

УДК: 524.8:531.51

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СТРУННОЙ КОСМОЛОГИИ С ПЕТЛЕВЫМИ ПОПРАВКАМИ. II.

А. А. СААРЯН

Поступила 24 июля 1998

Принята к печати 20 августа 1998

Методами качественной теории динамических систем исследованы однородные и изотропные космологические модели эффективной теории струн с искривленным пространством. Показано, что для радиационно-доминированных моделей соответствующая динамическая система точно интегрируема для общего случая дилатонных функций связи. Отдельно рассмотрены модели древесного приближения с двумерным фазовым пространством. В общем случае петлевых поправок найдены все возможные неподвижные точки и выявлен их характер. Результаты проиллюстрированы на конкретном примере. Рассмотрены различные случаи фиксации дилатона в рамках механизма Демура-Полякова.

Механизм Демура-Полякова [1,2] является одним из способов фиксации полей модулей в струнной космологии. Идея механизма состоит в том, что петлевые поправки к струнным диаграммам могут генерировать немонотонные функции связи полей модулей с другими полями теории. В предположении, что различные функции связи имеют экстремум в одной и той же точке, расширение Вселенной приводит к естественной релаксации решений с переменными модулями в направлении к моделям ОТО. В первой части [3] данной работы проведен качественный анализ плоских космологических моделей низкоэнергетической струнной гравитации без конкретизации функций связи, обусловленных петлевыми поправками. Для различных случаев построены фазовые картины, иллюстрирующие работу механизма фиксации. Ниже проводятся аналогичные исследования для решений с искривленным пространством (качественный анализ космологических моделей теории Йордана-Бранса-Дикке, см. [4]).

1. *Космологические уравнения и радиационно-доминированные модели.* В первой части работы было показано, что для однородных и изотропных моделей система космологических уравнений эффективной теории струн в E-представлении сводится к динамической системе третьего порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= x, & \frac{dx}{d\tau} &= [n(n-1) - x^2][\alpha(\phi)/2 - bx], \\ \frac{dh}{d\tau} &= (1 - h^2)[(n-1)(nb-1) - bx^2], & b &= \frac{1-a}{2(n-1)}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где n - размерность пространства,

$$d\tau = \sqrt{H^2 + k} dt_c, \quad h = \frac{d \ln R}{d\tau} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + k}}, \quad d\phi = 2\sqrt{-F_\phi} d\varphi, \quad (1.2)$$

t_c - конформная временная координата, R - масштабный фактор, $H = d \ln R / dt_c$ - параметр Хаббла, φ - поле дилатона, $k = 1, -1$ для моделей с пространствами положительной и отрицательной кривизны, соответственно. Функция $F_\phi(\varphi)$ выражается через функции связи $\bar{F}_k(\varphi)$ дилатона в лагранжиане (12.1) низкоэнергетической теории струн соотношением (12.6) (здесь и ниже римская цифра I перед номерами формул указывает на формулы из первой части работы). Величины a и α являются характеристиками негравитационного источника с лагранжианом L_m в E-представлении:

$$a = p/\epsilon, \quad \alpha = \frac{1}{\epsilon\sqrt{|G|}} \frac{\delta(L_m \sqrt{|G|})}{\delta\phi}, \quad (1.3)$$

где p и ϵ - эффективное давление и плотность энергии. Если для источника реализуемо представление Йордана, то функция α имеет вид

$$\alpha = (1 - na)A(\phi). \quad (1.4)$$

Систему уравнений (1.1) следует дополнить уравнением связи

$$\epsilon R^2 = (H^2 + k)[n(n-1) - x^2], \quad (1.5)$$

из которого, совместно с (1.2), следует, что фазовым пространством системы (1.1), соответствующим моделям с неотрицательной плотностью энергии, является область в пространстве (ϕ, x, h) определяемая неравенствами

$$-\infty < \phi < +\infty, \quad |x| \leq \sqrt{n(n-1)}, \quad |h| < 1 (> 1) \quad (1.6)$$

для моделей с $k = 1 (-1)$. Граница этой области $|h| = 1$ есть двумерное инвариантное многообразие системы (1.1) и представляет собой фазовое пространство плоской модели, которая исследовалась в первой части работы.

Если t , $dt = R dt_c$ синхронная в E-представлении временная координата, то из (1.1) получим

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{dH}{dt_c} = \frac{b}{R} [(n-1)(n-1/b) - x^2], \quad (1.7)$$

и поэтому при $b > 1/n$ ($a < 2/n - 1$) в области $|x| < \sqrt{(n-1)(n-1/b)}$ имеем $d^2 R / dt^2 > 0$, и в этой области модели расширения имеют инфляционный характер. Заметим также, что динамическая система (1.1) инвариантна относительно следующих двух классов преобразований:

$$\tau \rightarrow -\tau, \quad x \rightarrow -x, \quad h \rightarrow -h, \quad (1.8)$$

$$\phi \rightarrow -\phi, \quad x \rightarrow -x, \quad \alpha \rightarrow -\alpha. \quad (1.9)$$

Первое из них связывает модели расширения и сжатия E-представления.

Второе же преобразование связывает модели для двух, вообще говоря, различных функций, $\alpha(\phi)$ и $-\alpha(-\phi)$.

Приведенные выше соотношения задают динамику модели в E-представлении. Величины в струнном представлении находятся конформным преобразованием метрики

$$\bar{R} = \Omega(\varphi) R, \quad (1.10)$$

где функция $\Omega(\varphi)$ определяется соотношением (12.4). Заметим, что временная координата t_c , в отличие от синхронной времени t , является конформно инвариантной величиной и поэтому одна и та же в струнном и E-представлениях.

Одним из наиболее важных частных случаев, когда динамическая система (1.1) допускает точное решение, являются радиационно-доминированные модели. Для них $a = 1/n$ и поэтому, согласно (1.4), $\alpha = 0$. Интегрируя последние два уравнения получим

$$x^2 = \frac{n(n-1)}{1+u}, \quad h^2 = 1 - \frac{k u_0 u^2}{1+u^2}, \quad u = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1}, \quad (1.11)$$

где u_0 , R_0 - положительные постоянные интегрирования. Отсюда видно, что для моделей с $k=1$ область значений функции u (а поэтому и масштабного фактора) ограничена сверху: $u \leq u_m$, где максимальное значение выражается через постоянную u_0 посредством соотношения $u_m = (1 + \sqrt{1 + 4u_0})/2u_0$. В случае моделей расширения выражения для параметра Хаббла и дилатона имеют вид

$$H = \frac{\sqrt{1+u - k u_0 u^2}}{\sqrt{u_0} u}, \quad \phi = \text{const} \mp \sqrt{\frac{n}{n-1}} \ln \left(1 + \frac{2}{u} + 2H \sqrt{u_0} \right). \quad (1.12)$$

Зависимость масштабного фактора от конформного времени определяется из

$$2u_0 u = k + \sqrt{4u_m + k} \begin{cases} \text{sh} [(n-1)(t_c - t_0)], & k = -1, u_0 > 1/4, \\ \text{ch} [(n-1)(t_c - t_0)], & k = -1, u_0 < 1/4, \\ \sin [(n-1)(t_c - t_0)], & k = 1 \end{cases} \quad (1.13)$$

(при $u_0 = 1/4$, $k = -1$ имеем решение $u = -2 + 2 \exp[(n-1)(t_c - t_0)]$). Через u можно выразить также синхронную в E-представлении временную координату t :

$$t = \frac{\sqrt{u_0} R_0}{n-1} \int \frac{u^{1/(n-1)} du}{\sqrt{1+u - k u_0 u^2}}. \quad (1.14)$$

Заметим, что отрезки $x = 0$, $|h| \leq 1$ для моделей $k=1$ и лучи $x = 0$, $|h| \geq 1$ для моделей с $k=-1$ являются решениями системы (1.1) и представляют собой соответствующие модели ОТО. Все радиационно доминированные модели

с переменным дилатоном начинают свою эволюцию из неустойчивых точек равновесия (y, x, h) , $y = e^h/(1 + e^h)$ с координатами $(0, \sqrt{n(n-1)}, 1)$ и $(1, -\sqrt{n(n-1)}, 1)$. Далее в ходе эволюции соответствующие траектории приближаются к решениям ОТО. В случае моделей с $k=1$ для заданной траектории моменту максимального приближения соответствует значение $u = u_*$, когда $H=0$. После этого расширение сменяется на сжатие и траектории снова начинают удаляться от решений ОТО и заканчивают свою эволюцию в точках $(0, -\sqrt{n(n-1)}, -1)$ и $(1, \sqrt{n(n-1)}, -1)$. При $k=-1$ начальная картина эволюции та же, однако теперь траектории с переменным дилатоном стремятся к решениям ОТО при $u \rightarrow \infty$ (см. также ниже). Если при вхождении в радиационную стадию значение величины $u = u_*$, то полное изменение поля ϕ в этой стадии равно

$$\phi_{\infty} - \phi_r = \pm \sqrt{\frac{n}{n-1}} \ln \frac{2 + u_r + 2\sqrt{1 + u_r + u_0 u_r^2}}{u_r(1 + 2\sqrt{u_0})}. \quad (1.15)$$

Отсюда следует, что если в начале радиационной стадии значение x , не слишком близко к значению $\sqrt{n(n-1)}$, то полное изменение поля дилатона порядка единицы.

2. *Искривленные модели древесного приближения.* Важным частным случаем, когда (1.1) сводится к системе меньшей размерности, являются модели древесного приближения. Для них функция $\alpha(\phi)$ является постоянной и ϕ не входит в последние два уравнения. Теперь мы имеем следующую автономную динамическую систему второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= [n(n-1) - x^2](\alpha/2 - bhx), \\ \frac{dh}{d\tau} &= (1 - h^2)[(n-1)(nb-1) - bx^2], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где моделям с неотрицательной плотностью энергии соответствует область фазовой плоскости (x, h) , ограниченная условием $x^2 \leq n(n-1)$, причем $h^2 < 1 (>1)$ при $k=1 (-1)$. При качественном анализе динамических систем важным этапом является нахождение особых точек и исследование их характера. Рассмотрим особые точки системы (2.1).

а) Точки (x, h) с координатами

$$\left(\pm \sqrt{n(n-1)}, h_0 \right), \quad h_0 = -1, +1. \quad (2.2)$$

Соответствующие собственные числа и собственные векторы определяются из соотношений

$$\lambda_2 = \sqrt{n(n-1)} h_0 (\alpha_0 \mp h_0 \alpha), \quad \lambda_3 = 2h_0(n-1), \quad (2.3)$$

$$\bar{n}_2 = (1, 0), \quad \bar{n}_3 = (0, 1), \quad \alpha_0 \equiv 2b\sqrt{n(n-1)}. \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что точки, представляющие модели расширения ($h_0 = 1$), всегда неустойчивы и имеют характер седла при $\alpha_0 < \pm\alpha$ и неустойчивого узла при $\alpha_0 > \pm\alpha$. Направления сепаратрис определяются собственными векторами (2.4). В случае узла в окрестности особой точки все траектории, кроме исключительных, касаются особого решения $h = 1$ (собственного вектора \bar{n}_2) при $\pm\alpha > \alpha_0 - 2\sqrt{1-1/n}$ и решения $x = \pm\sqrt{n(n-1)}$ (собственного вектора \bar{n}_1) в обратном случае. Поведение траекторий в окрестности точек (2.2) с $h_0 = -1$ получается преобразованием (1.8).

б) Точки

$$\left(\pm \frac{\alpha}{2b}, \pm 1\right) \quad \text{при} \quad |\alpha| < \alpha_0 \quad (2.5)$$

с собственными числами и векторами

$$\lambda_2 = -n(n-1)h h_0(1 - \alpha^2/\alpha_0^2), \quad \lambda_3 = -2n(n-1)bh h_0(1 - 1/nb - \alpha^2/\alpha_0^2), \quad (2.6)$$

$$\bar{n}_2 = (1, 0), \quad \bar{n}_3 \sim \left(1, 2b/\alpha + 4/n\alpha(\alpha^2/\alpha_0^2 - 1)\right). \quad (2.7)$$

Точка с верхним знаком является седлом при $\alpha^2/\alpha_0^2 > 1 - 1/nb$, направление неустойчивой сепаратрисы которого определяется вектором \bar{n}_3 , и устойчивым узлом в противном случае. Характер точки с нижним знаком получается отсюда с учетом инвариантности относительно преобразований (1.8).

с) При $a < 2/n - 1$ особыми являются точки

$$\left(\pm \sqrt{(n-1)(n-1/b)}, \pm h_1(\alpha)\right), \quad h_1(\alpha) \equiv \frac{\alpha}{\alpha_0 \sqrt{1-1/nb}}, \quad (2.8)$$

собственные числа и векторы которых равны

$$\lambda_{2,3} = \pm \frac{n-1}{2} h_1 \left\{ -1 \pm \left[1 - 8(nb-1)(1-h_1^{-2}) \right]^{1/2} \right\}, \quad (2.9)$$

$$n_{2,3} \sim \left(1, -2b\lambda_{3,2}/\alpha(n-1)\right). \quad (2.10)$$

Заметим, что для закрытых моделей $h^2 < 1$ и из (2.9) следует, что собственные числа имеют разные знаки и точка является седлом. Для открытых моделей $h^2 > 1$ и точка (2.8) с верхним/нижним знаком при $\alpha > 0$ является устойчивым/неустойчивым узлом (фокусом) при

$$8(nb-1)(1-h_1^{-2}) < 1 (> 1). \quad (2.11)$$

В E-представлении точке (2.8) соответствует решение

$$\begin{aligned} R &= R_1 |r|, \quad \phi = \text{const} + \phi_1 \ln |r|, \\ R_1 &\equiv \left| 1 - h_1^{-2} \right|^{-1/2}, \quad \phi_1 = [2 - n(1+a)]/\alpha. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Это же решение в струнном представлении имеет вид

$$\bar{R} = R_1 \left(1 + \phi_1 / \sqrt{n-1}\right) |\bar{r}|, \quad \phi = \text{const} + \frac{\phi_1 \ln |\bar{r}|}{1 + \phi_1 / \sqrt{n-1}} \quad (2.13)$$

при $\phi_1 \neq -\sqrt{n-1}$, и

$$\bar{R} = \text{const}, \quad \phi \sim \bar{r} \quad (2.14)$$

при условии

$$\alpha = [n(1+a) - 2] / \sqrt{n-1}. \quad (2.15)$$

Заметим, что для значений α из (2.15) имеем $h^2 = 1 - (n-1)(1+a)/(1-a)$, и поэтому решение (2.14) соответствует закрытым моделям при $a > -1$ (напомним, что для точки (2.8) должно выполняться условие $a < 2/n-1$) и плоским моделям при $a = -1$. Условие (2.15) выполняется, например, в чисто грави-дилатонной модели некритических струн, когда в действии (I2.1) $\bar{L}_m = (D - D_{cr}) e^{-2\phi} / 3$, D_{cr} - критическая размерность ($= 10$ для суперструн). В этом случае $a = -1$, $\beta = 0$ и согласно (I3.11) $\alpha = -2/\sqrt{n-1}$, а поэтому решение (2.14) соответствует плоским моделям. Это решение было найдено в [5].

При условии

$$|\alpha| = \alpha_0 \sqrt{1 - 1/nb} \quad (2.16)$$

в (2.8) имеем $|h_1| = 1$ и особая точка (2.8) соответствует плоским моделям. При этом она сливается с точкой (2.5) и $\lambda_2 = 0$, т.е. является вырожденной особой точкой. Анализ качественного характера по стандартной схеме (см., например, [6]) показывает, что она представляет собой состояние равновесия с одним устойчивым узловым сектором и двумя седловыми. Сепаратрисами между этими секторами являются решения $x = \pm \sqrt{n(n-1)}$. Для узлового сектора $h^2 > 1$, соответствующие решения представляют открытые модели (для этого случая фазовую картину открытых моделей см. на рис.2d). Траектории же седловых секторов соответствуют закрытым моделям, а фазовая картина качественно эквивалентна случаю рис.1e. Для случая (2.16) соответствующее решение имеет вид

$$R = \text{const} \cdot |r|, \quad \phi = \text{const} + \frac{\alpha}{2b} \ln |r|, \\ \bar{R} = \text{const} \cdot |\bar{r}|, \quad \phi = \text{const} + \frac{(\alpha/2b) \ln |\bar{r}|}{1 + \alpha/2b \sqrt{n-1}}, \quad a \neq -1. \quad (2.17)$$

При $a = -1$ имеем решение (2.14). Поскольку мы рассматриваем древесное приближение, то поле дилатона можно найти из соотношения $\phi = \sqrt{n-1} \phi / 2$.

В конечной части фазовой плоскости система (2.1), кроме (2.2), (2.5), (2.8), других особых точек не имеет. Для закрытых моделей фазовое пространство системы (2.1) компактно и других особых точек нет. Для открытых моделей следует дополнительно исследовать поведение фазовых траекторий на бесконечности фазового пространства $h \rightarrow \pm\infty$. Рассмотрим фазовые картины для этих случаев по отдельности.

2.1. *Закрытые модели.* Траектории с неотрицательной плотностью энергии лежат в прямоугольной области

$$|x| \leq \sqrt{n(n-1)}, \quad |h| \leq 1 \quad (2.18)$$

фазовой плоскости (x, h) . Граничные отрезки $x = \pm\sqrt{n(n-1)}$ соответствуют чисто грави-дилатонным решениям, а $h = \pm 1$ - моделям с плоским пространством. С учетом предыдущего анализа можно построить фазовые картины для качественно различных случаев, причем из инвариантности динамической системы относительно преобразований (1.8) достаточно рассмотреть случай $\alpha \geq 0$.

1) Для значений $\alpha > \alpha_0$ единственными особыми точками являются точки (2.2) (для точек (2.8) получаем $h^2 > 1$ и поэтому они соответствуют открытым моделям). Соответствующие фазовые картины изображены на рис. 1a и 1d, соответственно для случаев $b < 1/n$ и $b > 1/n$. Во втором из этих случаев, как это следует из (1.7), существуют отрезки траекторий с инфляционным характером расширения в синхронном эйнштейновском времени. Все модели с $k = 1$ начинают свою эволюцию в некоторый конечный момент синхронного времени t E-представления из точки $(-\sqrt{n(n-1)}, 1)$ и заканчивают эволюцию в точке $(\sqrt{n(n-1)}, -1)$ в состоянии сжатия. Вблизи начального и конечного состояний модели асимптотически приближаются к соответствующим решениям с плоским пространством.

2) При $\alpha < \alpha_0$, $a > 2/n - 1$ особыми являются точки (2.2) и (2.5). Все они лежат на границе фазового пространства, и соответствуют моделям с плоским пространством. Фазовые картины этого случая изображены на рис. 1b. Видно, что существуют три качественно различных класса моделей, разделенных сепаратрисами седловых точек (2.5).

3) При $\alpha < \alpha_0$, $a < 2/n - 1$ нужно различать два случая. Когда $1 - 1/nb < \alpha^2/\alpha_0^2$, то для точек (2.8) имеем $h^2 > 1$ и они соответствуют открытым моделям. Для этого случая фазовая картина закрытых моделей качественно эквивалентна предыдущему случаю, с тем отличием, что теперь существуют инфляционные отрезки траекторий (рис. 1e). При условии $1 - 1/nb > \alpha^2/\alpha_0^2$ появляются новые седловые точки (2.8) и фазовая картина имеет вид рис. 1f. Заметим, что по сравнению с предыдущими случаями теперь появляются новые классы решений, являющиеся моделями чистого расширения или сжатия в E-представлении. Первому случаю соответствуют траектории, лежащие выше устойчивых сепаратрис седла (2.8) с верхним знаком, второму - лежащие ниже неустойчивых сепаратрис седла с нижним знаком.

4) Случай $\alpha = 0$ соответствует радиационно-доминированным моделям. Соответствующая фазовая картина изображена на рис. 1c.

2.2. *Открытые модели.* Для моделей с $k = -1$ в дополнение к проделанному выше анализу характера особых точек следует исследовать

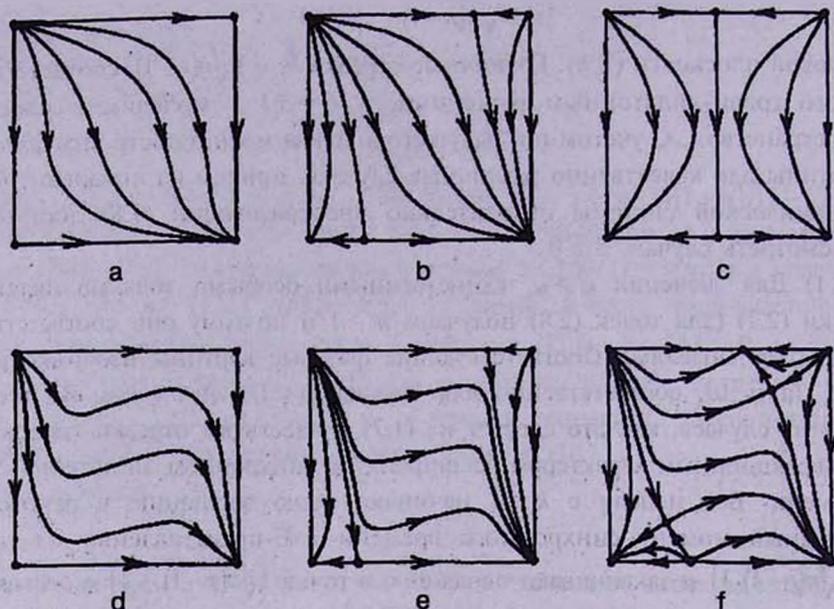


Рис.1. Фазовые портреты замкнутых моделей древесного приближения на плоскости (x, h) , $|x| \leq \sqrt{n(n-1)}$, $|h| \leq 1$, соответствующие решениям динамической системы (2.1) с неотрицательной плотностью энергии. Изображены качественно различные случаи значений параметров $\alpha \geq 0$ и a (см. текст). Картины для отрицательных α получаются отсюда с учетом инвариантности относительно (1.9).

также поведение фазовых траекторий на бесконечности фазового пространства, когда $h \rightarrow \pm\infty$. Вследствие инвариантности относительно преобразования (1.8) достаточно рассмотреть случай $h \geq 1$, соответствующий моделям расширения. Для компактификации фазового пространства введем новую переменную $z = 1/h$, $0 \leq z \leq 1$. В терминах независимой переменной $dT = h d\tau = H dt$ динамическая система (2.1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dT} &= [n(n-1) - x^2](\alpha z/2 - bx), \\ \frac{dz}{dT} &= z(1 - z^2)[(n-1)(nb-1) - bx^2], \end{aligned} \quad (2.19)$$

фазовым пространством которой является прямоугольник $|x| \leq \sqrt{n(n-1)}$, $0 \leq z \leq 1$. Помимо рассмотренных выше точек (2.2), (2.5) и (2.8) особыми для этой системы являются точки

$$x = \pm\sqrt{n(n-1)}, \quad z = 0 \quad (2.20)$$

с собственными числами

$$\lambda_2 = 2bn(n-1), \quad \lambda_3 = 1 - n \quad (2.21)$$

и точка

$$x = 0, \quad z = 0 \quad (2.22)$$

с собственными числами

$$\lambda_2 = -bn(n-1), \quad \lambda_3 = (n-1)(bn-1). \quad (2.23)$$

Особые точки (2.20) являются седлами с устойчивыми сепаратрисами $x = \pm\sqrt{n(n-1)}$ и неустойчивыми сепаратрисами $z=0$. Точка (2.22) является устойчивым узлом при $a > 2/n - 1$ и седлом в противном случае. Ниже при рассмотрении различных случаев параметров мы ограничимся значениями $\alpha \geq 0$. Фазовые картины для отрицательных α можно получить отсюда с учетом инвариантности системы (2.19) относительно замены $x \rightarrow -x, \alpha \rightarrow -\alpha$.

1) При $\alpha > \alpha_0, a > 2/n - 1$ все модели расширения начинают эволюцию в конечный момент эйнштейновского синхронного времени из точки $x = -\sqrt{n(n-1)}, z = 1 (H = \infty)$ и заканчивают ее в точке $x = 0, z = 0 (H = 1)$. Соответствующая фазовая картина изображена на рис.2а.

2) Для значений $\alpha < \alpha_0, a > 2/n - 1$ существует два класса решений, разделенных неустойчивой сепаратрисой узла (2.5) с верхним знаком. Траектории первого класса исходят из точки (2.2) с нижним знаком и $h=1$, а второго - из точки (2.2) с верхним знаком и с $h=1$. Конечной точкой всех моделей с $k=-1$ является точка (2.22). Фазовая картина изображена на рис.2б.

3) При $\alpha > \alpha_0, a > 2/n - 1$ особыми являются точки (2.2), (2.8), (2.20) и (2.22). Все модели заканчивают эволюцию в точке (2.8), которая является узлом или фокусом в зависимости от того, какое из условий (2.11) выполнено. На рис.2г изображен второй из этих случаев.

4) При условиях $\alpha < \alpha_0, a < 2/n - 1, |h_1| > 1$ фазовый портрет имеет вид рис.2е. Изображен случай, когда выполнено второе из условий (2.11), когда особая точка является фокусом.

5) В случае $\alpha < \alpha_0, a < 2/n - 1, |h_1| < 1$ фазовый портрет изображен на рис.2д.

6) На рис.2с изображена фазовая картина радиационно-доминированных открытых моделей ($\alpha = 0, b = 1/2n$).

3. *Качественный анализ в общем случае.* В этом разделе мы рассмотрим космологические модели для общего случая функции $\alpha(\phi)$, без конкретизации дилатонных функций связи в эффективном струнном лагранжиане. В E-представлении эти модели описываются динамической системой (1.1). Для этой системы особыми являются точки пространства (ϕ, x, h) с координатами

$$(\phi_0, 0, \pm 1), \quad \alpha(\phi_0) = 0, \quad (3.1)$$

где верхний/нижний знак соответствует моделям расширения/сжатия. Мы рассмотрим первый из этих случаев. Результаты для сжимающихся

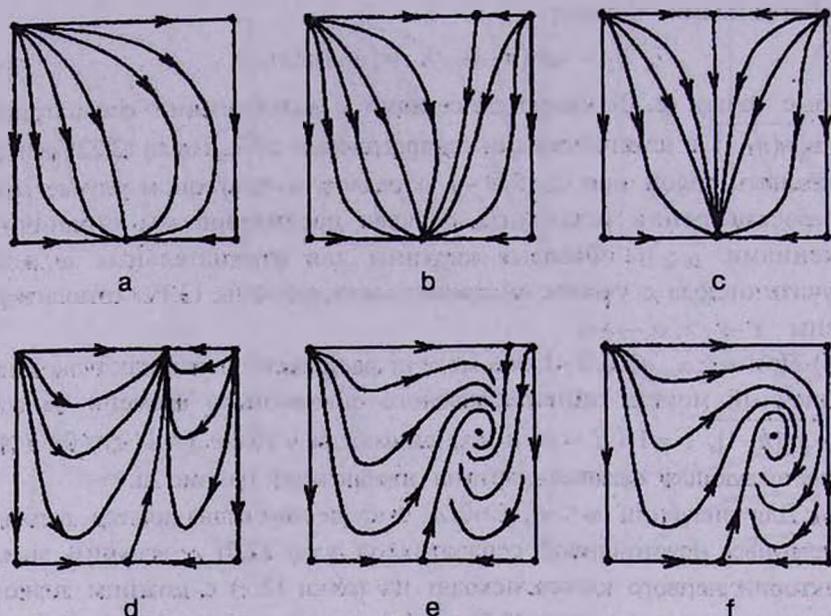


Рис.2. То же, что и на рис.1 для открытых моделей расширения на плоскости ($x, z = 1/h$). $|x| \leq \sqrt{n(n-1)}$, $0 \leq z \leq 1$. Картины для моделей сжатия получаются отсюда преобразованием (1.8).

моделей получаются отсюда преобразованием (1.8). Заметим, что точки (3.1) представляют собой решения ОТО при $k=0$. Соответствующие решения при $k=1$ представлены отрезками $\phi = \phi_0, x=0, |h| < 1$, а при $k=-1$ - лучами $\phi = \phi_0, x=0, |h| > 1$.

В окрестности особой точки (3.1) уравнение для h разделяется от двух остальных, и соответствующие собственные числа равны

$$\lambda_{1,2} = -k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + n(n-1)\alpha'_0/2}, \quad \lambda_3 = n(1+a) - 2, \quad (3.2)$$

где $k_1 = n(1-a)/4$, $\alpha'_0 = (d\alpha/d\phi)_{\phi=\phi_0}$. Собственные числа $\lambda_{1,2}$ определяют характер особой точки для траекторий с $h=1$, соответствующих плоским моделям. Различные возможные варианты этого случая исследовались в первой части данной работы. Из (3.2) следует, что при $1+a > 2/n$ для моделей с $k=\pm 1$ точка равновесия является неустойчивой. Соответствующие решения ОТО при $t \rightarrow -\infty$ стремятся к решению с плоским пространством (точка (3.1) с верхним знаком). В случае же $1+a < 2/n$ (что выполняется, например, для потенциально доминированного источника, $a=-1$) решения ОТО с $k=\pm 1$ стремятся к решению (3.1) в пределе $t \rightarrow +\infty$ (модели инфляции). При $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0$ точка равновесия является устойчивой и к решению (3.1) стремятся также решения струнной космологии с

переменным дилатоном.

Перейдем теперь к исследованию поведения траекторий динамической системы (1.1) на бесконечности фазового пространства. Для этого удобно компактифицировать фазовое пространство, дополнив его бесконечно удаленной границей. Для моделей с $k=1$ для этого достаточно произвести отображение

$$e^\psi = y/(1-y), \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (3.3)$$

Соответствующая динамическая система отличается от (1.1) лишь первым уравнением, имеющем теперь вид

$$\frac{dy}{d\tau} = xy(1-y), \quad (3.4)$$

а фазовым пространством является прямоугольный параллелепипед

$$0 \leq y \leq 1, \quad |x| \leq \sqrt{n(n-1)}, \quad |h| \leq 1. \quad (3.5)$$

При $h=1$ (случай $h=-1$ получается отсюда преобразованием (1.8)) на границе области (3.5) точками равновесия являются точки (y, x, h) с координатами $(\alpha = \alpha(y))$

$$(j, \pm \sqrt{n(n-1)}, 1), \quad j = 0, 1, \quad (3.6)$$

$$(j, \alpha(j)/2b, 1), \quad |\alpha(j)| \leq \alpha_0. \quad (3.7)$$

Собственные числа $\lambda_{1,2}$ для этих точек те же, что и для плоских моделей (формулы (I4.26), (I4.27)), а

$$\lambda_3 = 2(n-1) \quad (3.8)$$

для точек (3.6) и

$$\lambda_3 = 2n(n-1)b \left[\frac{\alpha^2(j)}{\alpha_0^2} + \frac{1}{nb} - 1 \right] \quad (3.9)$$

для точек (3.7). Таким образом, для моделей с $k=\pm 1$ точки (3.6) всегда неустойчивы, а точки (3.7) устойчивы, если

$$(-1)^j \alpha(j) < 0, \quad 1 - \alpha^2(j) / \alpha_0^2 > \frac{2(n-1)}{n(1-a)} \quad (3.10)$$

Заметим, что второе из этих условий возможно только при $a < 2/n - 1$. Теперь, учитывая также (3.2), заключаем, что при $k=\pm 1$ все точки равновесия с $h=1$ неустойчивы при $a > 2/n - 1$.

При $a < 2/n - 1$ имеются также точки равновесия, лежащие на гранях $y=0, 1$ параллелепипеда (3.5):

$$(j, \pm \sqrt{(n-1)(n-1/b)}, \pm h_1(\alpha(j))), \quad j = 0, 1, \quad (3.11)$$

где функция $h_1(\alpha)$ определена соотношением (2.8), и соответствующие точкам (2.8) древесного приближения. Собственные числа $\lambda_{2,3}$ точек

(3.11) определяются соотношениями (2.9), а

$$\lambda_1 = \pm(-1)^j \sqrt{(n-1)(n-1/b)}. \quad (3.12)$$

При $h_1^2 < 1$ точки (3.11) соответствуют закрытым моделям и являются неустойчивыми, поскольку собственные числа λ_2 и λ_3 имеют разные знаки. При $h_1^2 > 1$ решения, описываемые точками (3.11), являются открытыми моделями. Для случая верхнего знака точка с $j=0$ неустойчива, а точка с $j=1$ устойчива при α ($y=1$) > 0 и соответствует моделям расширения. Таким образом, решение, соответствующее точке (3.11), может быть устойчивым только для открытых моделей расширения: $\pm \alpha(j) > 0$, $\pm(-1)^j < 0$, $h_1^2 > 1$.

Поскольку для открытых моделей $|h| > 1$, то для компактификации фазового пространства наряду с (3.3) произведем также отображение

$$z = 1/h, \quad |z| \leq 1. \quad (3.13)$$

Введя также новую независимую переменную $dT = hdt$, соответствующую динамическую систему запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dT} &= xyz(1-y), & \frac{dx}{dT} &= [n(n-1) - x^2](\alpha z/2 - bx), \\ \frac{dz}{dT} &= z(1-z^2)[(n-1)(nb-1) - bx^2]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Как и выше, будем рассматривать модели расширения (картина для сжимающихся моделей получается преобразованием $x \rightarrow -x$, $z \rightarrow -z$). Фазовым пространством системы (3.14) является параллелепипед

$$0 \leq y \leq 1, \quad |x| < \sqrt{n(n-1)}, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (3.15)$$

а точки равновесия лежат на гранях $z=1$ и $z=0$. В первом из этих случаев ($h=1$) особые точки и их характер те же, что и в случае $k=1$ и соответствуют моделям с плоским пространством. Поэтому рассмотрим второй случай. При $z=0$ ($h=\infty$) решениями системы (3.14) являются отрезки $z=0$, $y = \text{const}$. Все точки отрезков ($z=0$, $x=0$) и $(x = \pm\sqrt{n(n-1)}$, $z=0$) являются точками равновесия. Собственные числа, соответствующие оси z , равны

$$\lambda_3 = (n-1)(nb-1) \quad (3.16)$$

для точек $x=z=0$ и

$$\lambda_3 = 1-n \quad (3.17)$$

для точек $x = \pm\sqrt{n(n-1)}$, $z=0$. Во втором случае точки равновесия всегда неустойчивы. Точки же $x=z=0$ устойчивы при $a > 2/n-1$ и неустойчивы в противном случае. Учитывая также, что для первого из этих условий точки равновесия при $z=1$ неустойчивы, заключаем, что все модели с $k=-1$ заканчивают свою эволюцию на отрезке $x=0$, $z=0$. В окрестности соответствующей особой точки траектории динамической системы входят в

эту точку, находясь в плоскости (x, z) . В этой плоскости соответствующая точка равновесия является устойчивым узлом с собственными числами

$$\lambda_2 = -nb(n-1), \quad \lambda_3 = (n-1)(nb-1). \quad (3.18)$$

При $a < 2/n - 1$ конечной точкой эволюции моделей с $k = -1$ могут быть точки равновесия на грани $z = 1$, соответствующие моделям с $k = 0$, а также точки (3.11) при указанных выше условиях (см. абзац после формулы (3.12)).

На основе проведенного анализа можно построить фазовые картины космологических моделей для любой заданной функции $\alpha(\phi)$, определяемой функциями связи дилатона в эффективном струнном действии. На рис. 3 и 4 в качестве иллюстрации приведены фазовые картины замкнутых и открытых моделей для функции $\alpha(\phi)$, удовлетворяющей граничным условиям $0 < \alpha(-\infty) < \alpha_0$, $\alpha(+\infty) < -\alpha_0$ и с единственным нулем. Фазовым пространством моделей с неотрицательной плотностью энергии является параллелепипед (3.5) в случае $k = 1$ (рис.3) и (3.15) в случае $k = -1$ (рис.4). Траектории, лежащие на верхних гранях ($h = 1$), составляют инвариантное подмножество и соответствуют плоским моделям. Соответствующая двумерная фазовая картина приведена на рис.3b в первой части [3], с тем лишь отличием, что теперь мы предполагаем, что нуль функции является фокусом, тогда как в [3] изображен случай узла. На рис.3 нижняя грань также соответствует плоским моделям ($h = -1$, модели сжатия). Вертикальные отрезки $\phi = \phi_0$, $x = 0$, $|h| < 1$ и $0 < z < 1$ представляют соответствующие решения ОТО. Рассмотрим по отдельности изображенные фазовые картины.

1) $k = 1$, $a > 2/n - 1$ (рис.3a).

Функция $h(\tau)$ является монотонно убывающей. Единственной устойчивой неподвижной точкой является вершина $(0, -\sqrt{n(n-1)}, -1)$ нижней грани. Все модели, кроме особых, соответствующих сепаратрисам седловых точек, и решения ОТО начинают эволюцию в области слабой связи из точки $(0, \sqrt{n(n-1)}; 1)$ в некоторый конечный момент эйнштейновского синхронного времени и заканчивают ее также в конечный момент времени в области слабой связи в состоянии сжатия. Таким образом, чисто гравидилатонные решения являются аттракторами в начальных и поздних стадиях эволюции. Решение ОТО, соответствующее постоянному дилатону, неустойчиво. Фазовая картина на грани $y = 0$ ($y = 1$) качественно эквивалентна картине, приведенной на рис.1b (1a).

2) $k = 1$, $a < 2/n - 1$ (рис.3b).

Теперь существует область фазового пространства: $|x| < \sqrt{(n-1)(n-1/b)}$ с инфляционными отрезками фазовых траекторий, $dh/d\tau > 0$ (см. (1.7)). Кроме особых решений, соответствующих сепаратрисам седловых точек, существуют четыре качественно различных класса решений с переменным

дилатоном:

(i)-модели, начинающие и заканчивающие эволюцию в области слабой связи и подобные моделям рис.3а. Однако теперь существуют

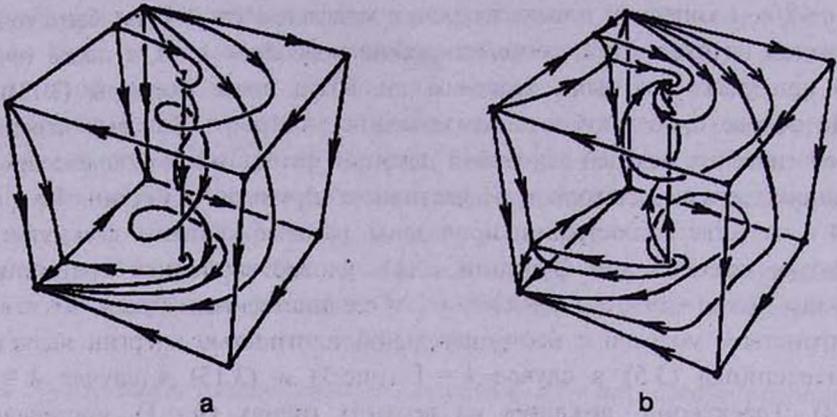


Рис.3. Фазовые картины замкнутых моделей с учетом петлевых поправок к дилатонным функциям связи в пространстве (y, x, h) , $0 \leq y \leq 1$, $|x| \leq \sqrt{n(n-1)}$, $|h| \leq 1$, соответствующие решениям системы (1.1) с неотрицательной плотностью энергии. Изображены случаи а) $a > 2/n - 1$; б) $a < 2/n - 1$.

отрезки траекторий с $dh/dt > 0$;

(ii)-модели, начинающие эволюцию в области слабой связи вблизи чисто гравидилатонного плоского решения расширения (точка $(0, \sqrt{n(n-1)}, 1)$). После начального неинфляционного расширения, в некоторый момент времени $dh/dt = 0$, эволюция входит в инфляционную стадию, $dh/dt > 0$, и заканчивается в точке (3.1) с $h = 1$ (переходы от $dh/dt < 0$ к $dh/dt > 0$ и наоборот могут произойти несколько раз). Все модели этого класса стремятся к соответствующим решениям ОТО, а эффекты, обусловленные кривизной пространства, быстро становятся несущественными. В этой схеме стремление к нулю вариаций дилатона происходит достаточно эффективно, чтобы не противоречить современным наблюдательным данным и является иллюстрацией механизма Дэмюра-Полякова;

(iii)-модели, начинающие сжатие из точки (3.1) с нижним знаком вблизи решения ОТО и заканчивающие эволюцию в точке $(0, -\sqrt{n(n-1)}, -1)$, вблизи чисто гравидилатонного решения сжатия. Заметим, что в промежуточных стадиях могут иметь место переходы сжатие-расширение-сжатие. Как и в первом случае, космологическая эволюция не приводит к фиксации дилатона.

(iv)-траектории, выходящие из точки (3.1) с нижним знаком и входящие в точку (3.1) с верхним знаком. Для этих моделей начальное сжатие в ходе эволюции переходит в расширение, эффекты кривизны пространства быстро становятся несущественными и модели стремятся

к соответствующим плоским моделям ОТО. Происходит эффективная фиксация дилатона.

3) $k = -1$, $a > 2/n - 1$ (рис.4а).

Изображены модели расширения E-представления. Фазовую картину моделей сжатия можно получить преобразованием (1.8) (заметим, что для динамической системы (3.14) переменная T при этом не меняет знак). Функция $h(\tau)$ является монотонно возрастающей, а функция $H(h)$ - монотонно убывающей. Все модели, кроме особых, начинают эволюцию в окрестности чисто гравидилатонного плоского решения и заканчивают ее на отрезке $x=0$, $z=0$ на нижней грани. Соответствующее предельное значение дилатона определяется начальными условиями. Фазовые картины на гранях $y=0$ и $y=1$ качественно эквивалентны картинам рис.2b и 2a соответственно.

4) $k = -1$, $a < 2/n - 1$ (рис.4б).

После начального неинфляционного расширения в окрестности чисто гравидилатонного плоского решения модели переходят в инфляционную стадию и приближаются к решению ОТО. Раздувание пространства приводит к быстрому подавлению эффектов кривизны и вариаций дилатона. Траектории быстро стремятся к плоской модели ОТО. Существует также класс моделей, начинающих эволюцию на отрезке $x=0$, $z=0$ (сепаратрисы вырожденных седел на этом отрезке). Таким образом, в отличие от случая закрытых

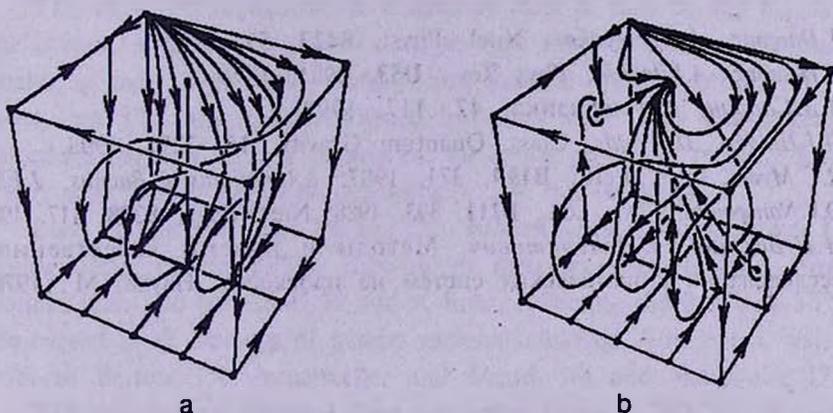


Рис.4. То же, что и на рис.3 для открытых моделей расширения в пространстве (y, x, z) $0 \leq y \leq 1$, $|x| \leq \sqrt{n(n-1)}$, $0 \leq z \leq 1$ (динамическая система (3.14)).

моделей (рис.3b), теперь фиксация дилатона происходит для всех моделей. Поскольку для рассматриваемого примера функции $\alpha(y)$, $\alpha(0) > 0$ и $\alpha(1) < 0$, то особые точки (3.11) не могут быть устойчивыми.

Работа выполнена в рамках гранта 96-855 Министерства науки и высшего образования Республики Армения.

QUALITATIVE ANALYSIS OF HIGHER-LOOP STRING COSMOLOGY.II

A.A.SAHARIAN

By using the qualitative methods the homogeneous and isotropic cosmological models with curved spatial sections are investigated within the framework of higher-loop effective string gravity. It is shown that for the radiation-dominated models the corresponding dynamical system is exactly integrable for the general case of dilaton coupling functions. At tree-level the two dimensional phase portraits are presented for both closed and open models. When higher-loop corrections are included the equilibrium points are found and their character is investigated. The results are illustrated for the concrete example. The different cases of dilaton stabilization are considered within the framework of Damour-Polyakov mechanism.

ЛИТЕРАТУРА

1. *T.Damour, A.M.Polyakov*, Nucl. Phys., **B423**, 532, 1994.
2. *T.Damour, A.Vilenkin*, Phys. Rev., **D53**, 2981, 1996.
3. *А.А.Саарян*, Астрофизика, **42**, 117, 1999.
4. *D.J.Holden, D.Wands*, Class. Quantum Gravity, **15**, 3271, 1998.
5. *R.C.Myers*, Phys. Lett., **B199**, 371, 1987; *I.Antoniadis, C.Bachas, J.Ellis, D.V.Nanopoulos*, Phys. Lett., **B211**, 393, 1988; Nucl. Phys., **B328**, 117, 1989.
6. *Н.Н.Баутин, Е.А.Леонтович*, Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, Наука, М., 1976.