# АСТРОФИЗИКА

ТОМ 42 МАЙ, 1999 ВЫПУСК 2

УДК: 524.7

# ДВУХФОТОННЫЕ ПРОЦЕССЫ РОЖДЕНИЯ И АННИГИЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР. II. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФОТОНОВ

Д.И.НАГИРНЕР, В.М.ЛОСКУТОВ

Поступила 10 сентября 1998
Принята к печати 25 октября 1998

Во второй части работы сформулировано кинетическое уравнение, описывающее эволюцию распределения фотонного газа при аннигиляции и рождении электрон-позитронных пар. Уравнение записано в виде уравнения переноса излучения с учетом возможного вырождения газов, коэффициенты поглощения и излучения выражены через сечения рассматриваемых процессов. Коэффициенты усреднены по направлениям, когда распределения частиц изотропны. Рассмотрены случаи, когда поле излучения изотропно или имеет составляющую, пропорциональную косинусу угла с некоторым направлением. Вычисляется спектр излучаемых фотонов, а также их средняя частота и дисперсия.

1. *Введение.* В первой части этой работы [1] была изучена кинематика процессов рождения и аннигиляции электрон-позитронных пар, а также выписаны сечения этих процессов. В настоящей, второй части будет сформулировано релятивистское кинетическое уравнение (РКУ), описывающее эволюцию спектра фотонов за счет рассматриваемых процессов с учетом тождественности квантовомеханических частиц, т.е. принимаются во внимание вынужденное рассеяние и принцип Паули, что необходимо, например, при построении модели гамма-всплесков в виде огненного шара или модели Вселенной на ранних этапах ее истории.

Сначала будет дана формулировка уравнения в размерном виде, затем оно будет обезразмерено. Уравнение перепишется в виде уравнения переноса излучения, определятся коэффициенты поглощения и излучения. Будут рассмотрены частные случаи уравнения, когда частицы и фотоны имеют изотропные распределения по импульсам. Соответствующие коэффициенты усредняются по направлениям частиц и фотонов. Используются обозначения ч. I.

Для формулировки кинетического уравнения введем обозначения для функций распределения частиц и фотонов по импульсам. Их распределения удобно характеризовать безразмерными и инвариантными по отношению к преобразованию Лоренца величинами - средними числами заполнения состояний.

Пусть для электронов и позитронов это $n_{\mp}(\bar{r},t,\bar{p})$. Для краткости пространственно-временные аргументы - координаты $\bar{r}$ и время $t$ - будем опускать, а в качестве аргумента-импульса альтернативно $\bar{p}$ указывать безразмерную величину $\bar{z} = \bar{p}/mc$. Аналогично для фотонов среднее число заполнения состояний, используемое в литературе довольно часто, обозначаем $n(\bar{k})$ или $n(\bar{x})$, где безразмерный импульс $\bar{x} = \bar{k}/mc$. Величины $n$ будем называть и функциями распределения.

Для средних чисел заполнения выполняются обычные условия нормировки, которые в безразмерных обозначениях и в сопутствующих системах каждого из газов, в которых средний импульс частиц этих газов равен нулю, записываются в виде

$$\frac{2}{\lambda_C^3}\int n_{\mp}(\bar{z})\,d^3z = n_{\mp}^0, \quad \frac{2}{\lambda_C^3}\int n(\bar{x})\,d^3x = n^0. \tag{1}$$

Здесь $\lambda_C = h/mc$ - комптоновская длина волны. Через $n_{\mp}^0$ и $n^0$ обозначены концентрации частиц и фотонов в сопутствующих системах. Эти скалярные величины могут быть заданы или определяться из каких-либо условий в зависимости от задачи.

Если принять релятивистскую квантовую систему единиц (РКСЕ), в которой $m = c = \hbar = 1$, то следует положить $\lambda_C = 2\pi$. В этой системе классический радиус электрона равен постоянной тонкой структуры: $r_e = e^2/mc^2 = (e^2/\hbar c)\hbar/mc = 1/137.036$.

Нам понадобятся и четырехмерные релятивистские обозначения для импульсов частиц $\underline{z} = \underline{p}/mc = \{\gamma, z\bar{\Omega}\}$, $\underline{p} = \{p_0, \bar{p}\}$, $p_0 = \sqrt{m^2c^2 + p^2}$, $\underline{x} = \underline{k}/mc = \{x, x\bar{\omega}\}$, $\underline{k} = \{k, \bar{k}\}$.

2. *Кинетическое уравнение*. Явно релятивистски ковариантное кинетическое уравнение для фотонов, в котором учитываются только двухфотонные аннигиляции и рождения электрон-позитронных пар, записывается в виде

$$\underline{k}\,\underline{\nabla} n(\bar{k}) = \frac{r_e^2}{2}\frac{2m^2c^2}{h^3}\int \frac{d^3k_1}{k_1}\frac{d^3p_-}{p_{0-}}\frac{d^3p_+}{p_{0+}}\delta(\underline{p}_- + \underline{p}_+ - \underline{k} - \underline{k}_1)F(\xi,\xi_1)$$
$$\left\{n_-(\bar{p}_-)n_+(\bar{p}_+)\left[1 + n(\bar{k})\right]\left[1 + n(\bar{k}_1)\right] - n(\bar{k})n(\bar{k}_1)\left[1 - n_-(\bar{p}_-)\right]\left[1 - n_+(\bar{p}_+)\right]\right\}. \tag{2}$$

Здесь четырехмерный оператор градиента $\underline{\nabla} = \{(1/c)\partial/\partial t, -\bar{\nabla}\}$. Наличие $\delta$-функции отражает законы сохранения. Величина

$$F = F(\xi,\xi_1) = \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi} + 2\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi_1}\right) - \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi_1}\right)^2, \tag{3}$$

где инвариантные скалярные произведения $\xi = \underline{x}\,\underline{z}_-$, $\xi_1 = \underline{x}_1\underline{z}_-$.

В (2) принято во внимание, что средние числа заполнения фотонных состояний могут быть не малы, то есть фотонный газ может быть вырожден. Допускается вырождение и газов частиц. Поэтому в кинетическое уравнение введены множители, учитывающие принцип Паули для частиц-фермионов и принцип вынужденных переходов для фотонов, как бозонов. Как всегда в подобных случаях, произведения четырех функций в фигурной скобке в (2) взаимно уничтожаются.

Впредь используем только безразмерные обозначения величин. Кинетическое уравнение в безразмерном виде в РКСЕ имеет вид

$$\underline{x\nabla} n(\bar{x}) = D_e \int \frac{d^3 x_1}{x_1} \frac{d^3 z_-}{\gamma_-} \frac{d^3 z_+}{\gamma_+} \delta\left(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1\right) F(\xi, \xi_1)$$
$$\left\{n_-(\bar{z}_-) n_+(\bar{z}_+)\left[1 + n(\bar{x})\right]\left[1 + n(\bar{x}_1)\right] - n(\bar{x}) n(\bar{x}_1)\left[1 - n_-(\bar{z}_-)\right]\left[1 - n_+(\bar{z}_+)\right]\right\}. \quad (4)$$

Здесь $D_e = r_e^2/\lambda_C^3$, а $\gamma_\pm = p_{0\pm}/mc$ - безразмерные энергии частиц (лоренцевские множители).

Из кинетического уравнения вытекают равновесные распределения частиц и фотонов при условии равновесия процессов аннигиляции и рождения пар. При этом условии выражение, стоящее в фигурной скобке в (4), равно нулю. Это равенство должно быть следствием законов сохранения. При этом в равновесные распределения должны входить единая температура $T$, единая скорость относительно общей сопутствующей системы отсчета $\vec{v}$ и соблюдаться баланс числа частиц (сохранение заряда и "двухфотонность" процессов). Следовательно, в равновесии выполняются распределения Ферми-Дирака для частиц и распределение Бозе-Эйнштейна для фотонов, причем между химическими потенциалами частиц и фотонов должно выполняться соотношение $\mu_- + \mu_+ = 2\mu_\gamma$.

Если газы не вырождены, то распределения частиц в сопутствующих системах отсчета переходят в релятивистские максвелловские, а химические потенциалы прямо выражаются через концентрации, так что в сопутствующих системах

$$n_\pm(\bar{z}) = C_\pm e^{-y\gamma}, \qquad C_\pm = n_\pm^0 \frac{\lambda_C^3 y}{8\pi K_2(y)}, \quad (5)$$

где $y = mc^2/k_B T$, а $K_2(y)$ - функция Макдональда. В случае фотонов надо перейти к пределу нулевой массы покоя, тогда $\gamma$ заменится на $x$, а $K_2(y)$ на $2/y^2$ и формула (5) перейдет в формулу Вина.

Поделив РКУ (4) на частоту фотона и опустив произведения четырех функций распределения, представим его в виде, обычном для уравнения переноса излучения. Запишем и его в безразмерных обозначениях:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\omega}\bar{\nabla}\right) n(\bar{x}) = -n(\bar{x})\left(\alpha_\gamma - \alpha_- - \alpha_+\right) + \varepsilon\left[1 + n(\bar{x})\right] + \varepsilon_*. \quad (6)$$

Здесь введены обозначения для интегралов, входящих в РКУ:

$$\alpha_\gamma(\bar{x}) = \frac{D_e}{x}\int\frac{d^3x_1}{x_1}n(\bar{x}_1)\frac{d^3z_-}{\gamma_-}\frac{d^3z_+}{\gamma_+}\delta(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1)F(\xi,\xi_1), \tag{7}$$

$$\alpha_\mp(\bar{x}) = \frac{D_e}{x}\int\frac{d^3x_1}{x_1}n(\bar{x}_1)\frac{d^3z_-}{\gamma_-}\frac{d^3z_+}{\gamma_+}\delta(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1)F(\xi,\xi_1)n_\mp(\bar{z}_\mp), \tag{8}$$

$$\varepsilon(\bar{x}) = \frac{D_e}{x}\int\frac{d^3x_1}{x_1}\frac{d^3z_-}{\gamma_-}\frac{d^3z_+}{\gamma_+}\delta(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1)F(\xi,\xi_1)n_-(\bar{z}_-)n_+(\bar{z}_+), \tag{9}$$

$$\varepsilon_*(\bar{x}) = \frac{D_e}{x}\int\frac{d^3x_1}{x_1}n(\bar{x}_1)\frac{d^3z_-}{\gamma_-}\frac{d^3z_+}{\gamma_+}\delta(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{z} - \underline{z}_1)F(\xi,\xi_1)n_-(\bar{z}_-)n_+(\bar{z}_+). \tag{10}$$

Все эти интегралы имеют размерность обратной длины. Первые три из них определяют поглощение фотонов, а два последних - излучение.

Если умножить уравнение (6) на $d^3x$ и проинтегрировать по импульсам фотонов, то получится соотношение, представляющее первый момент уравнения:

$$\begin{aligned}\underline{\nabla}\int\underline{x}\,n(\bar{x})\frac{d^3x}{x} &= -\int d^3x\,n(\bar{x})\left[\alpha_\gamma(\bar{x}) - \alpha_-(\bar{x}) - \alpha_+(\bar{x})\right] + \\ &+ \int d^3x\left\{\varepsilon(\bar{x})\left[1 + n(\bar{x})\right] + \varepsilon_*(\bar{x})\right\}.\end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим по очереди части уравнения (6).

3. *Поглощение.* Установим связь введенных коэффициентов с сечениями рассматриваемых процессов. Начнем с трех коэффициентов, связанных с рождением пар. Перепишем определение коэффициента поглощения

$$\alpha_\gamma = \frac{2}{\lambda_C^3 x}\int\frac{d^3x_1}{x_1}n(\bar{x}_1)\,q\,\sigma^0_{\rm bth}(\beta) \tag{12}$$

через величину, которая согласно ч. I совпадает с полным сечением рождения пар:

$$\sigma^0_{\rm bth}(\beta) = 2\beta^2\pi r_e^2 s_{\rm ann}(\beta),\; s_{\rm ann}(\beta) = \frac{F_0(\beta)}{4\beta\gamma^2},\; F_0(\beta) = 2\left[\left(3 - \beta^4\right)a(\beta) - 2 + \beta^2\right], \tag{13}$$

где введено обозначение, которое будет использоваться и в дальнейшем:

$$a(\beta) = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}. \tag{14}$$

Множитель $q = \underline{x}\,\underline{x}_1 = xx_1(1-\mu)$ вводится для того, чтобы учесть, что сечение рассчитывается на поток фотонов, при этом в (12) сокращаются энергии фотонов, т.е. $x$ и $x_1$. Величина $q = 2\gamma^2$, где $\gamma$ - общее значение энергий частиц и фотонов в системе центра масс частиц, в которой электрон и позитрон, как и фотоны, движутся в противоположные стороны. Величина $\beta$, являющаяся формальным аргументом сечения,

- соответствующая скорость $\beta = z/\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$.

Два других коэффициента $\alpha_\mp$, стоящих в слагаемом поглощения, но со знаком минус, выразим через дифференциальное сечение рождения пары:

$$\alpha_\mp = \frac{1}{x}\frac{2}{\lambda_C^3}\int \frac{d^3x_1}{x_1} n(\bar{x}_1)\frac{d\varphi\, d\gamma_-}{s}\frac{4\gamma^5}{z}\sigma_{\mathrm{bth}}\, n_\pm(\bar{z}_\mp) = \\ = \frac{1}{x}\frac{4}{\lambda_C^3}\int \frac{d^3x_1}{x_1} n(\bar{x}_1)\gamma^4\, d\eta\, d\varphi_0 \sigma_{\mathrm{bth}}\, n_\mp(\bar{z}_\mp). \tag{15}$$

Здесь $\sigma_{\mathrm{bth}}$, зависящее от $\beta$ и $\eta$, подставлено в согласии с выражением для этого сечения, приведенным в ч. I. Через инвариантные переменные $\eta$, $\varphi_0$, а также характеристики фотонов энергии электрона и позитрона выражаются посредством формул

$$\gamma_\mp = \left(s_0 \pm s\beta\cos\epsilon_p\right)/2,\ \cos\epsilon_p = \eta\cos\theta_c - \sqrt{1-\eta^2}\sin\theta_c\cos\varphi_0, \tag{16}$$

где $\mu$ - косинус угла между направлениями импульсов фотонов, а угол $\theta_c$ определяется через свои функции

$$\cos\theta_c = (x - x_1)/s,\ \sin\theta_c = xx_1\sqrt{1-\mu^2}/s\gamma. \tag{17}$$

Направления импульсов частиц можно найти по формулам

$$z_\mp\bar{\Omega}_\mp = \pm z\left[\left(\eta\sin\theta_c + \sqrt{1-\eta^2}\cos\theta_c\cos\varphi_0\right)\bar{e}_1^{\mathrm{ph}} + \sqrt{1-\eta^2}\sin\varphi_0\, \bar{e}_2^{\mathrm{ph}}\right] + \\ + \bar{e}_3\left(s \pm s_0\beta\cos\epsilon_p\right)/2, \tag{18}$$

где $z_\mp = \sqrt{\gamma_\mp^2 - 1}$, а орты базиса выражаются через импульсы фотонов:

$$\bar{e}_1^{\mathrm{ph}} = \frac{1}{s\sqrt{1-\mu^2}}\left[(x_1 + x\mu)\bar{\omega} - (x + x_1\mu)\bar{\omega}_1\right],\ \bar{e}_2^{\mathrm{ph}} = \frac{\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}}{\sqrt{1-\mu^2}},\ \bar{e}_3 = \frac{\bar{s}}{s},\ \bar{s} = \bar{x} + \bar{x}_1. \tag{19}$$

4. *Излучение*. Начнем с интеграла от коэффициента излучения по импульсам излучаемых фотонов. Этот интеграл входит в соотношение (11). Исходя из (9) и выражения для полного сечения аннигиляции из ч. I, находим

$$\varepsilon_0 = \int\varepsilon(\bar{x})\, d^3x = \frac{r_e^2}{2}\frac{2}{\lambda_C^3}\int\frac{d^3x}{x}\frac{d^3x_1}{x_1}\frac{d^3z_-}{\gamma_-}\frac{d^3z_+}{\gamma_+}\delta\left(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1\right)\times \\ \times Fn_-(\bar{z}_-)n_+(\bar{z}_+) = \frac{4}{\lambda_C^3}\int\frac{d^3z_-}{\gamma_-}\frac{d^3z_+}{\gamma_+}n_-(\bar{z}_-)n_+(\bar{z}_+)v_r\underline{z}_-\underline{z}_+\sigma^0_{\mathrm{ann}}(\beta). \tag{20}$$

Здесь $v_r = \sqrt{1 - 1/\left(\underline{z}_-\underline{z}_+\right)^2}$ - безразмерная и инвариантная относительная скорость частиц, так что

$$v_r\underline{z}_-\underline{z}_+ = \sqrt{\left(\underline{z}_-\underline{z}_+\right)^2 - 1} = \sqrt{(q-1)^2 - 1} = \sqrt{q(q-2)} = 2z\gamma = 2\beta\gamma^2. \tag{21}$$

Здесь надо считать, что $q = 1 + \underline{z}_-\underline{z}_+$. Множитель (21), как и $\underline{x\,x}_1$ в случае рождения пар, учитывает то обстоятельство, что сечение рассчитывается на поток частиц.

Сам коэффициент излучения (9) не выражается прямо через полное сечение аннигиляции, так как не содержит интеграла по $x$. Однако наличие δ-функции позволяет взять интегралы по четырем переменным. При этом, хотя излучение происходит при аннигиляции, закрепленным является импульс излучаемого фотона. Поэтому удобнее произвести интегрирование по импульсам частиц, а импульсы фотонов считать заданными. Интегралы получаются такие же, какие возникали при рассмотрении процесса рождения пар, и δ-функция преобразуется так же, как в ч. I. В результате получится

$$\varepsilon(\bar{x}) = \frac{4}{x\lambda_C^3}\int\frac{d^3x_1}{x_1}\gamma^4\,d\eta\,d\varphi_0\sigma_{\mathrm{bth}}\,n_-(\bar{z}_-)n_+(\bar{z}_+). \tag{22}$$

Выражения для импульсов частиц остаются прежними (16) и (18).

Конечно, в (22) можно заменить сечение рождения на сечение аннигиляции с соответствующим множителем. Однако лучше оставить сечение рождения, так как закрепленными являются импульсы фотонов. Заметим, что последняя величина из введенных в разделе 4, а именно $\varepsilon_*$, не требует специального рассмотрения, так как отличается от (22) только наличием под интегралом дополнительного множителя $n(\bar{x}_1)$.

5. *Усреднение коэффициента спонтанного поглощения.* В этом и нескольких последующих разделах предположим, что распределения частиц по импульсам в сопутствующей системе отсчета изотропны, то есть зависят только от величин импульсов, но не от их направлений. Распределение же фотонов будем считать слабо неизотропным, то есть таким, что его можно аппроксимировать линейной функцией косинуса угла: $n(\bar{x}) = n(x) + n_1(x)\mu$.

При таком предположении нет необходимости знать и зависимости от направлений входящих в выражения для коэффициентов поглощения и излучения интегралов. Поэтому мы проинтегрируем по направлениям в этих интегралах с весами 1 и $1-\mu$. Зависимости распределений от времени и координат по-прежнему не указываем.

Начнем с того коэффициента поглощения, который определяется спонтанным процессом рождения частиц. Исходим из приводившейся выше формулы (7). Вычислим сначала интеграл при $n(\bar{x}) = n(x)$. Отделим интеграл по частоте от интегралов по углам и выберем в качестве полярного угла угол между направлениями фотонов, косинус которого $\mu$. При этом от азимута ничего не зависит и интеграл по нему заменяется на $2\pi$. При рождении пары должно выполняться условие $q = \underline{x\,x}_1 = xx_1(1-\mu) \ge 2$, которое определяет пределы интегрирования по $x_1$ и $\mu$:

$$\alpha_\gamma(x) = \frac{D_e}{x} 4\pi^2 \int_{1/x}^{\infty} x_1 dx_1 n(x_1) \int_{-1}^{1-2/xx_1} d\mu\, q\, 2\beta^2 s_{\text{ann}}(\beta). \tag{23}$$

Вместо $\mu$ будем интегрировать по $\beta$, сделав замену переменной интегрирования: $\beta = \sqrt{1 - 2/xx_1(1-\mu)}$, $d\mu = -(4/xx_1)\beta\gamma^4 d\beta$. Тогда формулу (23) можно переписать так:

$$\alpha_\gamma(x) = \frac{32\pi^2 D_e}{x^2} \int_{1/x}^{\infty} dx_1 n(x_1) g\left(\sqrt{1 - 1/xx_1}\right) = \frac{32\pi^2 D_e}{x^3} \int_0^{\infty} n\left(\frac{1+v}{x}\right) g\left(\sqrt{\frac{v}{1+v}}\right) dv, \tag{24}$$

где функция от одного аргумента $u$, $0 \le u \le 1$,

$$g(u) = 2\int_0^u \beta^3\gamma^6 d\beta\, s_{\text{ann}}(\beta). \tag{25}$$

Интеграл $g(u)$ раскладывается в ряд, пригодный для вычислений для $u \le 1/2$:

$$g(u) = u^3\left[\frac{1}{3} + \frac{4}{5}u^2 + u^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n}}{2n+7}\left((2n+9)\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m+1} + \frac{6}{2n+3} + \frac{3}{2n+5} + 4\right)\right]. \tag{26}$$

При $1/2 \le u \le 1$ раскладываем $g(u)$ в ряд по степеням $1-u$:

$$g(u) = u\left[\frac{1}{1-u^2} - \frac{1}{2}\ln(1-u^2) - \frac{1+u^2}{2}\right]a(u) - \frac{u}{2}\frac{1+u^2}{1-u^2} + \\ + \frac{1}{2}\ln(1-u)\ln\frac{1+u}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-u)^n - 1}{n^2 2^n}. \tag{27}$$

Остальные слагаемые разложить в ряды в этом случае нельзя.

Выражение (24) для функции $\alpha_\gamma$ получено в [2] и в несколько другом виде в [3]. При виновском распределении фотонов в [4] для нее найдено эмпирическое представление.

Теперь найдем интеграл с весом $1-\mu$. Его вычисление мало отличается от предыдущего. Множитель $1-\mu = (2/xx_1)/(1-\beta^2)$ добавляет еще одну степень скобки $1-\beta^2$ в знаменателе интеграла, аналогичного (25):

$$g_*(u) = \int_0^u \beta^2\gamma^6 d\beta\left[\left(3-\beta^4\right)a(\beta) - 2 + \beta^2\right]. \tag{28}$$

Окончательное выражение для $g_*(u)$:

$$g_*(u) = \frac{u}{2}a(u)\left[\frac{1}{\left(1-u^2\right)^2} + \frac{2}{1-u^2} + \frac{\ln\left(1-u^2\right)}{2} - \frac{1}{8}\right] - \frac{u}{16}\left(\frac{6}{\left(1-u^2\right)^2} + \frac{17}{1-u^2}\right) - \\ - \frac{1}{4}\ln(1-u)\ln\frac{1+u}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-u)^n - 1}{n^2 2^n}. \tag{29}$$

Разложение в ряд при малых $u$ немногим сложнее (26):

$$g_*(u) = u^3\left\{\frac{1}{3} + u^2 + u^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{2n}}{2n+7}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\left(n^2+10n+\frac{87}{4}\right)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m+1} - \frac{n^2}{4} + 8 + \frac{9}{2n+3} + \frac{3}{2n+5}\right]\right\}. \quad (30)$$

В случаях, когда распределение $n(x_1)$ планковское или виновское с параметром $y$, функция $\alpha_\gamma(x, y)$ по существу зависит от отношения $y/x$: $\alpha_\gamma(x, y) = 32\pi^2 D_c \alpha(y/x)/y^3$. На рис.1 представлены графики универсальных

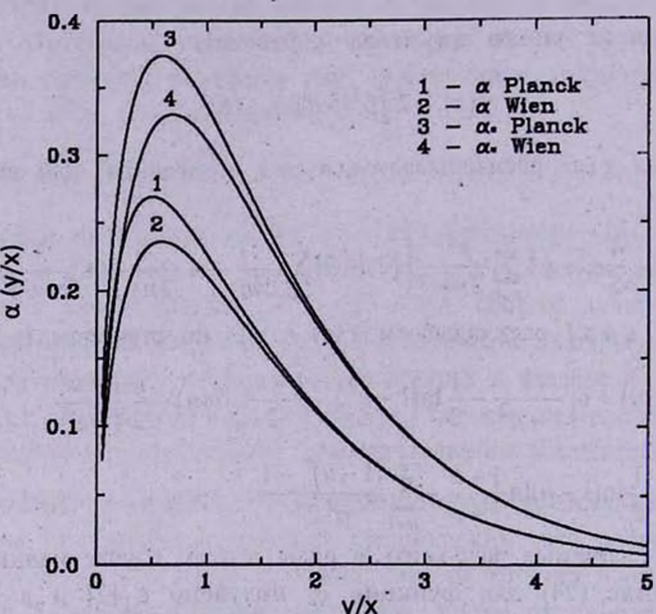


Рис.1. Универсальные функции $\alpha(y/x)$ и $\alpha_*(y/x)$ для вычисления коэффициента поглощения при рождении пар на фотонах при планковском и виновском их распределениях.

функций $\alpha(y/x)$ для указанных случаев. Как и следовало ожидать, отличие этих функций обнаруживается при малых значениях их аргумента.

При учете неизотропности слагаемое, пропорциональное $1-\mu$, порождает функцию

$$\alpha_\gamma^*(x) = \frac{64\pi^2 D_c}{x^3}\int_0^\infty n\left(\frac{1+v}{x}\right) g_*\left(\sqrt{\frac{v}{1+v}}\right)\frac{dv}{1+v}. \quad (31)$$

При тепловых распределениях и эта величина зависит от $y/x$: $\alpha^*_\gamma(x, y) = 64\pi^2 D_c \alpha_*(y/x)/y^3$. Графики функций $\alpha_*(y/x)$ для тех же функций распределения фотонов по энергиям $n(x_1)$ также приведены на рис.1.

6. *Усреднение вынужденного поглощения.* Два коэффициента $\alpha_\mp$ содержат как фотонное распределение по импульсам, так и распределения частиц. Сначала будем считать, что изотропны распределения частиц, т.е. $n_\mp(\bar{z}_\mp) = n_\mp(\gamma_\mp)$.

После взятия интеграла по импульсам частиц, распределение которых не входит в интеграл, то есть по $\bar{z}_\pm$ соответственно, получим выражения

$$\alpha_\mp = \frac{D_e}{x}\int\frac{d^3x_1}{x_1}n(\bar{x}_1)\frac{z_\mp^2 d^3 z_\mp}{\gamma_-\gamma_+}n_\mp(\gamma_\mp)\delta(\gamma_+ + \gamma_- - x - x_1)F(\xi,\xi_1) =$$
$$= \frac{D_e}{x}\int\frac{d^3x_1}{x_1}n(\bar{x}_1)n_\mp(\gamma_\mp)\frac{z_\mp^2 dz_\mp}{\gamma_\mp}d^2\Omega_\mp\delta(\xi+\xi_1-q)F(\xi,\xi_1) = \tag{32}$$
$$= \frac{D_e}{x}2\pi\int\frac{d^3x_1}{x_1}n(\bar{x}_1)n_\mp(\gamma)\frac{z dz}{\gamma}\bar{F}(x,x_1,\mu,\gamma).$$

Здесь было использовано тождество для $\delta$-функции, о котором говорилось в предыдущем разделе. Отметим при этом, что $\gamma$ и $z$ этого пункта не следует путать с величинами с теми же обозначениями из предшествующих: здесь просто опущены знаки $\pm$. Кроме того, введено обозначение для интеграла по направлениям электрона или позитрона:

$$\bar{F}(x,x_1,\mu,\gamma) = \frac{z}{2\pi}\int d^2\Omega\delta(\xi+\xi_1-q)F(\xi,\xi_1), \tag{33}$$

где $\xi = \underline{xz} = x(\gamma - z\bar{\omega}\bar{\Omega})$, $\xi_1 = \underline{x_1 z} = x_1(\gamma - z\bar{\omega}_1\bar{\Omega})$.

Интеграл (33) симметричен по частотам фотонов и одинаков для электронов и позитронов. Вычисление этого интеграла очень близко по схеме к выводу формулы для функции перераспределения по частотам при комптоновском рассеянии (см., например, [5]), так как похожи выражения для $F$. Здесь для ряда величин, аналогичных возникавшим при описании рассеяния, используются те же обозначения. Однако эти величины не совпадают. Различие заключается в знаках частот фотонов и, как следствие, в знаках некоторых неравенств.

Как и для рассеяния, выберем полярную систему с осью вдоль вектора $\bar{\omega}$. Косинус зенитного угла будет $\mu = \bar{\omega}\bar{\omega}_1$, а косинус между $\bar{\omega}$ и $\bar{\Omega}$ обо-значим $\eta = \bar{\Omega}\bar{\omega}$. Тогда произведение $\bar{\Omega}\bar{\omega}_1 = \eta\mu + \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi$, где $\varphi$ - азимут, то есть двугранный угол между плоскостями $\bar{\Omega},\bar{\omega}$ и $\bar{\omega},\bar{\omega}_1$ (косинус $\eta$ и азимут $\varphi$ также не совпадают с использовавшимися ранее величинами с теми же обозначениями). В этих переменных выражение для $F$ записывается в виде

$$F = \frac{q^2+2q-2}{q}\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{q-\xi}\right) - \frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{(q-\xi)^2} - 2 \tag{34}$$

и не содержит зависимости от азимута, так как частоты фотонов и угол между их направлениями, а следовательно величина $q$ являются заданными, а $\xi = x(\gamma - z\eta)$. Поэтому первым следует вычислить интеграл по азимуту от дельта-функции. При его вычислении примем сначала, что произведение $zx_1\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\eta^2} \neq 0$. Тогда можно написать

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\,\delta\left(x(\gamma - z\eta) - q + x_1\gamma - x_1 z\eta\mu - zx_1\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\eta^2}\cos\varphi\right) =$$
$$= \frac{2}{zs}\frac{1}{\sqrt{(\eta-\eta_-)(\eta_+-\eta)}}. \tag{35}$$

Входящие сюда величины

$$\eta_\pm = \frac{P(x_1\mu + x) \pm \Delta}{zs^2}, \tag{36}$$

где

$$\Delta = x_1\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{z^2 s^2 - P^2}, \quad P = \gamma s_0 - q, \tag{37}$$

а остальные обозначения прежние, являются границами промежутка изменения косинуса $\eta$. Только при $\eta$ из этого промежутка имеются значения $\cos\varphi$, при котором аргумент $\delta$-функции в (35) обращается в нуль. Появление множителя 2 объясняется тем, что на промежутке $[0,2\pi]$ косинус все свои значения принимает дважды. Прямая проверка показывает, что $-1 \le \eta_- \le \eta_+ \le 1$.

Подставим в (33) интеграл (35) и сделаем подстановку

$$\eta = \frac{\eta_+ + \eta_-}{2} + \frac{\eta_+ - \eta_-}{2}\cos\psi = \frac{1}{zs^2}\left[(x_1\mu + x)P \pm \Delta\cos\psi\right]. \tag{38}$$

Тогда (33) примет вид

$$\overline{F}(x, x_1, \mu, \gamma) = \frac{1}{\pi s}\int_0^\pi F(\xi, \xi_1)\delta\psi. \tag{39}$$

Окончательное выражение для интеграла (33) получается следующим:

$$\overline{F}(x, x_1, \mu, \gamma) = \frac{q^2 + 2q - 2}{q^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}\right) -$$
$$-\frac{1}{q^2}\left[\frac{x(x_1\mu + x) + \gamma(x_1 - x)}{a^3} + \frac{x_1(x\mu + x_1) - \gamma(x_1 - x)}{a_1^3}\right] - \frac{2}{s}, \tag{40}$$

где

$$a = \sqrt{(\gamma - x)^2 + r_\mu^2}, \quad a_1 = \sqrt{(\gamma - x_1)^2 + r_\mu^2}, \quad r_\mu = \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}. \tag{41}$$

В соответствии со сказанным в предыдущем разделе, полученная величина обладает свойствами симметрии:

$$\overline{F}(x, x_1, \mu, \gamma) = \overline{F}(x_1, x, \mu, \gamma) = \overline{F}(x, x_1, \mu, x + x_1 - \gamma). \tag{42}$$

7. *Ограничения на переменные.* Теперь найдем условия, которые надо наложить на переменные вследствие требования, чтобы подкоренное выражение у $\Delta$ было неотрицательно:

$$z^2s^2 - P^2 = -2q\gamma^2 + 2q\gamma s_0 - q^2 - s^2 \geq 0. \tag{43}$$

Это требование ограничивает те или иные величины в зависимости от того, которые из них закреплены.

Если заданы импульсы фотонов, то есть их частоты и косинус $\mu$, то значение энергии частицы должно быть заключено между

$$\gamma^{\pm}(x, x_1, \mu) = \frac{s_0}{2} \pm \frac{s}{2}\sqrt{1 - \frac{2}{q}} \geq 1. \tag{44}$$

Здесь верхние знаки $\pm$ соответствуют знакам перед корнем.

При фиксированной энергии частицы накладываются ограничения на значения частот. Если задана частота $x_1$ и косинус $\mu$, то частота $x$ должна удовлетворять тому же неравенству (43), которое можно записать подробнее в виде

$$x^2\left[1 - 2\gamma x_1(1-\mu) + x_1^2(1-\mu)^2\right] + 2xx_1\left[\mu + \gamma(\gamma - x_1)(1-\mu)\right] + x_1^2 \leq 0. \tag{45}$$

Частота $x$ должна располагаться определенным образом по отношению к корням квадратичной относительно $x$ функции, стоящей справа в (45):

$$\frac{x_\pm}{x_1} = -\frac{\gamma(\gamma - x_1)(1-\mu) + \mu \pm z(1-\mu)a_1}{1 - 2\gamma x_1(1-\mu) + x_1^2(1-\mu)^2}. \tag{46}$$

В случае рассеяния выражение, стоявшее множителем перед квадратом $x$ в аналоге (45) и в знаменателе выражения вида (46), было строго положительно. В рассматриваемом случае оно раскладывается на множители

$$1 - 2\gamma x_1(1-\mu) + x_1^2(1-\mu)^2 = \left[x_1(1-\mu) - \gamma - z\right]\left[x_1(1-\mu) - \gamma + z\right] \tag{47}$$

и может быть как положительно, так и отрицательно. При $x_1(1-\mu) < \gamma - z$ и при $x_1(1-\mu) > \gamma + z$ оно положительно, частота должна быть между границами. Однако в первом случае обе границы (46) отрицательны и частот $x$, удовлетворяющих неравенству, не существует. Во втором случае обе границы положительны и ограничивают частоту. Наконец, в промежуточной области $\gamma - z < x_1(1-\mu) < \gamma + z$ множитель при $x^2$ отрицателен, большая граница $x_-$ положительна, а меньшая $x_+$ отрицательна, так что частота $x$ должна быть больше большей границы. Итак,

$$\begin{gathered} x \text{ не существует при } 0 < x_1 < (\gamma - z)/(1-\mu), \\ x_- < x < \infty \text{ при } (\gamma - z)/(1-\mu) < x_1 < (\gamma + z)/(1-\mu), \\ x_- < x < x_+ \text{ при } (\gamma + z)/(1-\mu) < x_1 < \infty. \end{gathered} \tag{48}$$

Как неравенство (45), так и область допустимых частот, конечно, симметричны относительно $x$ и $x_1$.

Рассмотрим еще исключительные случаи, когда не выполняется условие, наложенное в предыдущем разделе при вычислении интеграла (35), то есть когда произведение $zx_1\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\eta^2}=0$. Допустим обращение множителей в нуль в порядке следования их в этом произведении. При $z=0$, $\gamma=1$ оказывается $\overline{F}(x,x_1,\mu,1)=0$. Случаи $x_1=0$ и $\mu=1$ невозможны. Случай $\mu=-1$ не является исключительным, все соответствующие формулы получаются при подстановке значения $\mu=-1$ в окончательную формулу. Еще два случая обращения указанного произведения в нуль отвечают граничным значениям переменной $\eta=\pm1$ и не влияют на величину интегралов.

8. *Усреднение по направлениям импульсов фотонов*. Теперь предположим, что распределение фотонов по импульсам не очень неизотропно и усредним величину (40) по углам с весами 1 и $\mu$. Для такого усреднения надо поменять местами интегрирование по энергиям частиц и по направлениям фотонов.

Изучим зависимости границ $\gamma^{\pm}(x,x_1,\mu)$ изменения энергий частиц $\gamma$ от $\mu$. Границы совпадают, когда обращается в нуль второе слагаемое в формуле (44). Это может быть при $q=2$ или при $s=0$. В первом случае

$$\mu=\mu_0,\quad -1\le\mu_0=1-2/xx_1<1,\qquad \gamma^{\pm}(x,x_1,\mu_0)=(x+x_1)/2. \tag{49}$$

При значениях $\mu>\mu_0$ процесс рождения пары невозможен. Величина $s=0$ либо при $x=x_1=0$, если $\mu\neq-1$, что невозможно, либо при $\mu=-1$, $x=x_1$, что, как отмечалось выше, не является исключительным случаем.

Далее, нижняя граница имеет минимум, а верхняя максимум в одной и той же точке

$$\mu_{\rm ext}=1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x_1},\qquad \gamma_m^{+}=x+x_1-1,\qquad \gamma_m^{-}=1. \tag{50}$$

Точка экстремумов может выходить из промежутка $[-1,1]$, то есть может быть $\mu_{\rm ext}<-1$. Это осуществляется при $x+x_1>2xx_1$. Соответствующие точки $x,x_1$ на плоскости с этими координатами лежат между двумя гиперболами $xx_1=1$ и $(x-1/2)(x_1-1/2)=1/4$. Первая из них располагается ниже второй везде, кроме точки их касания при $x=x_1=1$. Для частот, для которых $x+x_1<2xx_1$, то есть находящихся выше верхней гиперболы, экстремальная точка всегда попадает в основной промежуток изменения косинуса угла между фотонами: $-1<\mu_{\rm ext}<1$. Итак, границы изменения энергии частиц можно определить следующим образом:

$$\gamma^{\pm}(x,x_1)=\begin{cases}\gamma^{\pm}(x,x_1,-1) & \text{при } x+x_1\ge 2xx_1,\\ \gamma_m^{\pm} & \text{при } x+x_1\le 2xx_1.\end{cases} \tag{51}$$

Здесь

$$\gamma^{\pm}(x,x_1,-1)=\frac{x+x_1}{2}\pm\frac{|x-x_1|}{2}\sqrt{1-\frac{1}{xx_1}}. \tag{52}$$

Последние величины, как очевидно, совпадают при $x = x_1$ и $xx_1 = 1$.

Обратные функции к зависимостям $\gamma = \gamma^{\pm}(x, x_1, \mu)$, где правые части равенства определены формулой (44), по отношению к $\mu$ можно найти из того же условия (43), если приравнять его правую часть нулю и записать в несколько другом виде

$$q^2 - 2q\left[\gamma(x + x_1) - z^2\right] + (x + x_1)^2 = 0. \tag{53}$$

Отсюда находим

$$q^{\pm} = \gamma(x + x_1) - z^2 \pm zD_0, \quad \mu^{\pm}(x, x_1, \gamma) = 1 - \frac{q^{\mp}}{xx_1}, \tag{54}$$

где

$$D_0 = \sqrt{(x + x_1)^2 - 2\gamma(x + x_1) + z^2} = \sqrt{(x + x_1 - 1 - \gamma)(x + x_1 + 1 - \gamma)}. \tag{55}$$

Таким образом, при изотропных распределениях частиц и фотонов выражения для коэффициентов вынужденного поглощения имеют вид

$$\alpha_{\mp}(x) = \frac{r_e^2}{2\pi x} \int\limits_{1/x}^{\infty} x_1 dx_1 n(x_1) \int\limits_{\gamma^-(x,x_1)}^{\gamma^+(x,x_1)} n_{\mp}(\gamma)\, d\gamma = \int\limits_{\mu_m}^{\mu^+} d\mu\, \overline{F}(x, x_1, \mu, \gamma). \tag{56}$$

Нижний предел интегрирования по $\mu$ зависит от интервала изменения энергии частицы:

$$\mu_m = \begin{cases} \mu^- & \text{при} \quad 1 \le \gamma \le \gamma^-(x, x_1, -1), \\ -1 & \text{при} \quad \gamma^-(x, x_1, -1) \le \gamma \le \gamma^+(x, x_1, -1), \\ \mu^- & \text{при} \quad \gamma^+(x, x_1, -1) \le \gamma \le x + x_1 - 1. \end{cases} \tag{57}$$

Если считать, что распределение фотонов имеет составляющую, пропорциональную косинусу зенитного угла, то потребуется еще интеграл по $\mu$ от $\mu \overline{F}(x_1, x, \mu, \gamma)$.

9. ***Первообразные функции.*** Для получения формул для двух указанных интегралов нам понадобятся обозначения и формулы для некоторых функций, которые уже вводились для комптоновского рассеяния. Их общее определение можно записать в виде

$$A_n(h) = |2n - 1|\, F(n + 1/2,\, n + 1/2,\, n + 3/2,\, -h)/(2n + 1). \tag{58}$$

Все эти функции элементарны. Их разложения в ряды, рекуррентные формулы и выражения для производных от них приведены в [5,6]. Еще одна функция вводится для единообразия: $A(h) = \sqrt{1 + h}$.

При выводе выражений для первообразных использовались формулы 9.11, 9.121.26, 9.121.28, 9.137.2 из справочника [7]. В результате первообразная функция от $\overline{F}$ получается в виде

$$\int \overline{F}(x, x_1, \mu, \gamma)\, d\mu = -2\frac{s}{xx_1} + T(x, x_1, 1-\mu, \gamma) + T(x_1, x, 1-\mu, \gamma), \tag{59}$$

где

$$T(x, x_1, \omega, \gamma) = 2\left(\frac{\omega}{2}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{1}{xx_1}\right)\frac{A_0(h) - A(h)}{h} - \frac{2}{x^2x_1^2}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{-1/2} A(h) + $$
$$+ \frac{1}{x^2x_1^2}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{1/2}\left[\frac{xx_1(2-\omega) + (\gamma - x)(x_1 - x)}{A(h)} - 4xx_1A_0(h)\right]. \tag{60}$$

Здесь $h = \left(z^2 - 2\gamma x + x^2\right)\omega/2$. При замене $x \leftrightarrow x_1$ величина $h$ должна быть заменена на $h_1 = \left(z^2 - 2\gamma x_1 + x_1^2\right)\omega/2$.

Первообразная для интеграла от $\overline{F}$ с весом $\omega = 1 - \mu$

$$\int \overline{F}(x, x_1, \mu, \gamma)(1-\mu)\, d\mu =$$
$$= -\frac{2}{3}\frac{s}{x^2x_1^2}\left(s^2 + 3q\right) + T_*(x, x_1, 1-\mu, \gamma) + T_*(x_1, x, 1-\mu, \gamma), \tag{61}$$

где теперь

$$T_*(x, x_1, \omega, \gamma) = \left(\frac{\omega}{2}\right)^{5/2}\left(1 - \frac{2}{xx_1}\right)\frac{3[A_0(h) - A(h)] + 2hA(h)}{h^2} -$$
$$-\frac{4}{x^2x_1^2}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{1/2} A_0(h) - 4\left(\frac{\omega}{2}\right)^{3/2}\left\{\left[1 - \frac{x(x + x_1) + \gamma(x_1 - x)}{2x^2x_1^2}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{A_0(h) - A(h)}{h} + \frac{xx_1(2-\omega) + (\gamma - x)(x_1 - x)}{2x^2x_1^2A(h)}\right\}. \tag{62}$$

10. *Усреднение излучения*. Для коэффициента излучения из (9) при изотропных распределениях частиц получаем

$$\varepsilon(x) = \frac{D_\varepsilon}{x}\int\frac{d^3x_1}{x_1}\frac{d^3z_-}{\gamma_-}\frac{d^3z_+}{\gamma_+}\delta\left(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1\right) Fn_-(\gamma_-)n_+(\gamma_+) =$$
$$= \frac{D_\varepsilon}{x}\int\frac{d^3x_1}{x_1}\frac{d^3z_-}{\gamma_-\gamma_+}\delta(\gamma_- + \gamma_+ - x_1 - x)\, Fn_-(\gamma_-)n_+(\gamma_+) =$$
$$= \frac{D_\varepsilon}{x}\int\frac{d^3x_1}{x_1}d\gamma_-\, n_-(\gamma_-)n_+(x + x_1 - \gamma_-)2\pi\,\overline{F}(x, x_1, \mu, \gamma_-), \tag{63}$$

где появилась уже вводившаяся величина (33).

Следующий шаг - усреднение по направлениям импульса фотона $\hat{x}_1$ - сводится также к уже проделанной операции, а именно, к усреднению по $\mu$ величины (33). Таким образом, получается

$$\varepsilon(x) = \frac{D_e(2\pi)^2}{x} \int x_1 dx_1 d\gamma_- n_-(\gamma_-) n_+(x + x_1 - \gamma_-) \int_{\mu_-}^{\mu^*} \overline{F}(x, x_1, \mu, \gamma_-) d\mu. \quad (64)$$

Первообразная для вычисления интеграла дается формулой (60).

Выражение для коэффициента вынужденного излучения при изотропных распределениях частиц аналогично (63):

$$\varepsilon_*(\bar{x}) = \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} n(\bar{x}_1) d\gamma_- n_-(\gamma_-) n_+(x + x_1 - \gamma_-) 2\pi \overline{F}(x, x_1, \mu, \gamma_-). \quad (65)$$

При распределениях фотонов: изотропном или содержащем слагаемое, пропорциональное $\mu$, интеграл по направлениям $\bar{x}$ надо так же, как в (56), заменить на интегрирование по $\mu$ с весами 1 или $1-\mu$, первообразные для чего уже были найдены.

Когда газы частиц подчиняются максвелловским законам с одной и той же температурой (5), формулы для коэффициентов излучения (64) и (65) еще упрощаются. Это происходит потому, что произведение распределений $n_-(\gamma_-)n_+(\gamma_+)$ пропорционально экспоненте $e^{-y(\gamma_- + \gamma_+)}$, которая в силу закона сохранения энергии равна $e^{-y(x+x_1)}$ и не зависит от энергий частиц. В этом случае целесообразно исходить не из (64), а из исходного определения - первой формулы в (63) - и определения полного сечения рождения пары (формула (60) первой части [1]). Результирующее выражение для коэффициента спонтанного излучения имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon(x, y) &= 32\pi^2 D_e C_-(y) C_+(y) \frac{e^{-yx}}{x^2} \int_{1/x}^{\infty} e^{-yx_1} dx_1 g\left(\sqrt{1 - 1/xx_1}\right) = \\ &= 32\pi^2 D_e C_-(y) C_+(y) \frac{e^{-yx}}{y^3} \alpha(y/x),\end{aligned} \quad (66)$$

где $g$ определяется прежней формулой (25), а $\alpha(y/x)$ - функция, приведенная на рис.1 для виновского распределения. Таким образом, коэффициент излучения с точностью до множителя совпадает с коэффициентом поглощения, если поглощение происходит на фотонах с виновским распределением. Этот факт является следствием условия детального баланса, которое выполняется, если частицы имеют релятивистское максвелловское распределение по энергиям, а фотоны - распределение, пропорциональное $e^{-xy}$, но с концентрацией, определяемой упоминавшимся выше условием для химических потенциалов. Коэффициент излучения существенным образом зависит только от отношения $y/x$ и вычислялся в работах [8] и [9].

На рис. 2 и 3 приведены графики функции $\varepsilon(x, y)$ в зависимости от $x$ для ряда значений $y$. Следует заметить, что эта функция является излучательной способностью не в интенсивности, а в числах заполнения и содержит множитель в знаменателе $x^3$. Если на него умножить нашу

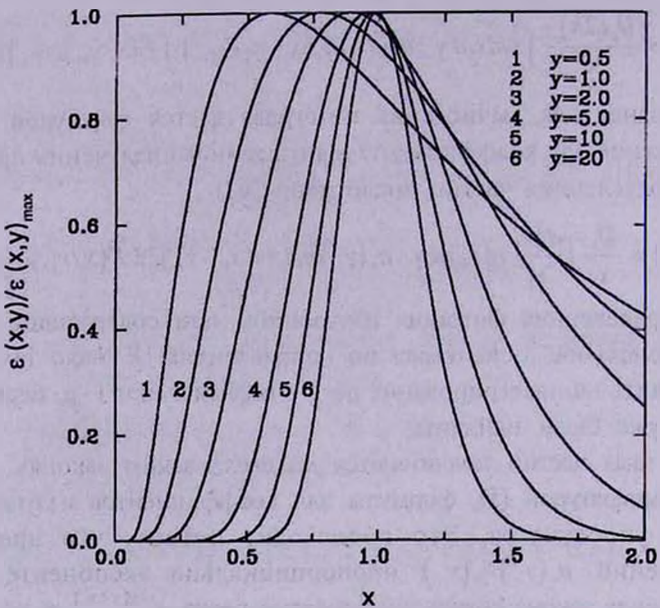


**Рис.2. Коэффициент излучения при аннигиляции тепловых электрон-позитронных пар (для средних чисел заполнения в долях максимального значения).**

функцию, графики примут более привычную форму, где максимум излучения с ростом температуры смещается в сторону больших частот. В таком случае графики согласуются с приведенными в [8,9].

Выражение для коэффициента $\varepsilon_*(x, y)$ отличается от (66) только наличием под интегралом множителя $n(x_1)$. Если $n(\bar{x})$ имеет слагаемое, пропорциональное $\mu$, то надо вычислить еще один интеграл, где вместо $g$ взять функцию (28) и ввести дополнительный множитель $2/xx_1$, т.е. тот же интеграл, который был вычислен для поглощения.

11. *Средние величины.* В конце этой статьи найдем средние частоты излучаемых при аннигиляции фотонов, усредненные по распределениям импульсов аннигилирующих частиц.

Среднюю $l$-тую степень излучаемой частоты определим соотношением

$$\langle x^l\rangle\varepsilon_0 = \varepsilon_l = 8\pi D_e \int\frac{d^3z_-}{\gamma_-}\frac{d^3z_+}{\gamma_+} n_-(\bar{z}_-)n_+(\bar{z}_+)\beta\gamma^2\overline{x^l}\, s_{\rm ann}(\beta), \qquad (67)$$

куда надо подставить выражение для средней степени частоты при фиксированных импульсах частиц $\bar{z}_-$ и $\bar{z}_+$ из ч. I. Величина $\varepsilon_0$ - это просто полное излучение (20). Для средней частоты ($l=1$) получается простое выражение, а именно, $\bar{x} = s_0/2 = (\gamma_- + \gamma_+)/2$. При $l=2$

$$\overline{x^2}\, s_{\rm ann} = \frac{1}{32\beta\gamma^2}\left[\left(3s_0^2 - 4\gamma^2 - \frac{(\gamma_- - \gamma_+)^2}{\beta^2}\right)F_0(\beta) + \left(3\frac{(\gamma_- - \gamma_+)^2}{\beta^2} - s_0^2 + 4\gamma^2\right)F_2(\beta)\right]. \qquad (68)$$

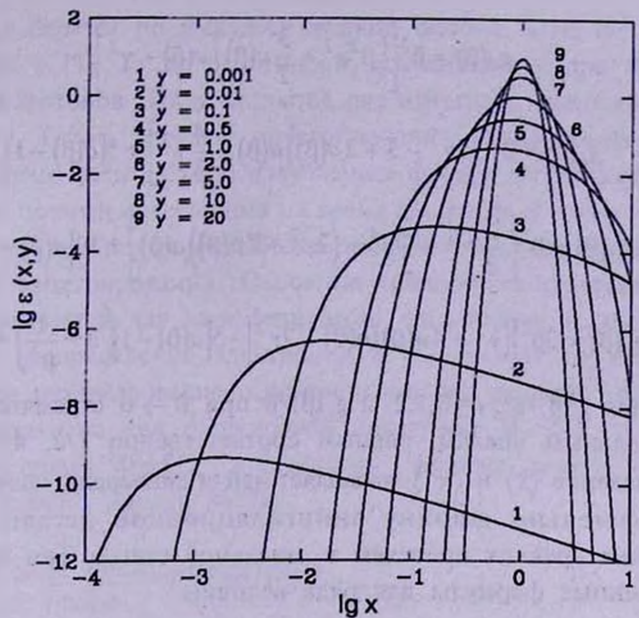


Рис.3. Коэффициент излучения при аннигиляции тепловых электрон-позитронных пар для средних чисел заполнения.

Здесь $F_2(\beta)=2\left[\left(5/\beta^2-4+\beta^2\right)a(\beta)-5/\beta^2+8/3\right]$. Ограничимся этими значениями $l$.

При изотропных распределениях частиц

$$\varepsilon_l = 8\pi\, D_e\, 4\pi 2\pi \int_0^\infty \frac{z_-^2 dz_-}{\gamma_-} n_-(\gamma_-) \int_0^\infty \frac{z_+^2 dz_+}{\gamma_+} n_+(\gamma_+) \int_{-1}^{1} \beta\gamma^2 \overline{x^l}\, s_{\text{анн}}(\beta)\, d\zeta. \tag{69}$$

Вычислим интегралы по $\zeta$ - косинусу угла между импульсами частиц. Сделаем замену переменной интегрирования:

$$\beta=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}=\sqrt{1-\frac{2}{1+\gamma_+\gamma_- - z_+z_-\zeta}},\qquad \beta_\pm=\frac{|z_+-z_-|}{s_0}. \tag{70}$$

Тогда $d\zeta=-(4/z_-z_+)\beta\gamma^4\, d\beta$ и (69) при $l=0$ переписывается так:

$$\varepsilon_0 = 128\pi^3 D_e \int_1^\infty d\gamma_-\, n_-(\gamma_-) \int_1^\infty d\gamma_+\, n_+(\gamma_+) g_0(\beta)\Big|_{\beta_-}^{\beta_+}. \tag{71}$$

Формула для $\varepsilon_1$ отличается от (71) наличием под интегралом множителя $s_0/2$. Для $l=2$ надо кроме $g_0(\beta)$ вычислить еще 3 интеграла, так как после подстановки в (69) формулы (68) получаем

$$\varepsilon_2 = 16\pi^3 D_e \int_1^\infty d\gamma_-\, n_-(\gamma_-) \int_1^\infty d\gamma_+\, n_+(\gamma_+) \left[s_0^2 g_1(\beta) - 2g_2(\beta) + (\gamma_- - \gamma_+)^2 g_3(\beta)\right]_{\beta_-}^{\beta_+}. \tag{72}$$

Все функции $g$ элементарны и неотрицательны:

$$g_0(\beta) = \beta^2\left[\left(\beta^2\gamma^2 + \frac{3}{2}a(\beta)\right)a(\beta) - \gamma^2\right], \tag{73}$$

$$g_1(\beta) = \beta^2\left[\left(2\gamma^2 - 3 + 2a(\beta)\right)a(\beta) - \frac{4}{3}\gamma^2\right] + 5[a(\beta) - 1], \tag{74}$$

$$g_2(\beta) = \beta^2\left[\frac{17}{3}\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma^4 - \left(2\gamma^2 + 7a(\beta)\right)a(\beta)\right] + 10[a(\beta) - 1], \tag{75}$$

$$g_3(\beta) = 2\beta^2\left[\left(\gamma^2 + 4a(\beta)\right)a(\beta) - 2\gamma^2\right] - 5[a(\beta) - 1]\left(3 + \frac{1}{\beta^2}\right) + \frac{5}{3}. \tag{76}$$

Отношения $g_l(\beta)/\beta^2$, $l=0,1,2$, и $g_3(\beta)/\beta^4$ при $\beta \to 0$ стремятся к конечным положительным числам, равным соответственно 1/2, 4/3, 2/3 и 2/7.

Вычисление $\langle x\rangle$ и $\langle x^2\rangle$ позволяет найти дисперсию излучаемых частот и следовательно ширину аннигиляционной детали. Результаты вычисления средних приведем в отдельной статье. Там же будут даны приближенные формулы для ряда величин.

12. *Заключение.* Оказалось, что описание процессов с парами близко по схеме к описанию комптоновского рассеяния (см. [5,6]). Основные функции, входящие в выражения для коэффициентов поглощения и излучения, а именно, $F(\xi,\xi_1)$ (формула (3)), $\overline{\overline{F}}$ (формула (40)), а также интегралы (60) и (62), похожи на соответствующие характеристики рассеяния, но симметричны относительно импульсов взаимодействующих частиц. Области их действия ограничиваются неравенствами, также похожими на возникающие в теории рассеяния, но решения этих неравенств располагаются иначе. В то же время функции $A_n(h)$ полностью совпадают с использованными для описания рассеяния. Главное отличие между двумя теориями заключается в том, что кинетическое уравнение даже (2) в самом простом виде (без учета индуцированных процессов) нелинейно.

Значительная часть этой статьи воспроизводит результаты работ Р.Свенсона [9] и [2]. Так полное излучение, обозначенное здесь $\varepsilon_0$, пропорционально темпу аннигиляции указанных работ, а выражение (24) для $\alpha_\gamma(x)$ совпадает с приведенным в них. Отличие заключается в том, что в работах Р.Свенсона сразу предполагается изотропность распределений частиц по импульсам и поэтому не требуется устанавливать связи между углами в различных системах отсчета. Кроме того, в нашей статье учитывается возможность вырождения газов и/или фотонов. Отдельно рассмотрена возможность линейной зависимости интенсивности излучения от косинуса угла между импульсами фотонов. Выражение для аннигиляционного спектра (22) дано у нас в виде кратного интеграла, часть которого берется по импульсу второго фотона, а не по импульсу позитрона, как в [9]. Та же особенность сохраняется и при изотропии распределения фотонов. Тогда остаются два интеграла, один из которых берется по $x_1$. Такой порядок интегрирования объясняется тем, что закреплен импульс (или частота) излучаемого фотона, за которым ведется наблюдение, и поэтому естественно на время закрепить и импульс второго фотона. В результате получаются более простые и наглядные выражения для пределов интегрирования. Особенно простое, фактически единое выражение получается для коэффициентов поглощения и излучения в случае, когда распределения электронов и позитронов по энергиям - релятивистские максвелловские с одной и той же температурой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 95-02-05004-а), а также ФНТП "Астрономия" (проект раздела 1.2.6.5) и ФЦП "Интеграция" проект №578.

Санкт-Петербургский государственный
университет, Россия

# TWO-PHOTON PROCESSES OF ANNIHILATION AND CREATION OF ELECTRON-POSITRON PAIRS. II. KINETIC EQUATION FOR PHOTONS

D.I.NAGIRNER, V.M.LOSKUTOV

In the second paper of the work a kinetic equation describing the evolution of photon gas is formulated. Annihilations and creations of electron-positron pairs and possible degeneration of gases are taken into account. The equation is written in a form of radiative transfer equation, absorption and emission coefficients are expressed in term of cross-sections of the processes. The coefficients are averaged in directions when particle distributions are isotropic. The cases when radiation field is isotropic or has a component proportional to cosine of angle with some direction are considered. Emitted spectrum, mean frequency and dispersion of photon frequencies are calculated.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Д.И.Нагирнер*, Астрофизика, **42**, 101, 1999.
2. *R.Svensson*, Astrophys. J., **258**, 335, 1982.
3. *R.J.Gould*, *G.P.Schreder*, Phys. Rev., **155**, 1404, 1967.
4. *R.Svensson*, Astrophys. J., **270**, 300, 1983.
5. *Д.И.Нагирнер*, *Е.В.Кикец*, *Ю.Й.Поутанен*, Тр. АО ЛГУ, **43**, 28, 1991.
6. *D.I.Nagirner*, *J.J.Poutanen*, Single Compton scattering, Astrophys. Space Phys., **9**, 1, 1994.
7. *И.С.Градштейн*, *И.М.Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971.
8. *A.A.Zdziarski*, Acta Astronomica, **30**, 371, 1980.
9. *R.Svensson*, Astrophys. J., **258**, 321, 1982.