\alpha_0 > 0$ ,  $E < 0$

$$\sigma_1 = \sigma_{0+} \operatorname{dn} [K(s_2) - \sigma_0 + \beta \eta, s_2], \quad (32)$$

б)  $\alpha_0 > 0$ ,  $E > 0$

$$\sigma_1 = \sigma_{0+} \operatorname{cn} [\sigma_{0+} \beta \eta / s_1 - K(s_1), s_1]. \quad (33)$$

II. "Дозвуковая" волна:  $w < u$ ,

а)  $\alpha_0 < 0$ ,  $E > 0$

$$\sigma_1 = \sigma_{0-} \operatorname{cn} [\sigma_{0-} \beta \eta / s_3 - K(s_3), s_3], \quad (34)$$

б)  $\alpha_0 > 0$ ,  $E > 0$

$$\sigma_1 = \sigma_{0-} \operatorname{sn} [\sigma_{0+} \beta \eta, s_0]. \quad (35)$$

Другие случаи не дают конечных решений. В формулах (32)-(35) использованы обозначения

$$\sigma_{0\pm}^2 = \left| \frac{\gamma_0^2}{2\alpha_0} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha_0(w^2 - u_s^2)}{\gamma_0^4} E} \right) \right|, \quad \beta = \sqrt{\frac{\alpha_0}{w^2 - u_s^2}}, \quad (36)$$

$$s_0 = \sigma_{0-} / \sigma_{0+}, \quad s_1^2 = 1 / (1 + s_0^2), \quad s_2^2 = 1 - s_0^2, \quad s_3 = s_0 s_1. \quad (37)$$

Полученные решения вместе с (18) определяют нелинейную картину спиральных возмущений, установившуюся в результате взаимодействия экспоненциально нарастающих волн в неустойчивом по Джинсу газовом диске. Учитывая действительность амплитуд гармоник и пользуясь соотношением (23), в рассматриваемом приближении получим

$$\sigma(\rho, \tau) = \sigma_1(\rho + w\tau) \cos \chi \rho + 2(2 - \gamma_s) u_s^2 \chi^2 \sigma_1^2(\rho + w\tau) \cos 2\chi \rho, \quad (38)$$

где  $\sigma_1$  выражается одной из формул (32)-(35), в зависимости от значений параметров диска ( $\gamma_s$ ,  $u_s$ ) и от выбора модели волны ( $w$ ,  $E$ ).

Малость инкремента (17) ограничивает диапазон возможных значений  $u_s$ : для  $0.48 \leq u_s \leq 0.5$  имеем  $\gamma_0 \leq 0.29$ . В изотермическом диске с  $\gamma_s = 1$  возможно распространение только "дозвуковых" волн, тогда как в одноатомном газе с  $\gamma_s = 9/5$  могут распространяться также и "сверхзвуковые" волны.

5. *Твердотельно вращающийся однородный диск.* Основные закономерности влияния значений параметров теории на структуру нелинейной спиральной волны удобно выявить, рассматривая случай твердотельно вращающегося диска с однородно распределенной равновесной поверхностной плотностью. При этом  $k = 2\Omega$ .

Скорость звука положим  $c_s = 10$  км/с. Задавая инкремент, определим безразмерную скорость звука из (16) и (17). Удобнее, однако, задать наблюдаемую амплитуду  $\sigma_0$  и учесть условие  $\gamma_0 \sim \sigma_0$ . Модель волны легко выбрать из геометрии, имея амплитуду уплотнения и задавая шаг спирального узора  $\lambda$ . В процессе выбора значений параметров оценки можно производить, опуская вторую гармонику в (38). Действительно, учет второго слагаемого не приведет к заметному изменению глобального узора из-за малости амплитуды и отсутствия разности фаз между модами в точках максимума.

"Дозвуковая" волна. Рассмотрим изотермический диск. Амплитуда первой гармоники выражается формулой (34). Введем обозначение

$$h = \beta \sigma_0 / s_3, \quad (39)$$

и уясним пространственную структуру волны. Амплитуда (34) должна быть периодической по  $\varphi$  функцией с периодом  $2\pi$ . Раскрывая  $\tau$  и используя (39), получим

$$\pi whk = 2nK(s_3)(\Omega_p - \Omega), \quad (40)$$

где  $n$  — целое число, определяющее число рукавов спирального узора. Соотношение (40) является общим для всех решений и определяет  $\Omega$ , при заданных значениях остальных параметров. В пренебрежении второй гармоникой и несущественной начальной фазой  $-K(s_3)$  и с учетом (40) решение запишется как

$$\sigma(r, \varphi) = \sigma_0 \cdot \text{cn} [h k_0 r - \varphi 2nK(s_3)/\pi] \cos \chi k_0 r, \quad (41)$$

или, заменяя эллиптическую функцию эквивалентной гармонической с тем же пространственным периодом и раскрывая произведение двух косинусов—

$$\begin{aligned} \sigma(r, \varphi) \approx \sigma_0 / 2 \left\{ \cos \left[ \left( \chi - \pi h / 2 K(s_3) \right) k_0 r - n \varphi \right] + \right. \\ \left. + \cos \left[ \left( \chi + \pi h / 2 K(s_3) \right) k_0 r - n \varphi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Итак, основная мода является суперпозицией двух волн: первое слагаемое в (42) описывает глобальный спиральный узор, а второе — тонкую структуру рукавов. Задавая шаг узора, получим условие

$$\kappa_0 \lambda = 2\pi K(s_3) \left[ 2K(s_3) - \pi h \right]^{-1}, \quad (43)$$

из которого, наряду с (36), определим параметры волны  $w$  и  $E$  при заданной  $\Omega$ . Значением  $\Omega$  определяется также тонкая структура рукавов.

Величина скорости распространения волны  $w$  монотонно возрастает с увеличением эллиптической частоты  $k$  и выходит на плато в области  $k > 50$  км/с кпк в пределе сильно раскрытых рукавов:  $w \approx 0.42$ . Для сравнения отметим, что  $u_s = 0.49$ . Практически не зависит от  $\Omega$  также и величина  $\chi + \pi h / 2 K(s_3)$ , откуда видно, что длина волны тонкой структуры обратно пропорциональна

угловой скорости вращения диска. На рис.2а представлено возмущение

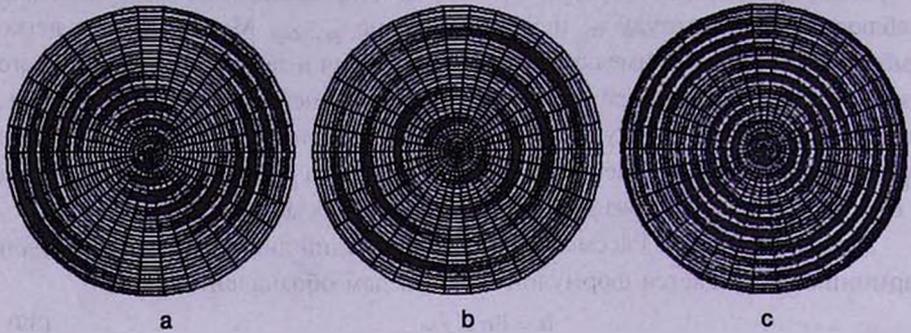


Рис.2. Область уплотнения в спиральной волне плотности с шагом узора  $\lambda = 15$  кпк, равным радиусу диска: а) "дозвуковая" волна,  $E = 0.038$ ,  $\Omega = 10$  км/с кпк; б) "сверхзвуковая" волна,  $E < 0$ ,  $\Omega = 10$  км/с кпк; в) "сверхзвуковая" волна,  $E < 0$ ,  $\Omega = 50$  км/с кпк.

поверхностной плотности (38) для случая  $\Omega = 10$  км/с кпк, при котором  $\Sigma_0 = 14.6 M_\odot / \text{пк}^2$ .

"Сверхзвуковая" волна. Рассмотрим теперь диск, состоящий из одноатомного газа. В этом случае вид решения определяется отношением  $\sigma_{0+}/\gamma_0$ . Обращая (37) относительно  $E$ , получим

$$E = \sigma_{0+}^2 (\sigma_{0+}^2 \alpha_0 - \gamma_0^2) / (w^2 - u_s^2), \quad (44)$$

откуда видно, что при  $\sigma_{0+}/\gamma_0 > \alpha_0^{1/2}$  амплитуда основной моды выражается формулой (33), в противном случае — формулой (32).

Поскольку в рассматриваемой области значений инкремента имеем  $u_s \chi \approx 1$ , то  $\alpha_0 \approx 0.02$  для  $\gamma_s = 9/5$ , и, приближенно, решение (33) реализуется при  $\sigma_{0+} > 7.1\gamma_0$ . Это условие экстремально ограничивает возможные значения  $u_s$ ;  $u_s = 0.4998$  для  $\sigma_{0+} = 0.2$ . Изображенную на рис.2а спираль можно получить и в случае сверхзвуковой волны. При этом  $\gamma_0 = \sigma_{0+}/7.14$  и  $w = 0.49988$ ,  $E = 0.008$ .

Ярко выраженная спиральная структура образуется также и в случае (32), но в узком диапазоне значений  $\sigma_{0+}/\gamma_0$ . Подставляя (44) в (36), получим

$$\sigma_{0-}^2 = \gamma_0^2 / \alpha_0 - \sigma_{0+}^2, \text{ при } \sigma_{0+}^2 \geq \gamma_0^2 / 2\alpha_0; \quad (45a)$$

$$\sigma_{0-}^2 = \sigma_{0+}^2, \text{ при } \sigma_{0+}^2 \leq \gamma_0^2 / 2\alpha_0. \quad (45b)$$

В случае (45b)  $s_2 = 0$ , и мы имеем кольцевые возмущения с шагом  $2\pi/\chi k_0$ . Таким образом, спиральная картина возможна при  $(2\alpha_0)^{-1/2} \leq \sigma_{0+}/\gamma_0 \leq \alpha_0^{-1/2}$ . Однако плотность в рукавах заметно превышает межрукавную лишь вблизи верхней границы вышеуказанной области.

На рис.2б и рис.2с приведены решения для  $\sigma_{0+} = 7\gamma_0$ . Сильная прерывистость рукавов спирали на рис.2б обусловлена малостью угловой скорости вращения диска —  $\Omega = 10$  км/с кпк. Рис.2с изображает случай  $\Omega = 50$  км/с кпк. Результаты, полученные для "сверхзвуковой" волны, лежат

на грани применимости теории из-за существенного превосходства амплитуды волны над инкрементом, причина которого заключается в малости  $\alpha_0$ . Легко видеть из (25), что  $\alpha_{\text{max}} = 0.021$  при  $u_{\chi} = 1$ .

б. *Дифференциально вращающийся неоднородный диск.* В приложениях развитой теории к конкретным наблюдениям необходимо учитывать дифференциальность вращения и неоднородность распределения поверхностной плотности реальных дисков галактик. При этом, как и выше, равновесные параметры должны быть медленно меняющимися по радиусу диска величинами. Набор свободных параметров и порядок определения зависимых величин здесь несколько меняется.

Из приведенного во Введении механизма образования спиральной структуры видно, что радиус коротации  $R_0$  можно приравнять принятому радиусу диска и, зная кривую вращения  $\Omega(r)$ , определить  $\Omega_p = \Omega(R_0)$ . Поверхностная плотность плоской подсистемы галактик, участвующей в спиральных возмущениях, не является непосредственно наблюдаемой величиной. Легче задать распределение безразмерной скорости звука  $u_s(r)$  и определить  $\Sigma_0(r)$  из (11). Величина  $u_s(r)$  — убывающая функция, изменяющаяся в пределах  $0.48 \leq u_s \leq 0.7$  и достигающая минимума в точке коротации. Один из параметров ( $w, E$ ), определяющих модель волны, остается свободным, а другой определяется из условия (40) как функция от радиуса диска.

*Модель спиральной структуры NGC 289.* Полученные результаты применены к HI диску галактики NGC 289, все данные по которой взяты из работы [8]. Радиус коротации был выбран по границе спирального узора —  $R_0 = 34.5$  кпк (рис.5, [8]). Для сравнения, радиус оптического диска равен 24 кпк, а газового — 70 кпк. В области  $r \geq 4.5$  кпк кривая вращения подчиняется закону Местеля:  $\Omega(r) = 170/r$  км/с кпк, откуда, согласно (6),  $k^2 = 2\Omega^2$ . Решения получены в кольце  $4.5 \text{ кпк} \leq r \leq 34.5 \text{ кпк}$ .

Рассматривался линейный закон зависимости  $u_s$  от  $r$ :  $u_s(r) = -0.007r + 0.7315$ , с минимальным значением  $u_s(r) = 0.49$ . Как и в [8],  $c_s = 12$  км/с. На рис.3а воспроизведена поверхностная плотность газового диска  $\Sigma_{\text{HI}}(r)$  и полная поверхностная плотность плоской подсистемы  $\Sigma_0(r) = k(r)c_s/2\pi G u_s(r)$ .

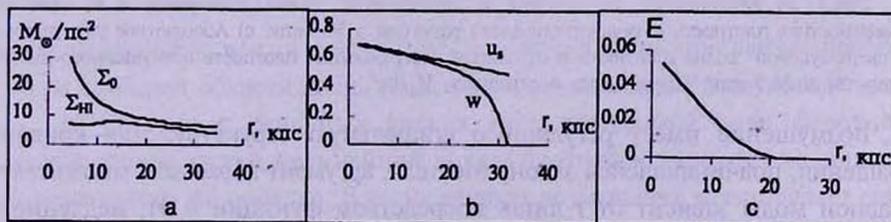


Рис.3. а) Поверхностная плотность газовой компоненты  $\Sigma_{\text{HI}}(r)$  и полная поверхностная плотность плоской подсистемы  $\Sigma_0(r)$ . б) Безразмерная скорость звука  $u_s(r) = -0.007r + 0.7315$  и скорость распространения "дозвуковой" волны  $w(r)$  при  $E = 0.03$ . в) Зависимость  $E(r)$  в "сверхзвуковой" волне при  $u_s(r) = -0.0067r + 0.73015$  и  $w = 1.001u_s$ .

а) "Дозвуковая" волна. Скорость распространения волны  $w(r)$  определена из (40) при заданных  $E$  и  $n$  и показана на рис.3б. Моделируя двухрукавный закручивающийся узор, мы приняли  $n=-2$ . При  $E=0.03$   $\sigma_{\max}$  не превышает 0.3. На рис.4а и рис.4б представлены абсолютное уплотнение  $\sigma_{\Sigma_0}$  и полная возмущенная поверхностная плотность  $(1+\sigma)_{\Sigma_0}$  соответственно.

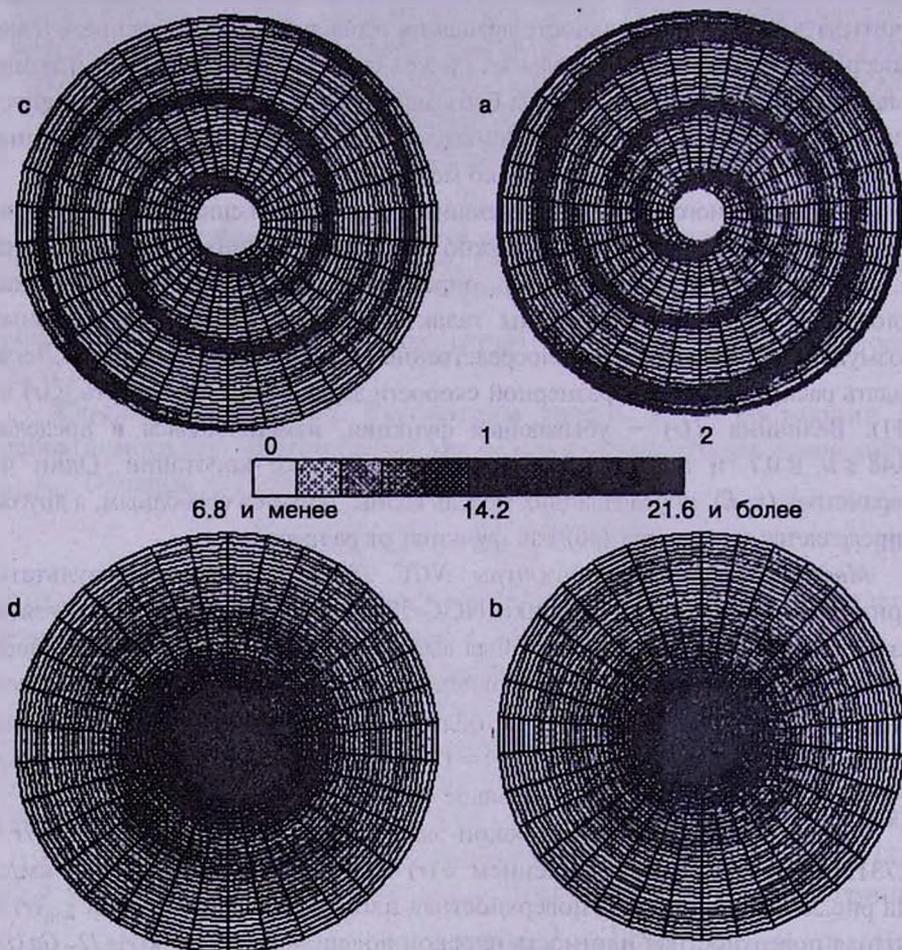


Рис.4. а) Абсолютное уплотнение в "дозвуковой" волне плотности и б) полная поверхностная плотность возмущенного диска радиусом в 34.5 жпк. с) Абсолютное уплотнение в "сверхзвуковой" волне плотности и д) полная поверхностная плотность возмущенного диска радиусом в 28.5 жпк. Шкала дана в единицах  $M_0/\text{пк}^2$ .

Возмущение имеет регулярную спиральную структуру. Для кривой вращения, подчиняющейся закону Местеля, аргумент в фазовом множителе главной моды зависит от  $r$  лишь посредством функции  $u_1(r)$ , медленное изменение которой позволяет ограничиться линейным членом в разложении Тейлора. Поведение аргумента в амплитудной части так же выражается билинейной по  $r$  и  $\varphi$  функцией. Действительно, комбинация  $h(r)k_0(r)r$  является практически линейной функцией везде, кроме области коротации

— узкого внешнего кольца шириной в 2-3 кпк. В нашем случае она с высокой степенью точности интерполируется в рассматриваемой области диска функцией  $h(r)k_c(r)r = -0.756r + 28.204$ . А поскольку модуль  $s_0(r)$  мал, то период эллиптического синуса приближенно равен  $2\pi$ , и коэффициент при  $\varphi$  численно равен  $n$ .

б) "Сверхзвуковая" волна. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, инкремент "сверхзвуковых" волн на полпорядка меньше, чем инкремент "дозвуковых" волн с амплитудой того же порядка. Поэтому линейный закон распределения  $u_s(r)$  был изменен:  $u_s(r) = -0.0067r + 0.73015$ . Затем задавалась скорость распространения волны в виде  $w(r) = 1.001u_s(r)$  и из (40) определялся параметр  $E$ , изображенный на рис.3с. Расчеты показали, что малые значения  $E$  порядка  $10^{-2}$  возможны лишь при  $w(r) \approx u_s(r)$ . Размерная скорость распространения волны при этом равна  $w_p(r) \approx \Omega_p c / (\Omega(r) - \Omega_p)$  и является возрастающей функцией с точкой разрыва в области коротации. Область сингулярности, однако, исключается более сильным условием  $E > 0$ , так как при  $E=0$  формула (34) не выполняется — волна перестает быть "сверхзвуковой". Рассматривался раскручивающийся узор, для которого  $n=2$ . На рис.4с и рис.4б представлены абсолютное уплотнение  $\sigma_{\Sigma_0}$  и полная возмущенная поверхностная плотность  $(1+\sigma)_{\Sigma_0}$  в области  $r < 28.5$ , где  $E > 0$ . "Сверхзвуковая" волна отличается большим контрастом плотности, чем "дозвуковая".

7. *Результаты работы.* В заключение перечислим основные результаты настоящей работы:

1) Проблема возникновения и поддержания спиральной структуры может быть решена путем раскачки нелинейных волн плотности в области диска, где он неустойчив гравитационно (обычно периферийные области). При этом доминирующую роль играет узкий волновой пакет, возбужденный около волнового числа (16), который соответствует максимальному инкременту (17).

2) Вид волны определяется отношением безразмерных скоростей распространения волны и звука, а не соответствующими размерными скоростями. Размерная скорость распространения волны выражается формулой

$$w_p = \frac{k}{k_0} \frac{\Omega_p}{\Omega_p - \Omega(r)} w, \quad (46)$$

откуда получаем  $w/u_s = (1 - \Omega/\Omega_p) w_p/c_s$ . В частности, при любом значении  $w_p$  во внешней области диска распространяется только "дозвуковая" волна.

3) Обычно в реальных дисках галактик длины волн фазовой и амплитудной частей нелинейной волны плотности являются величинами одного и того же порядка. В таких случаях возмущение представляет собой суперпозицию двух волн плотности: коротковолновой - тонкой структуры и глобального узора - с шагом порядка радиуса диска.

4) В следующей работе мы применим полученные результаты к Млечному

Пути. В частности, попытаемся дать объяснение "3 кпк" и "135км/с" рукавам в рамках тонкой структуры рукавов глобального узора.

Ереванский государственный университет,  
Армянский государственный педагогический  
институт им. Х. Абовяна

## NONLINEAR PERTURBATIONS IN GRAVITATING GASEOUS DISC AT THE EDGE OF GRAVITATING INSTABILITY AND SPIRAL STRUCTURE OF GALAXIES

M.G.ABRAMYAN, S.G.KHACHATRYAN

Nonlinear perturbations of an unstable according to Jeans gaseous disc are investigated. It is shown that in some cases the interaction between exponentially increasing perturbations leads to the nonlinear spiral structure. The question of galactic spiral structure is considered in terms of nonlinear wave theory.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *А.Б.Михайловский, В.Н.Петвиашвили, А.М.Фридман*, Астрон. ж., 56, 279, 1979.
2. *В.Л.Поляченко, И.Г.Шухман*, Астрон. ж., 56, 957, 1979.
3. *М.Г.Абрамян, С.В.Арутюнян*, Письма Астрон. ж., 10, 304, 1984.
4. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, 22, 487, 1985.
5. *М.Г.Абрамян, В.Н.Петвиашвили, А.М.Фридман*, Уч. зап. ЕГУ, 3(169), 70, 1988.
6. *C.Hunter*, Ann. Rev. Fluid Mod., 4, 219, 1972.
7. *V.L.Polyachenko, A.M.Fridman*, Physics of Gravitating Systems. I, II. Springer -Verlag, 1984.
8. *W.Walsh, L.Staveley-Smith, T.Oosterloo*, Astron. J., 113, 1591, 1996.
9. *F.Masset, M.Tagger*, Astron. Astrophys., 318, 747-767, 1997.
10. *F.Masset, M.Tagger*, Astron. Astrophys., 322, 442-454, 1997.