АСТРОФИЗИКА

ТОМ 42 ФЕВРАЛЬ, 1999 ВЫПУСК 1

УДК: 524.7: 539.12

ДВУХФОТОННЫЕ ПРОЦЕССЫ РОЖДЕНИЯ И АННИГИЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР. I. КИНЕМАТИКА И СЕЧЕНИЯ ПРОЦЕССОВ

Д.И.НАГИРНЕР

Поступила 10 сентября 1998
Принята к печати 15 октября 1998

Подробно рассмотрена кинематика процессов рождения и аннигиляции электрон-позитронных пар, т.е. определение и преобразования импульсов и энергий частиц и фотонов при переходе из произвольной системы отсчета в систему центра масс частиц и обратно. Обнаружена возможность неоднозначности длины импульсов частиц в определенных направлениях при рождении пары. Дается интерпретация этой неоднозначности и способ ее обойти. Выявляются инвариантные величины и наиболее удобные переменные для вычисления различных интегралов. Затем приводятся дифференциальные и полные сечения процессов и вычисляются средние частоты и дисперсии частот фотонов, образующихся при аннигиляции.

1. *Введение*. В релятивистских астрофизических объектах, таких, как активные ядра галактик (АЯГ), короны и внутренние области аккреционных дисков вокруг нейтронных звезд и черных дыр, наряду с комптоновским рассеянием большую роль играют процессы, связанные с электрон-позитронными парами. В ходе комптонизации фотоны набирают энергию и становятся способными рождать пары. Последующая их аннигиляция порождает каскадные переходы фотонов в частицы и обратно. Эти процессы учитываются при расчетах моделей АЯГ [1-3] и дисков [4,5], а также интерпретации наблюдений гамма-всплесков [3] и компактных рентгеновских источников [6], в спектрах которых обнаружена аннигиляционная деталь.

Двухфотонные процессы рождения и аннигиляции пар изучались в работах [7-9]. Выражения для излучательной способности электрон-позитронного газа и для коэффициента поглощения при рождении пар были получены в статьях [10-12], результаты которых широко используются.

Настоящая работа состоит из двух частей. В первой части подробно рассматривается кинематика процессов рождения и аннигиляции электрон-позитронных пар. Приводятся выражения для импульсов фотонов через импульсы частиц при аннигиляции и для импульсов частиц через импульсы фотонов при рождении пары. Эти выражения рассматриваются в произвольной системе отсчета и в системе центра масс частиц. Обнаружена возможность неоднозначности длины импульсов частиц в определенных направлениях при рождении пары. Выясняется причина этой неоднозначности и способ ее обойти. Выявляются инвариантные величины и подходящие переменные для вычисления различных интегралов. Приводятся дифференциальные и полные сечения процессов и вычисляются средние частоты и дисперсии частот фотонов, образующихся при аннигиляции.

Во второй части составлено кинетическое уравнение, описывающее эволюцию спектра фотонов в результате двухфотонных процессов рождения и аннигиляции электрон-позитронных пар. Газы фотонов и частиц могут быть вырождены, так что в уравнение включены вынужденные процессы.

Отличие этой работы от указанных работ Р.Свенсона заключается в том, что в ней более подробно рассмотрена кинематика процессов, в частности, описаны базисы систем отсчета и преобразования импульсов при переходе из одной системы в другую, вычислены средние частоты излучаемых при аннигиляции фотонов, учитываются вынужденные процессы (во второй части), а также в том, что результаты представлены в форме, аналогичной той, которая использовалась в наших работах, посвященных комптоновскому рассеянию (см. обзор [13]).

Для краткости в первой части нами применяются только безразмерные обозначения, близкие к применявшимся в упомянутых статьях о комптоновском рассеянии. Многие величины обозначаются теми же буквами, однако некоторые обозначения относятся не к тем же, а к аналогичным величинам. Используется система единиц, в которой постоянная Планка $\hbar$, масса электрона m и скорость света c равны единице.

2. *Обозначения и законы сохранения.* В этом разделе приведем формулы и соотношения, общие для обоих двухфотонных процессов: аннигиляции и рождения электрон-позитронной пары.

Обозначим импульс электрона или позитрона (которые будем называть для определенности частицами) в произвольной системе отсчета через $mc\bar{z}$, а соответствующий четырехмерный вектор через $\underline{z} = \{\gamma, \bar{z}\}$, $\bar{z} = z\bar{\Omega}$, причем $z = |\bar{z}| \geq 0$. Импульс фотона будем обозначать $mc\bar{x} = mcx\bar{\omega}$, $|\bar{\omega}| = 1$, а его четырехмерный импульс $\underline{x} = \{x, \bar{x}\}$.

Для различения характеристик электронов и позитронов будем снабжать все величины, характеризующие их, индексами $\mp$ в соответствии со знаком их заряда, например, $\underline{z}_{\mp}$. Что касается участвующих в реакциях фотонов, то они равноправны, но за одним из них мы будем следить, т.е. для него будет формулироваться кинетическое уравнение и т.п. Его будем называть основным и приводить его характеристики без числовых индексов. Все величины, относящиеся ко второму фотону, будем отмечать снизу индексом 1.

Введем безразмерные обозначения для сумм импульсов и для скалярных произведений

$$\underline{s} = \{s_0, \bar{s}\} = \underline{z}_+ + \underline{z}_- = \{\gamma_+ + \gamma_-, \bar{z}_+ + \bar{z}_-\}, \ \underline{x}\underline{x}_1 = q, \ \underline{z}_-\underline{x} = \xi, \ \underline{z}_-\underline{x}_1 = \xi_1. \quad (1)$$

Обозначим также косинусы углов между направлениями импульсов частиц и импульсов фотонов: $\zeta = \bar{\Omega}_+\bar{\Omega}_-$, $\mu = \bar{\omega}\bar{\omega}_1$. Тогда $\bar{z}_+\bar{z}_- = z_+z_-\zeta$, $\bar{x}\bar{x}_1 = xx_1\mu$, $q = xx_1(1-\mu)$.

При рождении пары электрон-позитрон двумя фотонами и при обратном процессе - двухфотонной аннигиляции - выполняются законы сохранения энергии и импульса. В принятых обозначениях законы сохранения выглядят так:

$$\underline{z}_+ + \underline{z}_- = \underline{x} + \underline{x}_1 = \underline{s}, \ \gamma_+ + \gamma_- = x + x_1 = s_0, \ z_+\bar{\Omega}_+ + z_-\bar{\Omega}_- = x\bar{\omega} + x_1\bar{\omega}_1 = \bar{s}, \quad (2)$$

а следствия из законов сохранения запишутся в виде

$$\begin{gathered} s_0^2 - s^2 = 2q, \underline{z}_+\underline{s} = \underline{z}_-\underline{s} = \underline{x}\underline{s} = \underline{x}_1\underline{s} = \xi + \xi_1 = q, \\ \underline{z}_-\underline{x} = \underline{z}_+\underline{x}_1 = \xi, \ \underline{z}_-\bar{x}_1 = \underline{z}_+\underline{x} = \xi_1, \end{gathered} \quad (3)$$

$$s^2 = x^2 + x_1^2 + 2xx_1\mu = z_-^2 + z_+^2 + 2z_-z_-\zeta, \ \underline{z}_+\underline{z}_- = \gamma_+\gamma_- - z_+z_-\zeta = q - 1. \quad (4)$$

Из первого соотношения в (3) вытекает условие, которое накладывается на значения параметров s_0 и q:

$$s^2 = s_0^2 - 2q \geq 0, \quad s_0 \geq \sqrt{2q}. \quad (5)$$

Значения $s = 0$, $s_0 = \sqrt{2q}$ отвечают системе центра масс.

3. ***Импульсы при аннигиляции***. Перейдем к рассмотрению процесса аннигиляции, т.е. будем считать заданными импульсы частиц.

Построим в выбранной системе отсчета ортонормированный базис, приняв за направление оси аппликат $\vec{e}_3$ вектор $\bar{s}$. В качестве направления второго орта возьмем векторное произведение $\bar{\Omega}_+ \times \bar{\Omega}_-$, так что ось ординат будет ортогональна векторам $\bar{\Omega}_+$ и $\bar{\Omega}_-$ (и тем самым векторам $\bar{s}$ и $\vec{e}_3$). Ось абсцисс направлена по проекции импульса электрона на плоскость, перпендикулярную $\bar{s}$. Таким образом, орты базиса выражаются через характеристики частиц и, следовательно, будут основными при описании процесса аннигиляции:

$$\begin{gathered} \vec{e}_1^{\,p} = \frac{1}{s\sqrt{1-\zeta^2}}\left[(z_+ + z_-\zeta)\bar{\Omega}_- - (z_- + z_+\zeta)\bar{\Omega}_+\right], \\ \vec{e}_2^{\,p} = \frac{\bar{\Omega}_+ \times \bar{\Omega}_-}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \vec{e}_3^{\,p} = \vec{e}_3 = \frac{\bar{s}}{s} = \frac{z_+\bar{\Omega}_+ + z_-\bar{\Omega}_-}{s}. \end{gathered} \quad (6)$$

При таком определении базиса

$$\bar{\Omega}_\pm = \frac{1}{s}\left[(z_\pm + z_\mp\zeta)\vec{e}_3 \mp z_\mp\sqrt{1-\zeta^2}\,\vec{e}_1^{\,p}\right]. \quad (7)$$

Получим теперь соотношения, связывающие импульсы фотонов с импульсами частиц с массой. Напомним, что при аннигиляции заданными величинами являются $\vec{z}_{\pm}$ и, следовательно, $z_{\pm}, \gamma_{\pm}, \vec{\Omega}_{\pm}, \zeta, \vec{s}, s_0$, а также величина q и орты базиса (6). Поскольку законов сохранения 4, а параметров излучаемых фотонов 6, то независимыми из них являются только 2. Удобно выбрать в качестве этих независимых параметров два полярных угла, характеризующих направление одного из фотонов, а именно, того, который мы назвали условно основным и не отмечаем относящиеся к нему величины никакими числовыми индексами. Положим ($0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$)

$$\vec{\omega} = \sin\theta\left(\cos\varphi\, \vec{e}_1^{\,p} + \sin\varphi\, \vec{e}_2^{\,p}\right) + \cos\theta\, \vec{e}_3. \tag{8}$$

Величина импульса (т.е. частота) основного фотона может быть найдена из второго соотношения в (3):

$$x = \frac{q}{s_0 - s\cos\theta}. \tag{9}$$

Частота второго фотона находится сразу же из закона сохранения энергии:

$$x_1 = s_0 - x = \frac{s^2 + q - ss_0\cos\theta.}{s_0 - s\cos\theta} = \frac{s_0^2 + s^2 - 2ss_0\cos\theta.}{2\left(s_0 - s\cos\theta\right)}. \tag{10}$$

Из закона сохранения импульса находим и направление второго фотона

$$\vec{\omega}_1 = \frac{\vec{s} - x\vec{\omega}}{x_1} = \frac{\left(s_0 - s\cos\theta\right)\vec{s} - q\vec{\omega}}{s^2 + q - s\, s_0\cos\theta}. \tag{11}$$

Отсюда для угла между фотонами получается

$$1 + \mu = \frac{2s^2\sin^2\theta}{s_0^2 + s^2 - 2ss_0\cos\theta}, \qquad 1 - \mu = 2\frac{\left(s_0 - s\cos\theta\right)^2}{s_0^2 + s^2 - 2ss_0\cos\theta}. \tag{12}$$

Из этих формул можно легко получить выражения для μ и $\sqrt{1-\mu^2}$.

Получим еще границы для частот излучения фотонов и угла между ними. Из (9), (10) и первого равенства в (3) следует, что частоты их заключены между $(s_0 - s)/2$ и $(s_0 + s)/2$. Косинус μ заключен между -1 и максимальным значением $-1 + 2s^2/s_0^2 = \left(s^2 - 2q\right)/\left(s^2 + 2q\right)$. Последнее утверждение вытекает из того, что неотрицательная величина $1+\mu$ как функция θ согласно (12) равна 0 при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, а при $\cos\theta = s/s_0 < 1$ имеет максимум, равный $2s^2/s_0^2$. При формальной подстановке $s = s_0$ (что невозможно) оказывается $\mu = \cos\theta$ и эта функция максимума не имеет.

4. *Аннигиляция в системе центра масс.* Перейдем в систему центра масс электрона и позитрона. Для этого совершим преобразование Лоренца с безразмерной (в единицах скорости света c) скоростью $\vec{s}/s_0$. Соответствующий лоренцевский множитель $s_0/\sqrt{2q}$.

Энергии электрона и позитрона в этой системе равны между собой, а преобразованные пространственные составляющие импульсов частиц равны по модулю и противоположно направлены. Импульсы фотонов в системе центра масс имеют те же свойства, что и импульсы участвующих в реакциях частиц: частоты фотонов равны и инвариантны, а направления их импульсов противоположны.

Так как преобразование Лоренца к системе центра масс совершается в направлении одного из ортов базиса (6), то в этой системе все три орта этого базиса останутся неизменными. Запишем векторы импульсов реагирующих частиц в системе центра масс в безразмерных обозначениях в виде разложений по базису (6).

Для частиц с массой, характеристики которых заданы, получается

$$\underline{z}^c_\pm = \left\{\gamma, \mp z\bar{\Omega}_c\right\}, \quad \bar{\Omega}_c = \sin\varepsilon_p\, \bar{e}_1^p + \cos\varepsilon_p\, \bar{e}_3, \tag{13}$$

где $\gamma = \sqrt{q/2}$, $z = \sqrt{\gamma^2 - 1} = \sqrt{(q-2)/2}$, а угол ε_p определяется через

$$\cos\varepsilon_p = \frac{\gamma}{z}\cdot\frac{\gamma_- - \gamma_+}{s}, \quad \sin\varepsilon_p = \frac{z_+ z_- \sqrt{1-\zeta^2}}{zs}. \tag{14}$$

Для фотонов определяем вектор $\bar{\omega}_c$

$$\underline{x}^c = \gamma\left\{1, \bar{\omega}_c\right\}, \quad \underline{x}_1^c = \gamma\left\{1, -\bar{\omega}_c\right\}. \tag{15}$$

Пусть этот вектор в принятом базисе имеет зенитный угол θ_c. Ввиду неизменности ортов базиса азимутальные углы в обеих системах отсчета совпадают, а зенитные преобразуются согласно законам аберрации:

$$\sin\theta_c = \frac{\sqrt{s_0^2 - s^2}}{s_0 - s\cos\theta}\sin\theta, \quad \cos\theta_c = \frac{s_0\cos\theta - s}{s_0 - s\cos\theta}. \tag{16}$$

Обратные формулы получаются заменами $\theta \leftrightarrow \theta_c$ и $s \to -s$. Через косинус указанного угла выражаются и частоты фотонов в исходной системе отсчета (эффект Доплера):

$$x = \frac{s_0 + s\cos\theta_c}{2}, \quad x_1 = \frac{s_0 - s\cos\theta_c}{2}. \tag{17}$$

Теперь выберем другой, более удобный для последующего базис, у которого орт ординат тот же, что и у (6), а два других орта повернуты относительно (6) на угол ε_p так, чтобы третий орт был направлен по $\bar{\Omega}_c$, т.е. сделаем преобразование поворота

$$\bar{e}_1^c = \cos\varepsilon_p\, \bar{e}_1^p - \sin\varepsilon_p\, \bar{e}_3, \quad \bar{e}_2^c = \bar{e}_2^p, \quad \bar{e}_3^c = \bar{\Omega}_c = \sin\varepsilon_p\, \bar{e}_1^p + \cos\varepsilon_p\, \bar{e}_3. \tag{18}$$

Этот новый базис назовем аннигиляционным. В нем орт направления основного фотона $\bar{\omega}_c$ зададим углами $\arccos\eta$, ψ, которые являются инвариантными переменными. Новые углы связаны со старыми в той же системе отсчета формулами, следующими из (18):

$$\sin\theta_c\cos\varphi = \eta\sin\varepsilon_p + \sqrt{1-\eta^2}\cos\varepsilon_p\cos\psi, \quad \sin\theta_c\sin\varphi = \sqrt{1-\eta^2}\sin\psi, \tag{19}$$

$$\cos\theta_c = \eta\cos\varepsilon_p - \sqrt{1-\eta^2}\sin\varepsilon_p\cos\psi. \tag{20}$$

Здесь для получения обратных формул кроме замен полярных координат требуется произвести замену $\varepsilon_p \to -\varepsilon_p$. В частности,

$$\eta = \cos\theta_c \cos\varepsilon_p + \sin\theta_c \sin\varepsilon_p \cos\varphi. \tag{21}$$

Связь угловых переменных θ, φ и η, ψ легко получить путем комбинирования формул (16) и (19)-(20):

$$\sin\theta\cos\varphi = \frac{\gamma}{x}\left[\eta\sin\varepsilon_p + \sqrt{1-\eta^2}\cos\varepsilon_p\cos\psi\right],$$

$$\sin\theta\sin\varphi = \frac{\gamma}{x}\sqrt{1-\eta^2}\sin\psi, \quad \cos\theta = \frac{s + s_0\cos\theta_c}{s_0 + s\cos\theta_c}, \tag{22}$$

где $\cos\theta_c$ дается формулой (20). Обратные формулы получаются заменой $\varepsilon_p \to -\varepsilon_p$.

Введение нового (аннигиляционного) базиса потребовалось потому, что в нем получаются простые выражения в системе центра масс не только для импульсов частиц с массой $z_\pm = \{\gamma, \mp z\bar{e}_3^c\}$, но и для скалярных произведений импульсов фотонов и частиц в этой системе

$$\xi = \gamma(\gamma - z\eta), \quad \xi_1 = \gamma(\gamma + z\eta). \tag{23}$$

Заметим, что в случае фотонов инвариантны как само отношение $d^3x/x = xdxd^2\omega$, так и его части, а именно dx/x и элемент поверхности на сфере радиуса x, т.е. $x^2d^2\omega$. Этот инвариант $x^2d^2\omega = x^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ при переходе в систему центра масс преобразуется в $\gamma^2\sin\theta_c d\theta_c d\varphi$. В свою очередь в аннигиляционном базисе этот элемент приобретает вид $\gamma^2 d\eta d\psi$. В этом выражении от переменной η можно перейти к переменной ξ, так как $d\xi = -\gamma z d\eta$. Таким образом, элемент площади на сфере радиуса, равного импульсу основного фотона, может быть представлен в инвариантных координатах ξ (или η) и ψ в виде $\gamma^2 d\eta d\psi$ или $d\psi d\xi/\beta$, где $\beta = z/\gamma$ - безразмерная скорость частиц в системе центра масс.

Через инвариантные координаты η и ψ у нас выражены частоты фотонов (формулы (17)) и их направления (формулы (22)), так как входящий туда $\cos\theta_c$ дается формулой (20). В свою очередь величины η и $\sqrt{1-\eta^2} \geq 0$ можно выразить через ξ с помощью (23):

$$\eta = \frac{\gamma^2 - \xi}{\gamma z}, \quad \sqrt{1-\eta^2} = \frac{\sqrt{2\gamma^2\xi - \xi^2 - \gamma^2}}{\gamma z} = \frac{1}{\gamma z}\sqrt{(\gamma^2 + \gamma z - \xi)(\xi - \gamma^2 + \gamma z)}. \tag{24}$$

Переменная η и угол ψ принимают значения из промежутков $[-1,1]$ и $[0,2\pi]$ соответственно, как сферические координаты. Из формулы (23) (или из второго равенства в (24)) следует, что величина ξ лежит в промежутке, задаваемом неравенствами

$$\gamma(\gamma - z) = \frac{1}{1+\beta} \leq \xi \leq \gamma(\gamma + z) = \frac{1}{1-\beta}. \tag{25}$$

Тот же промежуток изменения и у $\xi_1 = q - \xi$.

5. ***Импульсы частиц при рождении пары***. Теперь перейдем к рассмотрению геометрии процесса рождения пары, когда заданы

характеристики фотонов. Построим в исходной системе отсчета (той же, что и раньше) другой ортонормированный базис, ось аппликат которого по-прежнему совпадает с осью аппликат базиса (6), т.е. вектором $\vec{e}_3$. Два перпендикулярных к нему орта построим на векторах направлений фотонов, рождающих пару, так что

$$\vec{e}_1^{\,ph} = \frac{1}{s\sqrt{1-\mu^2}}\left[(x_1 + x\,\mu)\vec{\omega} - (x + x_1\,\mu)\vec{\omega}_1\right],$$

$$\vec{e}_2^{\,ph} = \frac{\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad \vec{e}_3^{\,ph} = \vec{e}_3 = \frac{\vec{s}}{s} = \frac{x\,\vec{\omega} + x_1\,\vec{\omega}_1}{s}, \tag{26}$$

Орты выбраны так, чтобы было

$$\vec{\omega} = \cos\theta\,\vec{e}_3 + \sin\theta\,\vec{e}_1^{\,ph}, \quad \cos\theta = \frac{x + x_1\,\mu}{s}, \quad \sin\theta = \frac{x_1}{s}\sqrt{1-\mu^2}, \tag{27}$$

то есть угол θ по-существу тот же, что и в (8). Легко убедиться, что между двумя ортами базисов (6) и (26), имеющими общий орт $\vec{e}_3$, выполняются соотношения

$$\vec{e}_1^{\,ph} = \cos\varphi\,\vec{e}_1^{\,p} + \sin\varphi\,\vec{e}_2^{\,p}, \qquad \vec{e}_2^{\,ph} = -\sin\varphi\,\vec{e}_1^{\,p} + \cos\varphi\,\vec{e}_2^{\,p}. \tag{28}$$

Перепишем соотношения, связывающие импульсы частиц между собой и с импульсами фотонов, применительно к рождению частиц. При рождении пар заданными величинами являются $\vec{x}$, $\vec{x}_1$ и, следовательно, x, x_1, $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_1$, μ, $\vec{s}$, s_0, а также величина q и орты базиса (26) $\vec{e}_j^{\,ph}$. Величины $\vec{s}$, s_0 и q в этом случае выражаются через фотонные характеристики.

Наличие 4 законов сохранения приводит к тому, что как и при аннигиляции, независимыми остаются 2 параметра из характеристик рождающихся частиц. Попробуем, как и для фотонов при аннигиляции, выбрать в качестве независимых параметров два угла, определяющих направление одной из частиц с массой, например, электрона. Положим в фотонном базисе (26)

$$\vec{\Omega}_- = \sin\theta_-\left(\cos\varphi_-\,\vec{e}_1^{\,ph} + \sin\varphi_-\,\vec{e}_2^{\,ph}\right) + \cos\theta_-\,\vec{e}_3. \tag{29}$$

Энергия и импульс электрона могут быть найдены из второго соотношения в (3), которое можно записать в виде

$$s_0\,\gamma_- - s z_-\cos\theta_- = q. \tag{30}$$

Возведя его в квадрат двумя способами, найдем два уравнения для определения соответственно γ_- и z_-:

$$\left(s_0^2 - s^2\cos^2\theta_-\right)\gamma_-^2 - 2\,s_0 q\,\gamma_- + q^2 + s^2\cos^2\theta_- = 0,$$

$$\left(s_0^2 - s^2\cos^2\theta_-\right)z_-^2 - 2\,sq\cos\theta_-\,z_- - q^2 - s_0^2 = 0. \tag{31}$$

Из первого уравнения в (31) находим

$$\gamma_-^{\pm}(\cos\theta_-) = \frac{qs_0 \pm s\cos\theta_-\,r}{s_0^2 - s^2\cos^2\theta_-}, \tag{32}$$

где

$$r = \sqrt{q^2 - 2q - s^2 \sin^2\theta_-} = \sqrt{q^2 - s_0^2 + s^2\cos^2\theta_-}. \tag{33}$$

Всегда $\gamma_-(\cos\theta_-) > 1$, так как соответствующее решение второго уравнения в (31)

$$z_-^{\pm}(\cos\theta_-) = \frac{qs\cos\theta_- \pm s_0 r}{s_0^2 - s^2\cos^2\theta_-} \tag{34}$$

и $\gamma_-^2(\cos\theta_-) = 1 + z_-^2(\cos\theta_-)$ при обоих знаках. Прямой подстановкой проверяется, что при обоих (соответствующих, т.е. верхних или нижних) знаках формулы (32) и (34) дают решение и исходного уравнения (30). Легко проверить также, что $r = \pm\left(q\gamma_-^{\pm} - s_0\right)/z_-^{\pm}$.

Величина энергии позитрона находится из закона сохранения энергии: $\gamma_+ = s_0 - \gamma_-$. Из сохранения импульса находим и направление импульса позитрона $\bar{\Omega}_+ = \left(\bar{s} - z_-\bar{\Omega}_-\right)/z_+$. Поскольку каждая из величин γ_- и z_- принимает по два значения, то и импульсов позитрона получится два.

Не при всех значениях импульсов начальных фотонов и угла θ_- возможно рождение пары. Из приведенных формул следуют ограничения на значения $s_0 = x + x_1$, $q = xx_1(1-\mu)$ и $\cos\theta_-$. Рассмотрим их, а также обсудим неоднозначность импульсов частиц.

6. *Неоднозначность и ее устранение.* Под корнем в (33) должна быть неотрицательная величина. Поэтому при $q \ge s_0$ значения угла θ_- могут быть произвольными. Если же $q < s_0$, то для положительности подкоренного выражения требуется, чтобы было $\sin\theta_- < \sqrt{q^2 - 2q}/s$ (или $|\cos\theta_-| > \sqrt{s_0^2 - q^2}/s$).

Условие $z_- \ge 0$ накладывает ограничения на значения угла θ_- и выбор знака в последних формулах. Если $q \ge s_0$, то $s_0 r > qs|\cos\theta_-|$ и надо в формулах (32) и (34) брать только +. Если $q < s_0$, то корень меньше $qs|\cos\theta_-|$ и можно брать оба знака, но считать при этом $\cos\theta_- > 0$, а точнее $\cos\theta_- \ge \sqrt{s_0^2 - q^2}/s$.

Проследим поведение неоднозначности решения при изменении параметров, ограничившись значениями $\cos\theta_- \ge 0$, так как функции (34) обладают центральной симметрией относительно точки $\cos\theta_- = 0$, т.е. симметричные точки получаются при изменении знака $\cos\theta_-$ с одновременным изменением верхнего индекса. Начнем со значений

$$z_-^{\pm}(1) = \frac{\sqrt{s_0^2 - 2q}\sqrt{q} \pm s_0\sqrt{q-2}}{2\sqrt{q}}, \quad \gamma_-^{\pm}(1) = \frac{s_0 \pm \sqrt{s_0^2 - 2q}\sqrt{1 - 2/q}}{2}. \tag{35}$$

Посмотрим, как величины $z_-^{\pm}(1)$ зависят от s_0. Значение с верхним индексом + положительно при всех возможных значениях $s_0 \ge \sqrt{2q}$. При верхнем индексе - величина отрицательна при изменении s_0 от наименьшего возможного значения $s_0 = \sqrt{2q}$ до $s_0 = q$. Оба значения строго возрастают при росте s_0. При больших s_0 этот рост почти линеен.

При граничном значении $\cos\theta_- = \sqrt{s_0^2 - q^2}/s$, где $s_0 \ge q$, величины с обоими знаками совпадают, так как при этом $r = 0$:

$$z_-^\pm\left(\sqrt{s_0^2 - q^2}/s\right) = \sqrt{s_0^2 - q^2}/q, \quad \gamma_-^\pm\left(\sqrt{s_0^2 - q^2}/s\right) = s_0/q. \qquad (36)$$

Общее значение $z_-^\pm\left(\sqrt{s_0^2 - q^2}/s\right)$ также растет с ростом s_0 и почти линейно при больших s_0 (величины $\gamma_-^\pm\left(\sqrt{s_0^2 - q^2}/s\right)$ просто пропорциональны s_0).

Легко доказать двойное неравенство $z_-^+(1) > z_-^\pm\left(\sqrt{s_0^2 - q^2}/s\right) \ge z_-^-(1)$, т.е.

$$\frac{\sqrt{s_0^2 - 2q}\sqrt{q} + s_0\sqrt{q-2}}{2\sqrt{q}}\, s > \frac{\sqrt{s_0^2 - q^2}}{q} \ge \frac{\sqrt{s_0^2 - 2q}\sqrt{q} - s_0\sqrt{q-2}}{2\sqrt{q}}. \qquad (37)$$

Первая его часть строгая, во второй же части равенство достигается только при $s_0 = q$. Простые преобразования, а именно, умножение первой части на $2q$, а второй на $q\left(q\sqrt{s_0^2 - 2q} + s_0\sqrt{q(q-2)}\right)\Big/\sqrt{s_0^2 - q^2}$ приводят к двум неравенствам

$$q\sqrt{s_0^2 - 2q} + s_0\sqrt{q(q-2)} > 2\sqrt{s_0^2 - q^2}, \quad q\sqrt{s_0^2 - 2q} + s_0\sqrt{q(q-2)} > q\sqrt{s_0^2 - q^2}. \qquad (38)$$

Знак равенства выпал ввиду того, что делитель $\sqrt{s_0^2 - q^2}$ обращается в нуль при $s_0 = q$. Второе неравенство более сильное, так как $q \ge 2$, и мы докажем его. Простое возведение в квадрат приводит к

$$2q\, s_0\sqrt{s_0^2 - 2q}\,\sqrt{q(q-2)} > -q\left(s_0^2 + q^2\right)(q-2), \qquad (39)$$

что очевидно.

Еще одно характерное значение, при $\cos\theta_- = 0$ возможно только при знаке + и $s_0 \le q$. При этом $z_-^+(0) = \sqrt{q^2 - s_0^2}/s_0$, а $\gamma_-^+(0) = q/s_0$. Здесь s_0 может меняться от $\sqrt{2q}$ до q, а значение $z_-^+(0)$ от $\sqrt{(q-2)/2}$ до 0 ($\gamma_-^+(0)$ от $\sqrt{q/2}$ до 1).

Таким образом, если $q \le s_0$, две ветви $z_-^\pm(\cos\theta_-)$ составляют одну кривую, представляющую $\cos\theta_-$ как однозначную функцию от z_-, формула для которой находится из (30). Косинус равен 1 при $z_- = z_-^-(1)$, убывает до $\sqrt{s_0^2 - q^2}/s$ при $z_- = z_-^\pm\left(\sqrt{s_0^2 - q^2}/s\right)$ и снова растет до 1 при $z_- = z_-^+(1)$. Когда $q = s_0$, вся ветвь $z_-^- = 0$ тождественна при $\cos\theta_- \ge 0$. Ввиду центральной симметрии при этом тождественным нулем является ветвь z_-^+ при $\cos\theta_- \le 0$.

Если оказывается $q > s_0$, то ветви перегруппируются: ветвь z_-^+ вся (при всех $\cos\theta_-$) становится положительной, а вся ветвь z_-^- - отрицательной. При этом $z_-^+(-1) < z_-^+(0) < z_-^+(1)$ или

$$\frac{s_0\sqrt{q^2 - 2q} - q\sqrt{s_0^2 - 2q}}{2q} < \frac{\sqrt{q^2 - s_0^2}}{s_0} < \frac{s_0\sqrt{q^2 - 2q} + q\sqrt{s_0^2 - 2q}}{2q}. \qquad (40)$$

Неравенства доказываются после умножения левого на

$s_0\left(s_0\sqrt{q^2-2q}+q\sqrt{s_0^2-2q}\right)$, которое получается более сильным, чем правое. Преобразованное левое надо возвести в квадрат. В рассматриваемом случае ($q>s_0$) при изменении z_- от $z_-^+(-1)$ до $z_-^+(1)$ косинус изменяется от -1 до 1.

Итак, можно утверждать, что в общем случае при изменении величины z_- в отрезке

$$\left[\left|s_0\sqrt{q^2-2q}-q\sqrt{s_0^2-2q}\right|\Big/2q,\ \left(s_0\sqrt{q^2-2q}+q\sqrt{s_0^2-2q}\right)\Big/2q\right] \tag{41}$$

$\cos\theta_-$ является однозначной функцией z_- и определяется формулой

$$\cos\theta_- = \frac{s_0\gamma_- - q}{z_- s}. \tag{42}$$

Ввиду этого при описании рождения пары мы будем задавать именно длину импульса, например, электрона z_-, взяв ее величину из промежутка (41). По ней найдем энергии электрона γ_- и позитрона $\gamma_+ = s_0 - \gamma_-$, после этого последовательно находим $z_+, \cos\theta_-, \sin\theta_- \geq 0$, а также величину ζ из последнего равенства в (3). Затем можно найти угловые характеристики позитрона из соотношений

$$z_-\cos\theta_- + z_+\cos\theta_+ = s, \quad z_-\sin\theta_- = z_+\sin\theta_+, \tag{43}$$

являющихся следствием специального выбора базиса. Получающиеся формулы находятся в согласии с (7).

7. *Рождение пары в системе центра масс.* Запишем векторы импульсов реагирующих частиц в системе центра масс в виде разложений по базису (26). Как и у базиса (6), орты базиса (26) при переходе в систему центра инерции останутся неизменными. Таким образом, для фотонов получаются прежние формулы (15), где $\vec{\omega}_c = \sin\theta_c\,\vec{e}_1^{\,ph} + \cos\theta_c\,\vec{e}_3$, а угол θ_c на этот раз определяется через функции

$$\cos\theta_c = \frac{x - x_1}{s}, \quad \sin\theta_c = \frac{xx_1\sqrt{1-\mu^2}}{\gamma s}, \tag{44}$$

что согласуется с формулами (9), (10), (12), (16) и (17).

Что касается частиц, то неоднозначность значений длин их импульсов приводит к неоднозначности и их направлений в системе центра масс при одинаковой энергии γ. При заданном же в качестве основной величины z_- для частиц получается прежняя формула (13) с тем же вектором $\vec{\Omega}_c$. В принятом базисе (26) полярный угол совпадает с ε_p, определяемым формулой (14), где характеристики частиц находятся, как это описано в предыдущем разделе. Азимут можно выбрать тот же, что и в (29), то есть

$$\vec{\Omega}_c = \sin\varepsilon_p\left(\cos\varphi_-\,\vec{e}_1^{\,ph} + \sin\varphi_-\,\vec{e}_2^{\,ph}\right) + \cos\varepsilon_p\,\vec{e}_3. \tag{45}$$

Впрочем, согласно (13), в скобке в (45) стоит вектор $\vec{e}_1^{\,p}$, так что можно положить $\varphi_- = -\varphi$, как было бы в формулах, обратных по отношению к (28). Угол ε_p связан с θ_- формулами, подобными формулам аберрации (16):

$$\sin\varepsilon_p = \frac{z_-}{z}\sin\theta_- \qquad \cos\varepsilon_p = \frac{s_0 z_-\cos\theta_- - s\gamma_-}{2z\gamma}. \tag{46}$$

Как и для случая аннигиляции, введем базис, у которого орт ординат тот же, что и у (26), а два других орта повернуты относительно (26) на угол θ_c так, чтобы третий орт был направлен по $\vec{x}^c$:

$$\vec{e}_1^{\,0} = \cos\theta_c\,\vec{e}_1^{\,\mathrm{ph}} - \sin\theta_c\,\vec{e}_3, \quad \vec{e}_2^{\,0} = \vec{e}_2^{\,\mathrm{ph}}, \quad \vec{e}_3^{\,0} = \vec{\omega}_c = \sin\theta_c\,\vec{e}_1^{\,\mathrm{ph}} + \cos\theta_c\,\vec{e}_3. \tag{47}$$

Зададим $\vec{\Omega}_c$ в этом базисе. Так как третий орт его совпадает с $\vec{\omega}_c$, то косинусом полярного угла будет η, так что

$$\vec{\Omega}_c = \sqrt{1-\eta^2}\left(\cos\varphi_0\,\vec{e}_1^{\,0} + \sin\varphi_0\,\vec{e}_2^{\,0}\right) + \eta\,\vec{e}_3^{\,0}. \tag{48}$$

Новые и старые углы в той же системе отсчета связаны формулами, следующими из (47):

$$\sin\varepsilon_p\cos\varphi = \eta\sin\theta_c + \sqrt{1-\eta^2}\cos\theta_c\cos\varphi_0, \quad \sin\varepsilon_p\sin\varphi = -\sqrt{1-\eta^2}\sin\varphi_0, \tag{49}$$

$$\cos\varepsilon_p = \eta\cos\theta_c - \sqrt{1-\eta^2}\sin\theta_c\cos\varphi_0. \tag{50}$$

Приравняв проекции $\vec{\Omega}_c$ на орты базиса (26), получим связь углов двух сферических систем. Эти формулы являются комбинациями (49) с (46) и выглядят аналогично (22). Обратные формулы получаются при замене $\theta_c \to -\theta_c$. Для косинуса η получается прежнее выражение (21). Скалярные произведения импульсов фотонов и частиц в этой системе снова даются формулами (23).

Заметим, что инвариантами преобразования Лоренца, как известно, являются элементы импульсных пространств частиц, деленные на энергии. В безразмерных обозначениях это дроби $d^3z_\pm/\gamma_\pm = z_\pm^2 dz_\pm d^2\Omega_\pm/\gamma_\pm$. Однако их части, т.е. сомножители, относящиеся к различным переменным, инвариантами не являются, в отличие от случая фотонов. Прямой выкладкой проверяется, что при выполнении законов сохранения инвариантом преобразования Лоренца является дробь $z_-^2 d^2\Omega_-/r$, которая при переходе в систему центра масс преобразуется в $(\beta/2)d\eta\, d\varphi_0 = -d\xi\, d\varphi_0/(2\gamma^2)$.

Из-за неоднозначности длин импульсов при фиксированном направлении рождающегося электрона вместо угла θ_-, как показано выше, целесообразно использовать z_- (или γ_-), а угол считать его функцией в соответствии с (42). Тогда $\sin\theta_-\, d\theta_- = (s_0 - q\gamma_-)dz_-/sz_-^2\gamma_- = \mp r dz_-/sz_-\gamma_-$, где знак берется в соответствии со знаком скобки (корень r положителен). Поэтому вместо инвариантного элемента $z_-^2 d^2\Omega_-/r = z_-^2\sin\theta_-\, d\theta_-\, d\varphi/r$ следует применять элемент $z_- dz_-\, d\varphi/s\gamma_- = d\gamma_-\, d\varphi/s$, также инвариантный. В свою очередь, при переходе в систему центра масс вместо z_- появится угол ε_p, связанный с γ_- согласно (14) формулой $\cos\varepsilon_p =$

$=\gamma(2\gamma_- - s_0)/zs$. Отсюда следует, что $d\gamma_- = -sz\sin\varepsilon_p\,d\varepsilon_p/2\gamma = (s\beta/2)\times$ $\times\sin\varepsilon_p\,d\varepsilon_p$ и инвариантный элемент с этим углом превратится в $(\beta/2)\sin\varepsilon_p\,d\varepsilon_p\,d\varphi$. Наконец, при переходе к переменным η и φ_0 наш элемент запишется в виде $(\beta/2)d\eta\,d\varphi_0$.

В следующих разделах рассмотрим вероятностные характеристики процессов аннигиляции и рождения пар и найдем средние частоты и дисперсии частот аннигиляционных фотонов.

8. *Дифференциальные и полные сечения процессов.* Методами квантовой электродинамики показывается (см. [14]), что инвариантное дифференциальное сечение двухфотонной аннигиляции в произвольной системе отсчета определяется формулой, которую можно записать в альтернативных видах:

$$\sigma_{\rm ann} = \frac{r_e^2}{2}\frac{F}{4\gamma^3 z} = \frac{r_e^2}{2}\frac{\left(1-\beta^2\right)^2}{4\beta}F = \frac{r_e^2}{2}\frac{F}{q^{3/2}\sqrt{q-2}}. \qquad (51)$$

Здесь r_e - классический радиус электрона, симметричная функция двух аргументов

$$F = F(\xi,\xi_1) = \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi} + 2\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\xi_1}\right) - \left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\xi_1}\right)^2, \qquad (52)$$

а инвариантные величины ξ, ξ_1, q, γ, z и β были определены выше. После подстановки в (52) выражений для ξ и ξ_1 из (23) получим выражение F через переменные β и η:

$$F = 2\frac{1-\beta^4\eta^4 + 2\left(1-\beta^2\right)\left(1-\beta^2\eta^2\right) - 2\left(1-\beta^2\right)^2}{\left(1-\beta^2\eta^2\right)^2}. \qquad (53)$$

Полное сечение аннигиляции электрон-позитронной пары определяется формулой

$$\sigma^0_{\rm ann} = \frac{r_e^2}{4}\frac{1}{\upsilon_r \underline{z}_- \underline{z}_+}\int \frac{d^3x}{x}\frac{d^3x_1}{x_1}\delta\left(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1\right)F(\xi,\xi_1). \qquad (54)$$

Здесь безразмерная относительная скорость частиц $\upsilon_r = \sqrt{1 - 1/\left(\underline{z}_-\underline{z}_+\right)^2}$ (см. [15]), так что

$$\upsilon_r \underline{z}_- \underline{z}_+ = \sqrt{\left(\underline{z}_-\underline{z}_+\right)^2 - 1} = \sqrt{(q-1)^2 - 1} = \sqrt{q(q-2)} = 2z\gamma = 2\beta\gamma^2. \qquad (55)$$

Этот множитель учитывает то обстоятельство, что сечение рассчитывается на поток частиц.

Покажем, как вычисляется это сечение. После взятия интеграла по $\vec{x}_1$ преобразование δ-функции производится следующим образом:

$$\delta\left(s_0 - x - |\bar{s} - \bar{x}|\right) = \delta\left(\frac{s_0^2 + x^2 - 2s_0 x - s^2 - x^2 + 2\bar{s}\bar{x}}{2x_1}\right) = x_1\,\delta\left(q - \underline{sx}\right) =$$

$$= x_1\,\delta\left(x\left(s_0 - s\cos\theta\right) - q\right) = \frac{xx_1}{q}\delta\left(x - \frac{q}{s_0 - s\cos\theta}\right) = \frac{xx_1}{2\gamma^2}\delta\left(x - \frac{q}{s_0 - s\cos\theta}\right). \tag{56}$$

Подставив (55) и (56) в (54), выразим полное сечение через дифференциальное (51):

$$\sigma^0_{\text{ann}} = \frac{r_e^2}{2}\frac{1}{8\beta\gamma^4}\int x^2 d^2\omega\, F = \frac{1}{2}\int x^2 d^2\,\omega\sigma_{\text{ann}}. \tag{57}$$

Множитель 1/2 введен для того, чтобы ввиду тождественности аннигиляционных фотонов не учитывать их дважды.

Для нахождения явного выражения для полного сечения аннигиляции (54) удобнее производить интегрирование не по направлениям импульса фотона $\bar{\omega}$, а в инвариантных переменных η и ψ, определенных выше. Для этого надо вместо $x^2 d^2\omega$ подставить $\gamma^2 d\eta d\psi$. Поскольку основной множитель сечения - функция F - от угла ψ не зависит, интеграл по этой переменной можно заменить на 2π.

Таким образом, вычисление полного сечения сводится к нахождению интеграла

$$F_0 = \int_0^1 F d\eta = 2\left[\left(3 - \beta^4\right)a(\beta) - 2 + \beta^2\right], \qquad a(\beta) = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}. \tag{58}$$

В результате получается выражение для полного сечения [14], которое мы представим в виде

$$\sigma^0_{\text{ann}} = \pi r_e^2\, s_{\text{ann}}(\beta), \quad s_{\text{ann}}(\beta) = \frac{1-\beta^2}{4\beta}F_0 = \frac{1-\beta^2}{2\beta}\left[\left(3 - \beta^4\right)a(\beta) - \left(2 - \beta^2\right)\right]. \tag{59}$$

Полное сечение рождения пары определяется аналогично (54) с очевидными заменами характеристик частиц и фотонов:

$$\sigma^0_{\text{bth}} = \frac{r_e^2}{2\underline{xx_1}}\int\frac{d^3 z_-}{\gamma_-}\frac{d^3 z_+}{\gamma_+}\delta\left(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1\right)F(\xi,\xi_1) =$$
$$= \frac{r_e^2}{2q}\int\frac{d^3 z_-}{\gamma_-\gamma_+}\delta\left(\gamma_+ - s_0 + \gamma_-\right)F(\xi,\xi_1). \tag{60}$$

Множитель $\underline{xx_1} = q$ вводится для того, чтобы учесть, что сечение рассчитывается на поток фотонов. Дополнительная двойка в знаменателе не вводится, так как рождаются не тождественные частицы. При переходе к последнему выражению в (60) взят интеграл по $\bar{z}_+$, так что вместо этого вектора надо подставить $\bar{z}_+ = \bar{s} - \bar{z}_- = \bar{x} + \bar{x}_1 - \bar{z}_-$. Стоящее под знаком интеграла в указанном выражении произведение преобразуем следующим образом. Сначала домножим аргумент δ-функции на $\gamma_+ + s_0 - \gamma_- = 2\gamma_+ = 2\sqrt{\left(\bar{s} - \bar{z}_-\right)^2 + 1}$, затем сделаем аргументом ее $\cos\theta_-$:

$$\frac{d^3 z_-}{\gamma_-\gamma_+}\delta\left(\frac{1+s^2+z_-^2-2\overline{s}\overline{z}_- -\gamma_-^2-s_0^2+2s_0\gamma_-}{2\gamma_+}\right)=\frac{d^3 z_-}{\gamma_-}\delta\left(\underline{s}\underline{z}_- - q\right)=\sin\theta_-\,d\theta_-\times$$
$$\times\,d\varphi\frac{z_-^2 dz_-}{\gamma_-}\delta\left(s_0\gamma_- - sz_-\cos\theta_- - q\right)=\sin\theta_-\,d\theta_-\delta\left(\cos\theta_- - \frac{s_0\gamma_- - q}{sz_-}\right)\frac{d\gamma_-}{s}d\varphi. \quad (61)$$

Подставив результат в (60) и взяв интеграл по θ_-, получим

$$\sigma^0_{\rm bth}=\frac{r_e^2}{2qs}\int F d\gamma_-\,d\varphi. \quad (62)$$

Дифференциальное сечение рождения пар определяется так, что оно отличается от (51) на множитель β^2 [14]:

$$\sigma_{\rm bth}=\frac{r_e^2}{8\gamma^4}s\beta z_-\int\frac{d^3 z_+}{\gamma_+}\delta\left(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{s}\right)F\sin\theta_-\,d\theta_- = \frac{r_e^2}{2}\frac{\beta}{4\gamma^4}F=\beta^2\sigma_{\rm ann}. \quad (63)$$

Рассчитывать полное сечение рождения пар заново не надо, так как оно выражается через сечение аннигиляции. Действительно, принимая во внимание (63) и подставляя $d\gamma_-\,d\varphi=\left(s\beta/2\right)d\eta\,d\varphi_0$, получаем из (62) [14]

$$\sigma^0_{\rm bth}=\gamma^2\int\sigma_{\rm bth}\,d\eta\,d\varphi_0=\frac{\pi r_e^2}{4}\frac{\beta}{\gamma^2}\int_{-1}^{1}Fd\eta=2\beta^2\sigma^0_{\rm ann}. \quad (64)$$

9. *Средние степени частоты фотонов*. Определим среднюю степень частоты излучаемого фотона при аннигиляции электрон-позитронной пары равенством

$$\overline{x^l}\,s_{\rm ann}(\beta)=\frac{1}{16\pi\gamma^3 z}\int F x^{l+2}\,d^2\omega. \quad (65)$$

Вычисление проще всего произвести в системе центра масс по углам в системе аннигиляционного базиса, т.е. по η и ψ, заменив элемент площади поверхности безразмерной частоты по формуле $x^2 d^2\omega\to\gamma^2\,d\eta\,d\psi$. При этом надо сделать замены углов, выразив их с помощью (22) и (20) через η и ψ. Через те же переменные выражаются и частоты фотонов согласно (17). Инвариантное сечение процесса (51) тоже является функцией η и не зависит от азимута ψ.

Теперь просто вычисляются интегралы в (65), так как они выражаются через моменты функции F по η. Наряду с (58) нам понадобится еще один интеграл

$$F_2=\int_0^1 F\eta^2\,d\eta=\frac{2}{\beta^2}\left[\left(5-4\beta^2+\beta^4\right)a(\beta)-5+\frac{8}{3}\beta^2\right]. \quad (66)$$

Рассмотрим значения $l=0,1,2$. При $l=0$ находим уже известную формулу $s_{\rm ann}(\beta)=\left(1/4\gamma z\right)F_0$. Величина средней частоты оказывается тривиальной:

$$\overline{x}s_{ann}(\beta)=\frac{1}{16\pi\gamma z}\int_{-1}^{1}Fd\eta\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}\left[s_0+s\left(\cos\varepsilon_p\eta+\sin\varepsilon_p\sqrt{1-\eta^2}\cos\psi\right)\right]d\psi=$$
$$=\frac{s_0}{2}s_{ann}(\beta), \tag{67}$$

т.е. $\overline{x}=\overline{x}_1=s_0/2$, так как аннигиляционные фотоны равноправны.

Средний квадрат частоты

$$\overline{x^2}s_{ann}(\beta)=\frac{1}{16\pi\gamma z}\int_{-1}^{1}Fd\eta\int_{0}^{2\pi}d\psi\frac{1}{4}\left[s_0^2+s^2\left(\cos^2\varepsilon_p\eta^2+\sin^2\varepsilon_p\left(1-\eta^2\right)\cos^2\psi+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2\cos\varepsilon_p\sin\varepsilon_p\eta\sqrt{1-\eta^2}\cos\psi\right)+2s_0s\left(\cos\varepsilon_p\eta+\sin\varepsilon_p\sqrt{1-\eta^2}\cos\psi\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\left[\left(s_0^2+\frac{s^2}{2}\sin^2\varepsilon_p\right)s_{ann}(\beta)+\frac{s^2}{4\gamma z}\left(\cos^2\varepsilon_p-\frac{1}{2}\sin^2\varepsilon_p\right)F_2\right]. \tag{68}$$

Две последние формулы дают возможность найти дисперсию частот аннигиляционных фотонов

$$Dx=Dx_1=\frac{s^2}{8}\left[\sin^2\varepsilon_p+\left(2-3\sin^2\varepsilon_p\right)\frac{F_2}{F_0}\right]. \tag{69}$$

Дисперсия пропорциональна квадрату длины суммы импульсов аннигилирующих частиц. При аннигиляции неподвижных частиц она равна нулю, так как частоты фотонов в этом случае точно равны энергии покоя электрона.

10. *Заключение*. Итак, в первой части работы приведены соотношения между величинами, характеризующими элементарные процессы аннигиляции и рождения пар. В частности, отмечаются переменные, в которых удобно вычислять интегралы, представляющие сечения процессов и средние степени частот фотонов. При этом все переменные частиц и фотонов, которые они имели до взаимодействия, считаются закрепленными. Эти результаты будут использованы во второй части, где мы вслед за формулированием кинетического уравнения получим указанные средние величины после их усреднения по распределениям вовлеченных в процесс частиц и фотонов.

Полученные соотношения позволят также сформулировать кинетическое уравнение, описывающее эволюцию спектра фотонов при многократных аннигиляциях и рождениях пар.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 95-02-05004-а), а также ФНТП "Астрономия" (проект раздела 1.2.6.5.) и ФЦП "Интеграция" проект № 578.

Санкт-Петербургский
государственный университет, Россия

TWO-PHOTON PROCESSES OF ANNIHILATION AND CREATION OF ELECTRON-POSITRON PAIRS. I. KINEMATICS AND CROSS-SECTIONS

D.I.NAGIRNER

Kinematics of two-photon creation and annihilation processes, i.e. definition and transformations of momenta and energies of particles and photons when the transition from arbitrary frame to the center-of-mass frame and back, is considered in detail. The possibility of double values of the particle momenta in some directions when the pair is creating is discovered. The interpretation and the method to avoid this non-uniqueness are given. The invariant and the most convenient for calculation various integrals variables are exposed. Then the differential and full cross-sections of the processes are quoted and the mean annihilation photon frequencies and the dispersion of their frequency are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *F.Takahara*, *M.Kusunose*, Astrophys. Space Sci., **119**, 217, 1986.
2. *R.Svensson*, Astrophys. J. Suppl. Ser., **92**, 585, 1994.
3. *A.Maciolek-Niedzwiecki*, *A.A.Zdziarski*, *P.S.Coppi*, Mon. Notis. Roy. Astron. Soc., **276**, 273, 1995.
4. *B.G.Tritz*, *S.Tsuruta*, Astrophys. J., **340**, 203, 1989.
5. *G.Bjornsson*, *R.Svensson*, Astrophys. J., **394**, 500, 1992.
6. *R.Svensson*, Mon. Notis. Roy. Astron. Soc., **227**, 403, 1987.
7. *A.A.Zdziarski*, Acta Astron., **30**, 371, 1980.
8. *R.Ramaty*, *P.Meszaros*, Astrophys. J., **250**, 384, 1981.
9. *F.A.Aharonian*, *A.Atoyan*, *A.Sunyaev*, Astrophys. Space Sci., **93**, 229, 1983.
10. *R.Svensson*, Astrophys. J., **258**, 321, 1982.
11. *R.Svensson*, Astrophys. J., **258**, 335, 1982.
12. *R.Svensson*, Astrophys. J., **270**, 300, 1983.
13. *D.I.Nagirner*, *J.J.Poutanen*, Astrophys. Space Phys., **9**, 1, 1994.
14. *В.Б.Берестецкий*, *Е.М.Лифшиц*, *Л.П.Питаевский*, Квантовая электродинамика, Наука, М., 1989.
15. *Л.Д.Ландау*, *Е.М.Лифшиц*, Теория поля, Наука, М., 1988.