

УДК: 524.8:531.51

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СТРУННОЙ КОСМОЛОГИИ
С ПЕТЛЕВЫМИ ПОПРАВКАМИ. I

А.А.СААРЯН

Поступила 1 июля 1998

Принята к печати 25 сентября 1998

Методами качественной теории динамических систем исследованы однородные и изотропные космологические модели низкоэнергетической струнной гравитации с петлевыми поправками к дилатонным функциям связи. В качестве негравитационного источника рассмотрена идеальная жидкость с баротропным уравнением состояния. В общем случае искривленных моделей космологические уравнения представлены в виде автономной динамической системы третьего порядка. Для плоских моделей построены фазовые картины для различных функций связи. Исследовано асимптотическое поведение общего решения в предельных областях. Рассмотрен вопрос о стабилизации дилатона с помощью механизма Дэмура-Полякова.

1. *Введение.* Теоремы Хокинга-Пенроуза [1] указывают на наличие сингулярностей в широком классе решений общей теории относительности (ОТО) при достаточно общих предположениях о тензоре энергии-импульса негравитационной материи. Хорошо известными примерами являются черные дыры и начальная сингулярность в теории Большого Взрыва. Общепринято, что в области таких сильных гравитационных полей ОТО должна быть заменена более фундаментальной теорией, по всей вероятности, квантовой по своей природе. В настоящее время наиболее популярной теоретической основой квантовой гравитации является теория струн и ее обобщения типа М-теории [2-4]. Характерные масштабы длины и энергии в этих теориях порядка планковских и намного далеки от возможностей современной ускорительной техники. Поэтому для тестирования струнных эффектов естественно обращаться к физике ранней Вселенной, где соответствующие условия с высокой плотностью энергии были созданы самой природой. Исследование следствий теории струн в ранних стадиях эволюции Вселенной имеет важное значение также с точки зрения разрешения ряда проблем стандартной космологии, включая проблему начальной сингулярности. Сказанным объясняется то огромное внимание, которое привлекают к себе исследования космологической динамики струнных теорий. Сформулировалось новое направление, обычно называемое струнной космологией.

В связи с тем, что в настоящее время теория струн окончательно не сформулирована и предсказание конкретных квантово-гравитационных эффектов в ее рамках затруднено, исследование космологических следствий теории струн обычно проводится на основе низкоэнергетической эффективной теории (см. [5-46]). Вследствие наличия дополнительных степеней свободы (дилатон, аксион, модули и т.д.), а также поправок по кривизне, эта теория существенно отличается от ОТО. В рамках такого подхода получены различные классы космологических решений, простейшими из которых являются чисто грави-дилатонные решения [6,7,9,13,17]. Эти решения лежат в основе *pre-big-bang* сценария космологической инфляции, предложенного в [13]. В дальнейшем указанные решения были обобщены для моделей с искривленным пространством [9,17] и при наличии антисимметричных тензоров обоих NS и R типов [9,15,19,24,35-37]. Эти решения можно получить непосредственным решением соответствующих космологических уравнений или из грави-дилатонных решений с использованием генерационных методов, основанных на различных дуальных симметриях (см., например, [19,39,42,45,46]) или на размерной редукции 5D-решений [15]. В последние годы проводятся также интенсивные исследования космологических аспектов M-теории (см. [39,40,43,44] и приведенные там ссылки). Важной областью космологических исследований является возможность разрешения проблемы сингулярностей путем учета в эффективном струнном действии членов высокого порядка по кривизне [21], а также обобщением функций связи дилатона с другими полями [41,47]. В струнной феноменологии одной из основных проблем является проблема фиксации модулей. В частности, изменение дилатона привело бы к вариациям физических констант, что существенно ограничено современными наблюдательными данными, включая эксперименты типа Этвеша, подтверждающими принцип эквивалентности. Одна из возможностей фиксации связана с генерацией непертурбативного потенциала, например, в результате конденсации калибрино в скрытом секторе калибровочной группы (см., например, [48] и приведенные там ссылки). Однако это приводит к новым космологическим проблемам, которые, несмотря на ряд интересных предложений, до сих пор не разрешены. Другой механизм фиксации модулей, естественно возникающий в эффективной теории струн с петлевыми поправками, предложен Дэмуром и Поляковым [16] (об аналогичном механизме релаксации скалярно-тензорных теорий гравитации к ОТО см. [49]). Этот механизм основан на идее, что петлевые поправки струнных диаграмм могут генерировать немонотонные функции связи дилатона с другими полями. В расширяющейся Вселенной взаимодействие дилатона с другими полями приводит к эффективной его релаксации к современному значению, являющемуся максимумом соответствующей

функции связи. Более того, рассмотрение инфляционных моделей показало [16], что ряд космологических проблем, возникающих при фиксации модулей с помощью потенциала, получает естественное разрешение в рамках этого подхода. В предыдущих наших работах [28,29] были рассмотрены струнные космологические модели с полями модулей и Калба-Рамона в качестве источника и для общего случая функций связи дилатона. Соответствующие решения были представлены в терминах интегрирований от некоторых комбинаций этих функций. Точное интегрирование космологических уравнений стало возможным благодаря тому, что рассматриваемый источник эквивалентен идеальной жидкости с предельно жестким уравнением состояния. В общем случае источника такое интегрирование невозможно. В данной работе основные характерные черты космологической эволюции струнной модели для общего баротропного уравнения состояния исследованы методами качественной теории динамических систем без конкретизации функций связи дилатона.

2. *Струнное эффективное действие.* В ведущем порядке по натяжению струны низкоэнергетическое эффективное действие можно записать в виде [2,50,16]

$$S = \int d^D x \sqrt{|\tilde{G}|} \left[-\tilde{F}_R(\varphi) \tilde{R} - 4 \tilde{F}_\varphi(\varphi) \partial_M \varphi \tilde{\partial}^M \varphi + \tilde{L}_m(\varphi, \tilde{G}_{MN}, \psi) \right], \quad (2.1)$$

где φ - поле дилатона, \tilde{R} - скаляр кривизны D -мерной метрики \tilde{G}_{MN} (здесь и ниже символ \sim над буквами будет указывать на величины в струнном конформном представлении), \tilde{L}_m - плотность лагранжиана других полей, коллективно обозначенных символом ψ , и, вообще говоря, зависящая как от метрики, так и от дилатона. В частности, этот лагранжиан содержит вклады от поля Калба-Рамона, калибровочных полей, дилатонного потенциала; полей модулей и т.д. В области слабой связи для функций связи дилатона, $\tilde{F}_k(\varphi)$, с различными полями NS-NS сектора можно написать следующее разложение:

$$\tilde{F}_k(\varphi) = e^{-2\varphi} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{Z}_k^{(l)} e^{2l\varphi} \right), \quad (2.2)$$

где $\tilde{Z}_k^{(l)}$ - представляет l -петлевой вклад, а параметром петлевого разложения является $e^{2\varphi}$: каждая петля струнных диаграмм дает вклад $-e^{2\varphi}$. При $\varphi \ll -1$ система находится в области слабой связи и описывается древесным приближением с универсальными функциями $\tilde{F}_k = e^{-2\varphi}$. В теориях типа I и II аналогичное разложение можно написать также для полей RR-сектора, с тем лишь отличием, что теперь в древесном приближении соответствующие функции связи не зависят от поля дилатона, $\tilde{F}_k(\varphi) = 1$.

Действие (2.1) написано в струнном конформном представлении,

метрика которого совпадает с метрикой соответствующей σ -модели. Другим важным представлением, удобным для проведения конкретных вычислений, является эйнштейновское (E-) представление, в котором кинетически член метрики диагонален. Выражение струнного эффективного действия в этом представлении получается из (2.1) конформным преобразованием метрики

$$G_{MN} = \Omega^{-2} \tilde{G}_{MN} \quad (2.3)$$

с зависящим от поля дилатона конформным множителем

$$\Omega(\varphi) = \Omega_E(\varphi) = \tilde{F}_R^{-1/(n-1)}, \quad n = D-1, \quad (2.4)$$

и имеет вид (см., например, [27,28])

$$S = \int d^D x \sqrt{|G|} \left[-R - 4F_\varphi(\varphi) \partial_M \varphi \partial^M \varphi + L_m(\varphi, G_{MN}, \psi) \right], \quad (2.5)$$

В этом выражении функция при кинетическом члене поля дилатона и плотность лагранжиана негравитационных полей связаны с соответствующими функциями струнного представления соотношениями:

$$F_\varphi(\varphi) = \frac{-n}{n-1} \left[\frac{\tilde{F}'_R(\varphi)}{2\tilde{F}_R} \right]^2 + \frac{\tilde{F}_\varphi}{\tilde{F}_R}, \quad L_m = \Omega^D \tilde{L}_m(\varphi, \Omega^2 G_{MN}, \psi). \quad (2.6)$$

При $F_\varphi < 0$, введя новое скалярное поле ϕ согласно

$$d\phi = 2\sqrt{-F_\varphi} d\varphi, \quad (2.7)$$

кинетический член дилатона можно записать в каноническом виде. Ниже мы рассмотрим именно этот случай. В древесном приближении $\tilde{F}_\varphi = \tilde{F}_R = e^{-2\varphi}$ и новое скалярное поле пропорционально дилатону

$$\phi = \frac{2\varphi}{\sqrt{n-1}}. \quad (2.8)$$

Другим конформным представлением, часто используемым в скалярно-тензорных теориях гравитации, является представление Йордана, в котором негравитационная часть лагранжиана не зависит от скалярного поля. Для действия (2.1) в общем случае плотности лагранжиана такое представление нереализуемо. Рассмотрим важный частный случай, когда зависимость от поля дилатона факторизуется:

$$\tilde{L}_m(\varphi, \tilde{G}_{MN}, \psi) = \tilde{F}_L(\varphi) \tilde{L}(\tilde{G}_{MN}, \psi). \quad (2.9)$$

Для таких лагранжианов представление Йордана реализуемо, если функция \tilde{L} обладает определенным конформным весом β :

$$\tilde{L}(\Omega^2 G_{MN}, \psi) = \Omega^{2\beta} \tilde{L}(G_{MN}, \psi). \quad (2.10)$$

Это имеет место, например, для отдельно взятых лагранжианов поля Калба-Рамона ($\beta = -3$), калибровочного поля ($\beta = -2$) и скалярного поля с нулевым потенциалом ($\beta = -1$). Теперь конформное преобразование

(2.3) с конформным множителем

$$\Omega = \Omega_J = \left| \tilde{F}_L(\varphi) \right|^{-1/(D+2\beta)} \quad (2.11)$$

приводит к представлению Йордана. Заметим, что в древесном приближении для RR-полей струнное и йордановское представления совпадают. Из (2.4) и (2.11) следует также, что в том же приближении в случае безмассовых скалярных полей совпадают представления Эйнштейна и Йордана.

3. *Космологическая модель.* При исследовании космологической эволюции в рамках эффективной теории струн наиболее удобным является E-представление. Соответствующую космологическую метрику запишем в виде Робертсона-Уокера

$$ds^2 = N^2(t) dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (3.1)$$

где $R(t)$ - масштабный фактор, $k = -1, 0, 1$ для моделей с пространствами отрицательной кривизны, нулевой и положительной кривизны соответственно. Выбор конкретной функции $N(t)$ соответствует различным временным координатам. Например, для синхронной временной координаты $N = 1$, для конформной - $N = R(t)$. Из условия однородности модели следует, что поле дилатона является функцией только от времени $\varphi = \varphi(t)$. Из уравнения гравитационного поля теперь получаем, что тензор энергии-импульса диагонален и может быть представлен в виде

$$T_M^N = \text{diag}(\varepsilon, \dots, -p, \dots), \quad (3.2)$$

где ε - плотность энергии, p - давление. Картину космологической эволюции в других конформных представлениях можно получить из E-представления конформным преобразованием метрики. В частности, функции $N(t)$ и $R(t)$ связаны с соответствующими величинами струнного представления соотношениями

$$N(t) = \Omega^{-1}(\varphi) \tilde{N}(t), \quad R(t) = \Omega^{-1} \tilde{R}(t) \quad (3.3)$$

с функцией $\Omega(\varphi)$ из (2.4). Если лагранжиан негравитационного источника не зависит от производных метрики, то аналогичное соотношение для компонентов тензора энергии-импульса имеет вид

$$T_M^N = \Omega^D \tilde{T}_M^N. \quad (3.4)$$

Выбирая в (3.3) и (3.4) функцию $\Omega(\varphi)$ из (2.11), получаем соответствующие величины в представлении Йордана.

Для действия (2.5) система уравнений космологической модели, описываемой метрикой (3.1), имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{H} + H(n\dot{H} - \dot{N}/N) &= N^2 b \varepsilon - N^2 k \frac{n-1}{R^2}, \\ \ddot{\phi} + \dot{\phi}(n\dot{H} - \dot{N}/N) &= N^2 \alpha \varepsilon / 2, \\ N^2 \varepsilon + \dot{\phi}^2 - n(n-1)H^2 &= kn(n-1)N^2/R^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где точка над буквами означает производную по времени и введены обозначения

$$H = \dot{R}/R, \quad b = \frac{1-a}{2(n-1)}, \quad (3.6)$$

$$a = p/\varepsilon, \quad \alpha = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{|G|}} \frac{\delta L_m \sqrt{|G|}}{\delta \phi}. \quad (3.7)$$

Из уравнения непрерывности для тензора энергии-импульса получим

$$\dot{\varepsilon}/\varepsilon + n(1+a)H + \alpha \dot{\phi} = 0. \quad (3.8)$$

Отметим, что величины a и α , вообще говоря, являются функциями времени. Функция a является конформно-инвариантной, а значения функции α в различных конформных представлениях связаны соотношением

$$\alpha_\Omega = \bar{\alpha} - (1-na)d \ln \Omega / d\phi, \quad (3.9)$$

где α_Ω - функция в конформном представлении, определяемом метрикой (2.4). В представлении Йордана негравитационный лагранжиан не зависит от поля дилатона и поэтому в этом представлении $\alpha = \alpha_J = 0$. Отсюда следует, что в случае источников, для которых реализуемо представление Йордана (условия (2.9), (2.10)), в струнном и в E-представлениях имеем, соответственно,

$$\bar{\alpha} = (1-na)d(\ln \Omega_J)/d\phi, \quad \alpha = (1-na)d \ln(\Omega_J/\Omega_E)/d\phi. \quad (3.10)$$

Заметим, что коэффициент в этих формулах $1-na = T/\varepsilon$ (T - след тензора энергии-импульса) равен нулю для излучения. В дрсвесном приближении функции (3.10) постоянны в E-представлении

$$\alpha = -2 \frac{(1-na)(\beta+1)}{(D+2\beta)\sqrt{n-1}}, \quad \phi \ll -1. \quad (3.11)$$

Для RR-полей в этом приближении $\tilde{F}_L(\phi) = 1$, и мы получим

$$\alpha = -\frac{1-na}{\sqrt{n-1}}, \quad \phi \ll -1. \quad (3.12)$$

Для безмассовых скалярных полей ($\beta = -1$) из (3.11) получаем $\alpha = 0$. В работе [29] для общего случая функций связи найдены решения системы (3.5), когда в качестве источника фигурируют антисимметричное поле Калба-Рамона и поля модулей с нулевым потенциалом. Здесь мы исследуем свойства космологических решений без конкретизации источника,

основываясь на методах качественной теории динамических систем.

В дальнейшем нам будет удобно работать в конформной калибровке, когда $N(t) = R(t)$, а соответствующую временную координату будем отмечать индексом c . Введя новую независимую переменную τ и функцию $h(\tau)$ согласно

$$d\tau = \sqrt{H^2 + k} dt_c, \quad h = \frac{d \ln R}{d\tau} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + k}} \quad (3.13)$$

(из последнего уравнения (3.5) следует, что для моделей с неотрицательной плотностью энергии величина в подкоренном выражении всегда неотрицательна) и подставляя $N^2 \varepsilon$ из последнего уравнения в первые два, систему (3.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= x, \quad \frac{dx}{d\tau} = [n(n-1) - x^2](\alpha/2 - bhx), \\ \frac{dh}{d\tau} &= (1 - h^2)[(n-1)(nb-1) - bx^2]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Динамическая система (3.14) инвариантна относительно преобразования

$$\tau \rightarrow -\tau, \quad x \rightarrow -x, \quad h \rightarrow -h, \quad (3.15)$$

связывающего модели расширения и сжатия. Преобразованием инвариантности этой системы является также замена

$$\phi \rightarrow -\phi, \quad x \rightarrow -x, \quad \alpha \rightarrow -\alpha, \quad (3.16)$$

связывающая модели для двух, вообще говоря различных, функций, $\alpha(\phi)$ и $-\alpha(-\phi)$. Для источника, удовлетворяющего соотношениям (2.9) и (2.10) и с постоянным a , функция α определяется соотношением (3.10) и зависит только от поля ϕ . Ниже мы будем рассматривать в основном этот случай. Плотность энергии выражается через решения системы (3.14):

$$R^2 \varepsilon = (H^2 + k)[n(n-1) - x^2]. \quad (3.17)$$

Отсюда следует, что фазовые траектории, описывающие модели с неотрицательной плотностью энергии, лежат в области

$$n(n-1) - x^2 \geq 0. \quad (3.18)$$

Знак равенства в этом условии соответствует чисто гравитационным моделям ($\varepsilon = 0$). В этом случае система космологических уравнений точно интегрируема в терминах конформного времени и соответствующие решения имеют вид

$$R = R_m \left| \sin \left[\sqrt{k}(n-1)t_c \right] / \sqrt{k} \right|^{1/(n-1)}, \quad (3.19)$$

$$\pm \ln \left| \operatorname{tg} \left[\sqrt{k}(n-1)t_c / 2 \right] / \sqrt{k} \right| = 2 \sqrt{\frac{n-1}{n}} \int \sqrt{-F_\varphi(\phi)} d\phi. \quad (3.20)$$

При заданных функциях связи дилатона вторая из этих формул определяет

зависимость дилатона от конформного времени. Синхронная временная координата E-представления определяется из $t = \int R dt_c$. Этот интеграл выражается через элементарные функции только для плоских моделей и соответствующее решение

$$R \sim |t|^{1/n}, \quad \phi = \text{const} \pm \sqrt{1-1/n} \ln|t| \quad (3.21)$$

лежит на основе pre-big bang модели инфляции, предложенной в [13]. Заметим, что для этого решения параметр τ связан с t соотношением

$$\tau = \frac{\text{sgn } t}{n} \ln|t|. \quad (3.22)$$

Для источников с уравнением состояния $p = \varepsilon$ (например, безмассовое скалярное поле) имеем $b = 0$ и первое уравнение системы (3.5) совпадает с соответствующим вакуумным уравнением. Поэтому для этих источников масштабный фактор по-прежнему описывается решением (3.19) (соответствующие решения для поля дилатона см. [28,29]).

4. *Качественный анализ плоской модели.* Для космологической модели с плоским пространством ($k=0$) из (3.13) получим $h = 1, -1$ для моделей расширения и сжатия соответственно. Теперь (3.14) сводится к двумерной динамической системе

$$\frac{d\phi}{d\tau} = x, \quad \frac{dx}{d\tau} = [n(n-1) - x^2](\alpha/2 - bhx), \quad \tau = \text{const} \cdot h \ln R, \quad h = \pm 1. \quad (4.1)$$

Ниже будем рассматривать первый из этих случаев. Соответствующие результаты для моделей сжатия получаются преобразованием $\tau \rightarrow -\tau, x \rightarrow -x$. Траектории системы (4.1), описывающие решения с неотрицательной плотностью энергии, лежат в горизонтальной полосе (3.18) фазовой плоскости (ϕ, x) . Граница этой полосы

$$x = \pm \sqrt{n(n-1)} \quad (4.2)$$

является решением системы и соответствует чисто гравидилатонным решениям (3.19), (3.20).

В древесном приближении функция α является постоянной (см. (3.11), (3.12)) и система (4.1) наряду с (4.2) имеет также особое решение

$$x = \alpha/2b, \quad (4.3)$$

которое обладает положительной плотностью энергии, если $|\alpha/2b| < \sqrt{n(n-1)}$. Временная зависимость этих решений дается выражениями

$$\phi = \text{const} \pm \sqrt{n-1} \frac{\alpha}{\alpha_1} \ln|t|, \quad R = \text{const} \cdot |t|^{4b/\alpha_1} \quad (4.4)$$

в E-представлении и выражениями

$$\phi = \text{const} + \frac{\alpha(n-1)}{2\alpha \pm \sqrt{n-1}\alpha_1} \ln|\tilde{t}|, \quad \tilde{R} = \text{const} \cdot |\tilde{t}|^{\frac{\alpha + \alpha_0/\sqrt{n}}{\alpha \pm \sqrt{n-1}\alpha_1/2}} \quad (4.5)$$

в струнном представлении. Здесь введено обозначение $\alpha_1 = \alpha^2 + n(1 - \alpha^2)/(n-1)$, а t и \tilde{t} - синхронные временные координаты соответственно в E- и струнном представлениях, связанные с параметром τ в (3.13) соотношениями

$$\tau = \pm \frac{4b}{\alpha_1} \ln|t| = \frac{4b \ln|\tilde{t}|}{2\alpha/\sqrt{n-1} \pm \alpha_1}. \quad (4.6)$$

В формулах (4.4) - (4.6) верхний знак соответствует моделям расширения E-представления ($t > 0$), а нижний знак - моделям сжатия ($t < 0$). Для общего решения древесного приближения уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\alpha(1 - \alpha_0^2/\alpha^2)\phi = \text{const} + \ln \left[(x - \alpha/2b)^2 (\sqrt{n(n-1)} + x)^{\alpha_0/\alpha-1} \times \right. \\ \left. \times (\sqrt{n(n-1)} - x)^{-\alpha_0/\alpha-1} \right], \quad (4.7)$$

где введено обозначение

$$\alpha_0 = 2b\sqrt{n(n-1)}. \quad (4.8)$$

В предельных областях $\phi \rightarrow \pm\infty$ общее решение стремится к одному из решений (4.2), (4.3).

Если в роли негравитационного источника выступает излучение, то $a = 1/n$ и согласно (3.10) $\alpha = 0$. В этом случае система (4.1) имеет решения с постоянным дилатоном, которые совпадают с соответствующими решениями ОТО. Уравнение фазовых траекторий, описывающее решения с переменным дилатоном, имеет вид

$$x = -\sqrt{n(n-1)} \text{th}[\alpha_0(\phi - \phi_1)/2], \quad (4.9)$$

где ϕ_1 - постоянная интегрирования. Зависимость от переменной τ дается выражением (аналогичные решения в скалярно-тензорных теориях гравитации при $n = 3$ см. [49])

$$\phi = \phi_1 \pm 2\sqrt{\frac{n}{n-1}} \ln \left[e^{-(n-1)(\tau-\tau_0)/2} + \sqrt{1 + e^{-(n-1)(\tau-\tau_0)}} \right] \quad (4.10)$$

с новой постоянной интегрирования τ_0 .

Перейдем теперь к систематическому анализу качественной структуры фазовой картины динамической системы (4.1) для общего случая функции $\alpha(\phi)$. Одним из основных этапов качественного анализа является нахождение и исследование характера особых точек. Для системы (4.1) таковыми являются следующие точки фазовой плоскости (ϕ, x) :

$$(\phi_0, 0), \quad \alpha(\phi_0) = 0. \quad (4.11)$$

В их окрестности соответствующая линейная система совпадает с уравнением механического осциллятора с затуханием. Характер особых точек определяется собственными числами

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 + n(n-1)\alpha'_0/2}, \quad \alpha'_0 = \left(\frac{d\alpha}{d\phi} \right)_{\phi=\phi_0}, \quad k = \frac{n}{4}(1-a), \quad (4.12)$$

причем для действительных λ_i угловой коэффициент соответствующих сепаратрис в особой точке равен $k_i = \lambda_i$. Стандартный анализ (см., например, [51]) приводит к следующим результатам.

а) При $\alpha'_0 > 0$ числа λ_i действительны и разного знака. Особая точка является седлом.

При $\alpha'_0 < 0$ особая точка устойчива (асимптотически устойчива при $\alpha_0 > 0$) для моделей расширения и неустойчива для моделей сжатия. Следует различать следующие случаи.

б) $\alpha_0 = 0$. Особая точка является центром. В ее окрестности решение имеет вид

$$\phi - \phi_0 = \phi_1 \cos(\omega_0 \tau + \theta), \quad \omega_0^2 = -n(n-1)\alpha'_0/2. \quad (4.13)$$

Этот случай соответствует источникам с уравнением состояния $p = \varepsilon$ (таковым является, например, безмассовое скалярное поле). При $D = 4$ к скалярному полю аксиона сводится также антисимметричный тензор Калба-Рамона. Соответствующие решения рассмотрены в [28,29].

в) $0 < \alpha_0 < \frac{4\omega_0}{\sqrt{n(n-1)}}$. Точка является устойчивым фокусом и решение в ее окрестности представляет собой затухающие колебания для моделей расширения

$$\phi - \phi_0 = \phi_1 e^{-k\tau} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - k^2} \tau + \theta\right). \quad (4.14)$$

г) $\alpha_0 = \frac{4\omega_0}{\sqrt{n(n-1)}}$. Собственные значения действительны и равны $-\sqrt{n(n-1)}\alpha_0/4$. В теории колебаний соответствующая система называется критически демпфированной. Вблизи особой точки решение имеет вид

$$\phi - \phi_0 = (a_1 + a_2 \tau) e^{-k\tau}, \quad (4.15)$$

где a_i - вещественные постоянные.

д) $\alpha_0 > \frac{4\omega_0}{\sqrt{n(n-1)}}$. Собственные числа действительны и отрицательны.

Особая точка является узлом. Поскольку $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, то в ее окрестности все траектории, кроме двух, касаются собственного вектора, соответствующего собственному числу λ_1 и решение имеет вид

$$\phi - \phi_0 = b_1 e^{\lambda_1 \tau} + b_2 e^{\lambda_2 \tau}. \quad (4.16)$$

е) И, наконец, рассмотрим вырожденный случай $\alpha'_0 = 0$, когда $\lambda_1 = 0$. Пусть в окрестности особой точки функция $\alpha(\phi)$ имеет разложение

$$\alpha(\phi) = \frac{1}{m!} \alpha_0^{(m)} (\phi - \phi_0)^m + \dots, \quad m \geq 2. \quad (4.17)$$

Анализ по стандартной схеме (см. [51]) приводит к следующим результатам:

e1) $m = 2$. Особая точка представляет собой состояние равновесия с одним узловым сектором, устойчивым при $h = 1$ и неустойчивым при $h = -1$, и двумя седловыми. Угловые коэффициенты сепаратрис равны $k_1 = 0$, $k_2 = -\sqrt{n(n-1)} \alpha_0 / 2$. При $\alpha_0' > 0$ (< 0) траектории узлового сектора стремятся к особой точке слева (справа) от сепаратрисы с коэффициентом k_2 .

e2) $m = 3$. Точка имеет характер седла (узла) при

$$1 + 4\alpha_0^{(3)} / 3\alpha_0^4 > 0 (< 0).$$

e3) $m \geq 4$. Особая точка имеет характер седла.

Заметим, что случай б) реализуется, когда негравитационным источником является безмассовое скалярное поле. К такому источнику сводится также антисимметричное поле Калба-Рамона. Для них поле дилатона осциллирует в окрестности $\phi = \phi_0$. Если объединить выражения (4.13), (4.14), (4.16) общей формулой

$$\phi - \phi_0 = \phi_1 e^{a_1 \tau} \cos(a_2 \tau + a_3) \quad (4.18)$$

с соответствующим образом определенными постоянными a_p , из первого уравнения (3.5) нетрудно найти поведение функции Хаббла в окрестности неподвижной точки:

$$H = \frac{2}{n(1+a)t} \left\{ 1 + \text{const} \cdot e^{2a_1 \tau} [c_1 + c_2 \sin(2a_2 \tau + c_3)] \right\}, \quad \tau = \frac{\pm 2 \ln |t|}{n(1+a)}, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (4.19)$$

где верхний/нижний знак соответствует моделям расширения/сжатия Е-представления, а постоянные c , выражаются через a , и параметры a , n . Первое слагаемое в фигурных скобках (4.19) соответствует решению ОТО, а второе слагаемое представляет собой малую поправку, обусловленную переменным дилатоном.

Из проделанного анализа следует, что в случае моделей расширения наличие у функции $\alpha(\phi)$ нулей с $\alpha'(\phi_0) < 0$ приводит к эффективному механизму фиксации дилатона и релаксации эффективной теории струн к ОТО. Действительно, для отношения значений вариаций дилатона в некоторые последовательные моменты времени t_i и t_e имеем

$$\frac{\phi(t_e) - \phi_0}{\phi(t_i) - \phi_0} \sim \exp\left\{-|\text{Re}\lambda_1|[\tau(t_e) - \tau(t_i)]\right\} = \left[\frac{R(t_i)}{R(t_e)}\right]^{|\text{Re}\lambda_1|}. \quad (4.20)$$

В случаях в) и г), когда особая точка является фокусом или критическим узлом, имеем $|\text{Re}\lambda_1| = n(1-a)/4$. В инфляционной стадии расширения $a = -1$, а отношение масштабных факторов в начале и в конце инфляции

$\sim e^{-65}$. Принимая, что в начале инфляции вариации дилатона ~ 1 , получаем, что в конце они сильно подавлены [16]

$$\phi(t_e) - \phi_0 \leq 10^{-42}. \quad (4.21)$$

В предположении, что для различных источников нуль функции $\alpha(\phi)$ одна и та же (в частности, это так, если функции связи для различных источников универсальны), последующие стадии расширения (радиационно- и материально-доминированные) приводят к дальнейшему подавлению этих вариаций: $|\delta\phi| \leq 10^{-49}$ в настоящую эпоху [16]. Такие вариации намного далеки от тех наблюдательных ограничений, которые следуют из тестов принципа эквивалентности. Таким образом, данная схема приводит к естественному подавлению вариаций дилатона в ходе космологической эволюции и лежит в основе механизма фиксации дилатона, известного под названием механизма Дэмура-Полякова [16]. Заметим, что этот механизм будет работать также в случае д), если величина $|\alpha_0|$ не слишком мала.

Перейдем к исследованию поведения траекторий системы (4.1) на бесконечности $\phi \rightarrow \pm\infty$. Для этого удобно произвести отображение фазового пространства на конечную область. С этой целью вместо ϕ введем новую переменную y согласно

$$e^\phi = \frac{y}{1-y}, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (4.22)$$

В терминах этой функции система (4.1) примет вид

$$\frac{dy}{d\tau} = y(1-y)x, \quad \frac{dx}{d\tau} = [n(n-1) - x^2](\alpha(y)/2 - bx). \quad (4.23)$$

Фазовым пространством теперь является область на плоскости (y, x) , определяемая неравенствами $0 \leq y \leq 1$, $|x| \leq \sqrt{n(n-1)}$. На границе этой области особыми являются точки (y, x) с координатами

$$(j, \pm\sqrt{n(n-1)}), \quad j = 0, 1, \quad (4.24)$$

$$(j, \alpha(j)/2b), \quad \text{если } |\alpha(j)| \leq \alpha_0. \quad (4.25)$$

Собственные числа, определяющие качественный характер этих точек, равны

$$\lambda_1 = \pm(-1)^j \sqrt{n(n-1)}, \quad \lambda_2 = 2bn(n-1)(1 \mp \alpha(j)/\alpha_0) \quad (4.26)$$

в случае (4.24) и

$$\lambda_1 = (-1)^j \alpha(j)/2b, \quad \lambda_2 = -bn(n-1)(1 - \alpha^2(j)/\alpha_0^2) \quad (4.27)$$

в случае (4.25). Из этих выражений следует, что точки равновесия являются узлами или седлами. Точки $(0, \sqrt{n(n-1)})$ и $(1, -\sqrt{n(n-1)})$ являются неустойчивыми. При условии $(-1)^j \alpha(j) < 0$ точка (4.25) является устойчивым узлом, и при $\phi \rightarrow \infty$ траектории стремятся к решению, описываемому

сепаратрисой $x = \alpha(j)/2b$ и имеющему вид (4.4) при $t_c \rightarrow \infty$.

На основе проведенного анализа можно построить фазовые картины динамической системы (4.1) для любой функции $\alpha(\phi)$. Соответствующие картины для функции $-\alpha(-\phi)$ можно получить преобразованием (3.16). На приведенных ниже рисунках изображены некоторые качественно различные случаи моделей расширения E-представления (верхний знак в (4.1)). Картины для моделей сжатия получаются отсюда преобразованием (3.15). На рисунках предварительно проведено отображение фазового пространства на прямоугольную область $\{0 \leq y \leq 1, |x| \leq \sqrt{n(n-1)}\}$ плоскости (y, x) согласно (4.22). Горизонтальные отрезки $x = \pm\sqrt{n(n-1)}$ соответствуют чисто грави-дилатонным решениям (3.19), (3.20). Для них точкам $(0, \pm\sqrt{n(n-1)})$, $((1, \pm\sqrt{n(n-1)}))$ соответствуют значения $\tau = -\infty(+\infty)$ и $\tau = +\infty(-\infty)$, соответственно для верхнего и нижнего знаков. Поэтому, согласно (3.22), соответствующие этим точкам значения эйнштейновского синхронного времени равны $t = 0(+\infty)$ и $t = +\infty(0)$.

Фазовый портрет рис. 1а соответствует моделям древесного приближе-

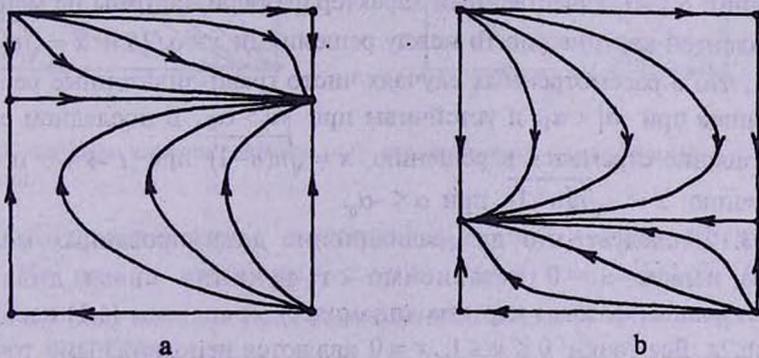


Рис.1. Фазовые картины динамической системы (4.1) в древесном приближении. Фазовая плоскость $(\phi, x = d\phi/d\tau)$ отображена на прямоугольную область $(0 \leq y \leq 1, |x| \leq \sqrt{n(n-1)})$ согласно (4.22).

ния, когда $\alpha = \text{const}$ и предположено, что $0 < \alpha < \alpha_0$. Горизонтальный отрезок $x = \alpha/2b$ соответствует особому решению (4.4). Согласно (4.7), начальной и конечной точкам эволюции этого решения соответствуют значения $t = 0$ и $t = +\infty$ синхронной в E-представлении временной координаты и оно является аттрактором для общего решения при $t \rightarrow +\infty$. Имеются два класса решений. Траектории, соответствующие первому из них, начинают свою эволюцию в области слабой связи ($\phi \ll -1$) вблизи чисто грави-дилатонного решения $x = \sqrt{n(n-1)}$ и заканчивают свою эволюцию в области сильной связи. Для второго класса решений (траектории ниже отрезка $x = \alpha/2b$) эволюция начинается в области

сильной связи в конечный момент синхронного времени E -представления вблизи гравидилатонного решения и заканчивается также в области сильной связи при $t \rightarrow +\infty$. При $\alpha \rightarrow \alpha_0$ особое решение (4.4) приближается и в предельном случае совпадает с решением $x = \sqrt{n(n-1)}$. При дальнейшем увеличении $\alpha > \alpha_0$ качественный характер фазовой картины, соответствующей моделям с неотрицательной плотностью энергии, не меняется. Таким образом, фазовую картину при $\alpha > \alpha_0$ можно получить из 1a предельным переходом $\alpha \rightarrow \alpha_0$, и она качественно эквивалентна фазовой картине между решениями $x = \alpha/2b$ и $x = -\sqrt{n(n-1)}$.

Фазовая картина древесного приближения при $-\alpha_0 < \alpha < 0$ изображена на рис.1b. Все решения с $x > \alpha/2b$ начинают и заканчивают свою эволюцию в области слабой связи. Решения $x < \alpha/2b$ также заканчиваются в этой области, однако они начинают свою эволюцию из области сильной связи. Заметим, что теперь имеются решения, для которых в ходе всей эволюции дилатон остается в области слабой связи и поэтому всегда применимо древесное приближение. При $\alpha \rightarrow -\alpha_0$ решение (4.3) приближается к гравидилатонному решению $x = -\sqrt{n(n-1)}$. При дальнейшем уменьшении $\alpha < -\alpha_0$ качественный характер фазовой картины не меняется и эквивалентен картине рис.1b между решениями $x = \alpha/2b$ и $x = \sqrt{n(n-1)}$. Заметим, что в рассмотренных случаях чисто гравидилатонные решения неустойчивы при $|\alpha| < \alpha_0$ и устойчивы при $|\alpha| > \alpha_0$. В последнем случае общее решение стремится к решению $x = \sqrt{n(n-1)}$ при $t \rightarrow +\infty$ и $\alpha > \alpha_0$ и к решению $x = -\sqrt{n(n-1)}$ при $\alpha < -\alpha_0$.

Из (3.10) следует, что для радиационно доминированных моделей ($a = 1/n$) имеем $\alpha = 0$ независимо от функции связи дилатона. Соответствующая фазовая картина динамической системы (4.1) изображена на рис.2a. Все точки $0 \leq y \leq 1$, $x = 0$ являются неподвижными точками и соответствуют решениям с постоянным дилатоном. Для моделей расширения решения с переменным дилатоном начинают эволюцию в неустойчивых узлах $(0, \sqrt{n(n-1)})$ и $(1, -\sqrt{n(n-1)})$ в некоторый конечный момент времени и кроме чисто гравидилатонных решений стремятся к соответствующим решениям с постоянным дилатоном при $t \rightarrow +\infty$. Предельное значение дилатона зависит от начальных условий. Уравнение фазовых траекторий определяется соотношением (4.7), а зависимость от τ - соотношением (4.10).

Для общего случая функции связи дилатона качественный характер фазовой картины динамической системы (4.1) зависит от числа и характера нулей функции $\alpha(\phi)$ и предельных значений $\alpha(\pm\infty)$. При $\alpha(\pm\infty) > \alpha_0 (< -\alpha_0)$, $\alpha(\phi) > 0 (< 0)$ единственными неподвижными точками являются точки $(y = 0, 1, x = \pm\sqrt{n(n-1)})$ на границе фазового пространства.

Фазовые картины для этих случаев качественно эквивалентны картинам

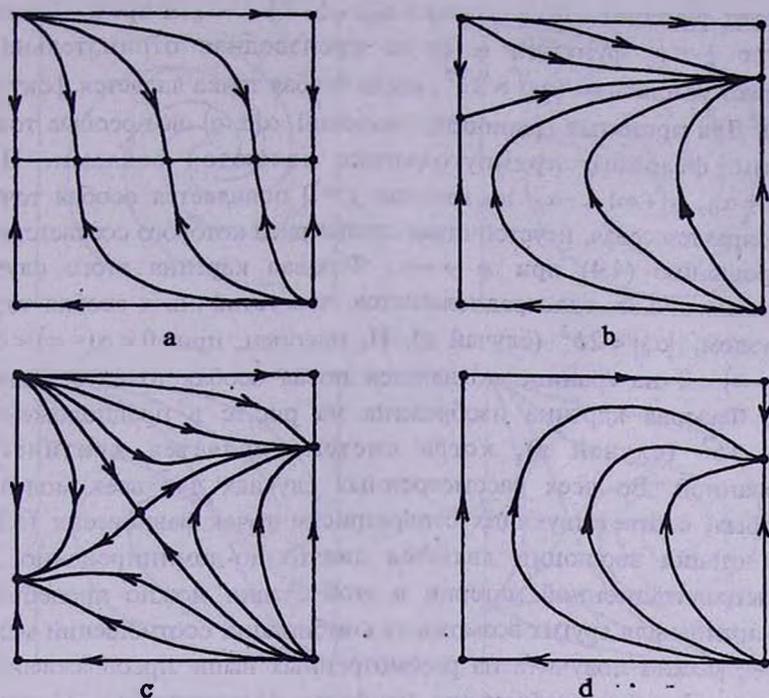


Рис.2. Фазовые картины системы (4.1) для некоторых функций $\alpha(\phi)$ с петлевыми поправками.

древесного приближения с $\alpha = \text{const} > \alpha_0 (< -\alpha_0)$ и были рассмотрены выше. На рис.2b изображен случай $\alpha(\pm\infty) < \alpha_0, \alpha(\phi) > 0$. Случай $\alpha(+\infty) \geq \alpha_0$ получается отсюда совмещением точек $(y=1, x = \alpha(+\infty)/2b)$ и $(y=1, \sqrt{n(n-1)})$. Случай $\alpha(-\infty) > \alpha_0, \alpha(+\infty) < \alpha_0, \alpha > 0$ изображен на рис.2d. При $-\alpha_0 < \alpha(-\infty) < 0$ и $0 < \alpha(+\infty) < \alpha_0$ фазовая картина изображена на рис.2c для функции $\alpha(\phi)$ с единственным нулем. Так как в этом нуле $\alpha'(\phi_0) > 0$, то соответствующая особая точка является седлом. Сепаратрисы этого седла разделяют фазовое пространство на четыре качественно различные области. Соответствующие картины при $\alpha(-\infty) < -\alpha_0$ или $\alpha(+\infty) > \alpha_0$ получаются из рис.2c с соответствующим совмещением точек.

Во всех рассмотренных выше примерах, кроме радиационно доминированного случая, модели заканчивали свою эволюцию на границе фазовой области $\phi \rightarrow \pm\infty (y = 0,1)$. Эти модели не могут фиксировать дилатон при конечных значениях. На рис.3 а - d приведены фазовые картины для некоторых простых моделей с переменной α , приводящие к фиксации дилатона в результате космологической эволюции. Они являются просты-

ми иллюстрациями механизма Демура-Полякова. Фазовая картина рис.3а соответствует функции $\alpha(\phi)$ с $\alpha(-\infty) > \alpha_0$, $\alpha(+\infty) < -\alpha_0$ и предположено, что в нуле $\phi = \phi_0$ функции $\alpha(\phi)$ ее производная отрицательна и удовлетворяет условию $|\alpha'(\phi_0)| > 2b^2$, когда особая точка является фокусом (случай в). Для принятых граничных значений $\alpha(\pm\infty)$ все особые точки на границе фазового прямоугольника являются седлами. При $0 < \alpha(-\infty) < \alpha_0$, $\alpha(+\infty) < -\alpha_0$ на границе $y=0$ появляется особая точка, имеющая характер седла, неустойчивая сепаратриса которого соответствует особому решению (4.4) при $\phi \rightarrow -\infty$. Фазовая картина этого случая изображена на рис.3б, где предполагается, что устойчивая особая точка является узлом, $|\alpha'_0| < 2b^2$ (случай д). И, наконец, при $0 < \alpha(-\infty) < \alpha_0$, $-\alpha_0 < \alpha(+\infty) < 0$ на границе появляется новая особая точка седлового характера. Фазовая картина изображена на рис.3с в предположении, что $\alpha'_0 = -2b^2$ (случай г), когда система является критически демпфированной. Во всех рассмотренных случаях для всех моделей, кроме особых, соответствующих сепаратрисам точек равновесия (4.25), начальная стадия эволюции является дилатонно-доминированной, и вкладом негравитационной материи в этой стадии можно пренебречь. Фазовые картины для других возможных комбинаций соотношений между $\alpha(\pm\infty)$ и α_0 можно получить из рассмотренных выше преобразованием (3.15). На рис.3 а - с изображены наиболее благоприятные (с точки зрения фиксации дилатона) случаи, когда для всех моделей космологическая эволюция переводит систему в состояния, когда вариации дилатона малы (все решения при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к решению с постоянным дилатоном). Из выражений собственных чисел (4.26), (4.27) следует, что на бесконечности фазового пространства нет устойчивых точек равновесия, если

$$\alpha(-\infty) \geq 0, \quad \alpha(+\infty) \leq 0. \quad (4.28)$$

Эти условия являются необходимыми для того, чтобы все однородные и изотропные модели эффективной теории струн в ходе космологической эволюции стремились к решениям с фиксированным дилатоном. В случае негравитационных источников, для которых представление Йордана реализуемо, граничное значение $\alpha(-\infty)$ определяется выражениями (3.11), (3.12). При условии $1 - na > 0$ для RR-полей $\alpha(-\infty) < 0$ и точка (4.25) с $j=0$ является устойчивым узлом. Поэтому существует класс решений с $\phi \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ и для них дилатон не будет фиксирован при конечных значениях. Для безмассовых RR-аксионов $\alpha(-\infty) = \sqrt{n-1}$, однако в этом случае, как уже отмечалось выше, нули функции $\alpha(\phi)$ с $\alpha'_0 < 0$ являются центром, в окрестности которого происходят незатухающие осцилляции дилатона, а поэтому такие источники не приводят к фиксации дилатона.

Для потенциально доминированного источника $a = -1$, $\beta = 0$ и

поэтому, согласно (3.11), $\alpha(-\infty) = -2/\sqrt{n-1}$ и точка (4.25) с $j=0$ является

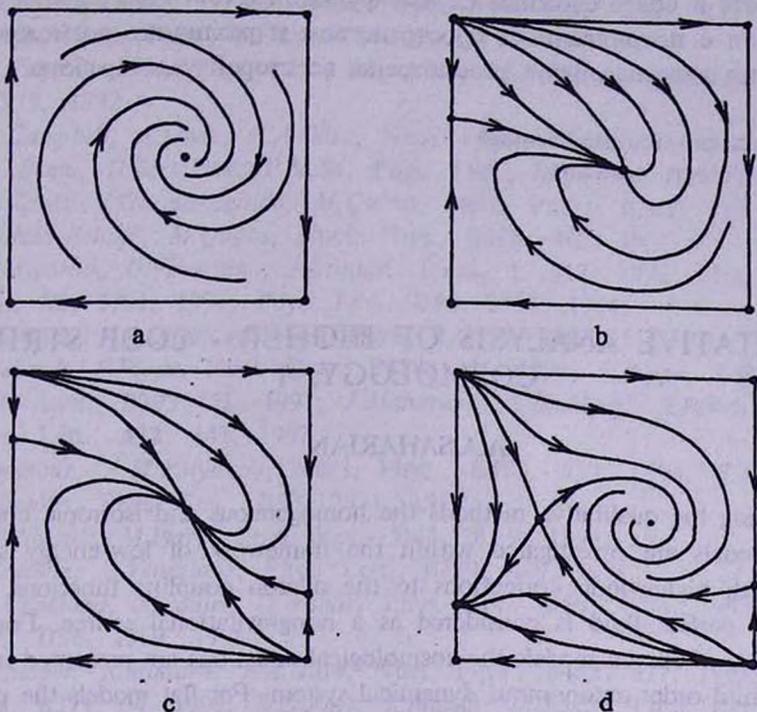


Рис.3. То же, что и на рис.2 для некоторых моделей с фиксацией дилатона.

устойчивым узлом. Как и в предыдущем случае для части решений наличие нулей у функции $\alpha(\phi)$ с $\alpha'_0 < 0$ не приводит к релаксации модели в направлении решений ОТО. На рис.3d приведена характерная для этих случаев фазовая картина, когда $-\alpha_0 < \alpha(-\infty) < 0$, функция $\alpha(\phi)$ сначала при возрастании ϕ растет и обращается в нуль с положительной производной в этой точке (левая точка равновесия на рис.3d, являющаяся седлом). Далее функция достигает максимума, после чего убывает до значения $-\alpha_0 < \alpha(+\infty) < 0$. Предполагается, что в точке второго нуля выполняется условие $|\alpha'_0| > 2b^2$ и она является фокусом. К конечному фиксированному значению дилатона приводят лишь те космологические модели, которые выходят из неустойчивых узлов $(0, \sqrt{n(n-1)})$, $(1, -\sqrt{n(n-1)})$ в направлениях, лежащих выше устойчивых сепаратрис седла, соответствующего левому нулю функции $\alpha(\phi)$. Все остальные модели заканчивают свою эволюцию в области слабой связи и стремятся к решению (4.4) при $\tau \rightarrow +\infty$. Случай $\alpha(-\infty) \leq -\alpha_0$ или $\alpha(+\infty) \leq -\alpha_0$ можно получить на рис.3d простым совмещением точек $(0, \alpha(-\infty)/2b)$ и $(0, -\sqrt{n(n-1)})$ или $(1, \alpha(+\infty)/2b)$ и $(1, -\sqrt{n(n-1)})$,

соответственно. На основе проведенного выше анализа нетрудно исследовать и более сложные случаи функции $\alpha(\phi)$.

Модели с искривленным пространством и различные возможности релаксации дилатона будут рассмотрены во второй части работы.

Ереванский государственный
университет, Армения

QUALITATIVE ANALYSIS OF HIGHER - LOOP STRING COSMOLOGY. I

A.A.SAHARIAN

By using the qualitative methods the homogeneous and isotropic cosmological models are investigated within the framework of low-energy string gravity with higher-loop corrections to the dilaton coupling functions. The barotropic perfect fluid is considered as a nongravitational source. For the general case of curved models the cosmological equations are presented in the form of third order autonomous dynamical system. For flat models the phase portraits are presented for various dilaton coupling functions including the tree level case. The asymptotic behavior of the general solution is investigated in different limiting regions. The dilaton stabilization by using the Damour-Polyakov mechanism is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Хокинг, Дж.Эллис, Крупномасштабная структура пространства-времени, Мир, М., 1977.
2. М.Грин, Дж.Шварц, Э.Виттен, Теория суперструн, т. 1,2, Мир, М., 1990.
3. P.Horava, E.Witten, Nucl. Phys., B460, 505, 1996; B475, 94, 1996.
4. E.Witten, Nucl. Phys., B471, 135, 1996.
5. J.Ellis, K.Enqvist, D.V.Nanopoulos, M.Quiros, Nucl. Phys., B277, 231, 1986; K.Maeda, M.D.Pollack, Phys. Lett., B173, 251, 1986; P.Binetruy, M.-K.Gaillard, Phys. Rev., D34, 3069, 1986.
6. R.C.Myers, Phys. Lett., B199, 371, 1987; I.Antoniadis, C.Bachas, J.Ellis, D.V.Nanopoulos, Phys. Lett., B211, 393, 1988; Nucl. Phys., B328, 117, 1989.
7. M.Mueller, Nucl. Phys., B337, 37, 1990; G.Veneziano, Phys. Lett., B265,

287, 1991.

8. *R.H.Brandenberger, C.Vafa*, Nucl. Phys., B316, 391, 1989; *A.A.Tseytlin, C.Vafa*, Nucl. Phys., B372, 443, 1992.
9. *A.A.Tseytlin*, Mod. Phys. Lett., A6, 1721, 1991; Class. Quantum Grav., 9, 979, 1992.
10. *B.A.Campbell, A.Linde, K.A.Olive*, Nucl. Phys., B355, 146, 1991.
11. *M.C.Bento, O.Bertolami, P.M.Sa*, Phys. Lett., B262, 11, 1991.
12. *J.A.Casas, J.Garcia-Bellido, M.Quiros*, Nucl. Phys., B361, 713, 1991. *J.Garcia-Bellido, M.Quiros*, Nucl. Phys., B368, 463, 1992.
13. *M.Gasperini, G.Veneziano*, Astropart. Phys., 1, 317, 1993; Mod. Phys. Lett., A8, 3701, 1993; Phys. Rev., D50, 2519, 1994.
14. *N.Kaloper, K.A.Olive*, Astropart. Phys., 1, 185, 1993.
15. *K.Behrndt, S.Forste*, Nucl. Phys., B430, 441, 1994; *R.Poppe, S.Schwager*, Phys. Lett., B393, 51, 1997; *J.Maharana, S.Mukherji, S.Panda*, Mod. Phys. Lett., A12, 447, 1997.
16. *T.Damour, A.M.Polyakov*, Nucl. Phys., B423, 532, 1994; *T.Damour, A.Vilenkin*, Phys. Rev., D53, 2981, 1996.
17. *D.Goldwirth, M.Perry*, Phys. Rev., D49, 5019, 1994.
18. *R.Brustein, G.Veneziano*, Phys. Lett., B329, 429, 1994.
19. *E.J.Copeland, A.Lahiri, D.Wands*, Phys. Rev., D50, 4868, 1995. Phys. Rev., D51, 1569, 1995.
20. *N.Kaloper, R.Madden, K.A.Olive*, Nucl. Phys., B452, 677, 1995; Phys. Lett., B371, 34, 1996; *R.Easther, K.Maeda, D.Wands*, Phys. Rev., D53, 4247, 1996.
21. *I.Antoniadis, J.Rizos, K.Tamvakis*, Nucl. Phys., B415, 497, 1994; *J.Rizos, K.Tamvakis*, Phys. Lett., B326, 57, 1994; *R.Easther, K.Maeda*, Phys. Rev., D54, 7252, 1996; *J.S.Rey*, Phys. Rev. Lett., 77, 1929, 1996; *M.Gasperini, G.Veneziano*, Phys. Lett., B387, 715, 1996.
22. *J.Levin*, Phys. Rev., D51, 1536, 1995.
23. *J.P.Mimoso, D.Wands*, Phys. Rev., D51, 477, 1995.
24. *A.A.Саарян*, Астрофизика, 38, 101, 291, 447, 1995.
25. *A.A.Саарян*, Астрофизика, 39, 279, 1996.
26. *A.A.Саарян*, Астрофизика, 40, 233, 517, 1997.
27. *A.A.Saharian*, On Graceful Exit in String Cosmology with pre-big Bang Phase, hep-th/9709188.
28. *A.A.Саарян*, Астрофизика, 41, 277, 1998.
29. *A.A.Saharian*, Class. Quantum Grav., 15, 1951, 1998.
30. *R.Brustein, R.Madden*, Phys. Lett., B410, 110, 1997; Phys. Rev., D57, 712, 1998.
31. *M.Gasperini, M.Maggiore, G.Veneziano*, Nucl. Phys., B494, 315, 1997; *G.Veneziano*, Phys. Lett., B406, 297, 1997.
32. *M.S.Turner, E.J.Weinberg*, Phys. Rev., D56, 4604, 1997.
33. *M.C.Bento, O.Bertolami*, Class. Quantum Grav., 12, 1919, 1995.
34. *M.Gasperini, J.Maharana, G.Veneziano*, Nucl. Phys., D472, 349, 1996.
35. *E.J.Copeland, R.Easther, D.Wands*, Phys. Rev., D56, 874, 1997.

36. *N.A.Batakis*, Phys. Lett., B353, 39, 1995.
37. *M.Gasperini, R.Ricci*, Class. Quantum Grav., 12, 677, 1995.
38. *J.D.Barrow, K.E.Kunze*, Phys. Rev., D55, 623, 1997.
39. *A.Lukas, B.A.Ovrut, D.Waldram*, Phys. Lett., B393, 65, 1997; Nucl. Phys., B495, 365, 1997.
40. *N.Kaloper*, Phys. Rev., D55, 3394, 1997.
41. *N.Kaloper, K.Olive*, Phys. Rev., D57, 811, 1998.
42. *E.J.Copeland, J.E.Lidsey, D.Wands*, Nucl. Phys., B506, 407, 1997; Phys. Rev., D57, 625, 1998.
43. *N.Kaloper, I.J.Kogan, K.A.Olive*, prep. UMN-TH-1609/97, hep-th/9711027.
44. *H.Lu, S.Mukherji, C.N.Pope, K.-W. Xu*, Phys. Rev., D55, 7926, 1997.
45. *J.E.Lidsey*, On the cosmology and symmetry of dilaton-axion gravity, gr-qc/9609063.
46. *K.A.Meissner*, Phys. Lett., B392, 298, 1997; *N.Kaloper, K.A.Meissner*, prep. CERN-TH/97-113, hep-th/9705193.
47. *J.D.Barrow*, Phys. Rev., D48, 3592, 1993; *S.K.Rama*, Phys. Rev. Lett., 78, 1620, 1997; hep-th/9611223; hep-th/9701154; hep-th/9704047.
48. *F.Quevedo*, Gaugino Condensation, Duality and Supersymmetry Breaking, prep. CERN-TH/95-308.
49. *T.Damour, K.Nordvedt*, Phys. Rev. Lett., 70, 2217, 1993; Phys. Rev., D48, 3436, 1993.
50. *E.Kiritsis*, Introduction to Superstring Theory, hep-th/9709062.
51. *Н.Н.Баутин, Е.М.Леонтович*, Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Наука, М., 1976.