

М. В. Белубекян, Г. А. Геворкян

Задача дивергенции панели в сверхзвуковом потоке газа при учете поперечных сдвигов

(Представлено чл.-кор. НАН РА Ара С. Аветисяном 1/V 2021)

Ключевые слова: дивергенция панели, прямое обтекание, обратное обтекание, поперечные сдвиги.

Введение. Постановка задачи потери статической устойчивости пластинки-полосы при ее обтекании сверхзвуковым потоком газа преимущественно, в частности, в [1], приводилась на основе теории пластин Кирхгофа (теория Кирхгофа – Лява) или поршневой теории. Там же дано решение задачи в частном случае, когда поток набегаает на свободный край пластинки-полосы, а противоположный край полосы жестко закреплен. В дальнейшем эта задача была обобщена на случай прямоугольных пластин [2 – 4] и на случай, когда свободный край пластины загружен сосредоточенной инерционной массой и сосредоточенным моментом [5].

В настоящей статье исследуется задача устойчивости консольной пластины-полосы, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, на основе теории пластин С. А. Амбарцумяна [6 – 8], учитывающей поперечные сдвиги.

1. Постановка задачи. Упругая пластинка в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $-\infty < z < \infty$, $-h \leq y \leq h$. Поскольку панель-пластинка бесконечно длинная по направлению оси Oz , то естественно предполагать, что прогибы пластинки не зависят от координаты z . Тогда формой изгиба консольной панели является цилиндрическая поверхность. Уравнения, определяющие напряженно-деформированное состояние пластинки при действии поперечной нагрузки p , в соответствии с теорией Амбарцумяна имеют вид [7]

$$\begin{cases} \frac{4h}{3} \frac{d\varphi_1}{dx} = p \\ -D \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{16h^3}{15(1-\nu)} \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} - \frac{4h}{3} \varphi_1 = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

где $w(x)$ – функция прогиба, $\varphi_1(x)$ – функция, характеризующая перерезывающее усилие, а D – жесткость пластинки при изгибе, равная

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad (1.2)$$

причем E – модуль Юнга, а ν – коэффициент Пуассона.

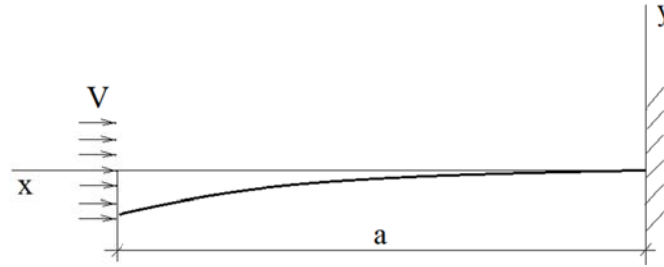


Рис. 1. Консольная пластинка-панель, обтекаемая сверхзвуковым потоком газа.

Поперечная нагрузка p обусловлена взаимодействием упругой деформации пластинки и набегающим сверхзвуковым потоком. В соответствии с принятым допущением (рис. 1) [1] поперечная нагрузка определяется поршневой теорией как

$$p = a_0 \rho_0 V \frac{dw}{dx}. \quad (1.3)$$

Из первого уравнения системы (1.1) с учетом (1.3) имеем

$$\varphi_1 = \frac{3a_0 \rho_0 V}{4h} \cdot w + C_1. \quad (1.4)$$

Подстановка (1.4) во второе уравнение системы (1.1) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка с правой частью

$$\frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{6}{5} \frac{3a_0 \rho_0 V (1+\nu)}{Eh} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{a_0 \rho_0 V}{D} \cdot w = -\frac{4h}{3D} C_1. \quad (1.5)$$

Решение уравнения (1.5) представляется в виде суммы общего решения w_0 соответствующего однородного уравнения и частного решения w_* неоднородного

$$w = w_0 + w_*. \quad (1.6)$$

Уравнение относительно w_0 удобно представлять в виде

$$\frac{d^3 w_0}{d\xi^3} - \eta (sa)^3 \frac{d^2 w_0}{d\xi^2} + (sa)^3 w_0 = 0, \quad (1.7)$$

где
$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{4h^2}{5(1-\nu)a^2}, \quad s = \sqrt[3]{\frac{a_0\rho_0 V}{D}}.$$

2. Аналитическое решение задачи. Путем представления решения однородного дифференциального уравнения (1.7) в виде

$$w_0(\xi) = Ae^{\lambda\xi} \quad (2.1)$$

приводим его к характеристическому уравнению третьей степени

$$\lambda^3 - \eta(sa)^3 \cdot \lambda^2 + (sa)^3 = 0. \quad (2.2)$$

После нахождения корней уравнения (2.2) с учетом (1.6) получаем окончательное решение уравнения (1.5):

$$w(\xi) = A_1 + A_2 e^{\lambda_2 \xi} + e^{r_1 \xi} \cdot [B_1 \sin(r_2 \xi) + B_2 \cos(r_2 \xi)], \quad (2.3)$$

где $A_1 = -\frac{4h}{3a_0\rho_0 V} C_1$, A_2 , B_1 , B_2 – постоянные интегрирования,

$$\lambda_2 = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \gamma_{1,2} = \frac{sa}{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{\mu - 1 \pm \sqrt{1 - 4\mu}}, \quad \mu = \frac{1}{27} \eta^3 (sa)^6, \quad r_1 = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2},$$

$r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)$ – характеристические числа уравнения (2.2).

В случае отрицательного дискриминанта характеристического уравнения (2.2)

$$\Delta = -108 \frac{(sa)^2}{4} \cdot \left[1 - \frac{4\eta^3 (sa)^2}{27} \right]. \quad (2.4)$$

Для характеризующей поперечное усилие функции $\varphi_1(x)$ получаем

$$\varphi_1(\xi) = \frac{3a_0\rho_0 V}{4h} \cdot [A_2 e^{-\lambda_2 \xi} + e^{r_1 \xi} (B_1 \sin(r_2 \xi) + B_2 \cos(r_2 \xi))]. \quad (2.5)$$

Согласно теории пластин Амбарцумяна, граничные условия для свободного края, т.е. равенство нулю поперечной силы и изгибающего момента, дают

$$\left[\frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} - \frac{4a}{5G} \frac{d\varphi_1(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=0} = 0, \quad \varphi_1(\xi)|_{\xi=0} = 0, \quad (2.6)$$

условия для закрепленного края принимают вид

$$w(\xi)|_{\xi=1} = 0, \quad \left[\frac{dw(\xi)}{d\xi} - \frac{4a}{5G} \cdot \varphi_1(\xi) \right]_{\xi=1} = 0, \quad (2.7)$$

причем в равенствах (2.6) и (2.7) G – модуль сдвига.

Предполагается, что край пластинки $x=0$ ($\xi=0$) свободен, а край $x=a$ ($\xi=1$) закреплен.

3. Дивергенция панели. Требование, чтобы решения (2.3) и (2.4) удовлетворяли граничным условиям (2.6) и (2.7), приводит к следующей си-

системе линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных интегрирования A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_2(\lambda_2 + \alpha) \cdot A_2 + r_2(2r_1 - \alpha) \cdot B_1 + (r_1^2 - r_2^2 - \alpha r_1) \cdot B_2 &= 0, \\ A_2 + B_2 &= 0, \\ A_1 + e^{\lambda_2} A_2 + e^{\alpha} \cdot \sin(r_2) \cdot B_1 + e^{\alpha} \cdot \cos(r_2) \cdot B_2 &= 0, \\ (\lambda_2 - \alpha) \cdot e^{\lambda_2} A_2 + e^{\alpha} \cdot [(r_1 - \alpha) \cdot \sin(r_1) + r_2 \cdot \cos(r_2)] B_1 + e^{\alpha} [(r_1 - \alpha) \cdot \cos(r_2) + r_2 \cdot \sin(r_2)] B_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\alpha = \eta(sa)^3$.

Первое, второе и четвертое уравнения системы (3.1) образуют систему трех однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_2, B_1, B_2 . Условие равенства нулю детерминанта этой системы определяет уравнение для нахождения параметра sa , характеризующего критическую скорость набегающего потока, при которой пластинка теряет устойчивость. Третье уравнение системы (3.1) определяет постоянную A_1 .

Условие равенства нулю детерминанта указанной системы после некоторых элементарных преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned} \left\{ (r_1 - \alpha) [\lambda_2(\lambda_2 + \alpha) - (r_1^2 - r_2^2 - \alpha r_1)] - r_2^2(2r_1 - \alpha) \right\} \sin(r_2) + \\ r_2 [\lambda_2(\lambda_2 + \alpha) - r_1^2 + r_2^2 + \alpha r_1 + (2r_1 - \alpha)(r_1 - \alpha)] \cos(r_2) - \\ r_2(2r_1 - \alpha)(\lambda_2 - \alpha) e^{\lambda_2 - r_1} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В табл. 1 приводятся значения критического параметра при налегании сверхзвукового потока на свободный край $V > 0$ – прямое обтекание. Отсюда видно, что учет сдвиговых напряжений приводит к некоторому незначительному увеличению критической скорости (стабилизация), после чего происходит дестабилизация.

Таблица 1

η	0	0.001	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9
sa	1.85	1.85	1.86	1.83	1.73	1.51	1.37	1.32	1.29	–

В табл. 2 приведены численные значения параметра sa для уравнения (3.2) при налегании потока на закрепленный край $V < 0$ – обратное обтекание.

Таблица 2

η	0	0.048	0.05	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	2.3	2.4
sa	–	–5.25	–5.15	–3.64	–1.64	–1.17	–0.96	–0.84	–0.78	–

Здесь в отличие от теории Кирхгофа учет сдвигов приводит к потере устойчивости пластинки, т.е. однозначно приводит к дестабилизации. Уравнение (3.2) допускает также и приближенное решение, которое может дать качественные результаты. Для достаточно широких пластин $sa \ll 1$ можно пренебречь последним слагаемым в уравнении (3.2) и в приближении $\eta \ll 1$ получить уравнение

$$\cos(r_2) = 0, \text{ или } sa = (\sqrt{3}/3) \cdot \pi, \quad (3.3)$$

откуда в подтверждение численных результатов табл. 1 следует, что учет сдвигов приводит к стабилизации.

При обратном обтекании существенную роль играет последнее слагаемое в уравнении (3.2), вследствие чего из $V < 0$ следует $e^{\lambda_2 - \eta} \ll 1$. А из этого следует, что можно рассматривать приближенное уравнение

$$2r_1 - \alpha = 0. \quad (3.4)$$

В заключение необходимо отметить, что в табл. 1 и 2 значения коэффициента $\eta > 0.1$ не имеют явно выраженного практического значения.

4. Частный случай. Решение задачи в новой постановке осуществляется при тех же краевых условиях, которые учитывались в предыдущем пункте, а именно, того, что край пластинки $x = 0$ ($\xi = 0$) свободен, а край $x = a$ ($\xi = 1$) закреплён.

Таким образом, проведено также и исследование частного случая дифференциального уравнения (1.7), характеристическое уравнение (2.2) которого имеет три действительных корня, два из которых совпадают. Этот случай соответствует, очевидно, равенству нулю дискриминанта (2.4) кубического уравнения в слагаемых радикалах (2.3) формулы Кардано. Тогда решение (2.3) и функция $\varphi_1(\xi)$ (2.4) дифференциального уравнения (1.7) представляются соответственно в виде (4.1) и (4.2):

$$w(\xi) = A_1 + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \xi} + A_3 \cdot e^{\lambda_3 \xi} + A_4 \xi \cdot e^{\lambda_3 \xi}, \quad (4.1)$$

$$\varphi_1(\xi) = \frac{3a_0 \rho_0 V}{4h} (A_2 \cdot e^{\lambda_2 \xi} + A_3 \cdot e^{\lambda_3 \xi} + A_4 \xi \cdot e^{\lambda_3 \xi}). \quad (4.2)$$

Из равенства нулю дискриминанта кубического уравнения непосредственно следует, что

$$\eta = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \frac{1}{(sa)^2}, \quad (4.3)$$

в результате чего определяются корни характеристического уравнения (2.2):

$$\lambda_2 = \frac{sa}{\sqrt[3]{4}} \approx 0.63sa, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 2\sqrt[3]{2}sa \approx 2.52sa. \quad (4.4)$$

После подстановки (4.1) – (4.4) в граничные условия (2.6) и (2.7) приходим к новой системе линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных интегрирования A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$\begin{aligned}
&\lambda_2(\lambda_2 - \alpha) \cdot A_2 + \lambda_3(\lambda_3 - \alpha) \cdot A_3 + (2\lambda_3 - \alpha) \cdot A_4 = 0, \\
&A_2 + A_3 = 0, \\
&A_1 + e^{\lambda_2} \cdot A_2 + e^{\lambda_3} \cdot A_3 + e^{\lambda_3} \cdot A_4 = 0, \\
&\lambda_2(\lambda_2 - \alpha)e^{\lambda_2} \cdot A_2 + \lambda_3(\lambda_3 - \alpha)e^{\lambda_3} \cdot A_3 + e^{\lambda_3} [\lambda_3(\lambda_3 + 2) - \beta(\lambda_3 + 1)] \cdot A_4 = 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Нетрудно заметить, что в системе уравнений (3.1) первое, третье и четвертое уравнения образуют однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных A_2, A_3, A_4 постоянных, которая сводится к решению следующего трансцендентного уравнения:

$$\begin{aligned}
&[0.63sa(0.63sa - \alpha) - 2.52sa(2.52sa - \alpha)][2.52sa(2.52sa + 2) - \alpha(2.52sa + 1)] + \\
&[2.52sa(2.52sa - \alpha) - 0.63sa(0.63sa - \alpha)e^{-1.89sa}](5.04sa - \alpha) = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Численное исследование трансцендентного уравнения (4.6) показывает отсутствие решений при прямом обтекании пластины потоком, т.е. при $V > 0$.

Между тем обнаружено решение трансцендентного уравнения (4.6):

$$sa = -0.857, \tag{4.7}$$

соответствующее обратному обтеканию пластинки, т.е. при $V < 0$, которое, однако, в теории пластин не имеет практического значения.

5. Заключение. При упрощающих предположениях цилиндрического изгиба пластинки и справедливости поршневой теории известно явление панельного флаттера в рамках теории Кирхгофа как при прямом, так и обратном обтекании панели аэродинамическим потоком. В то же время при статическом исследовании неустойчивости пластины в теории Кирхгофа обнаруживается дивергенция только при прямом обтекании панели потоком. Указанное расхождение разрешается в теории Амбарцумяна, наделяющей пластинку меньшей жесткостью. Таким образом, выявлена зона дивергенции панели при обратном обтекании сверхзвуковым потоком газа, которая исследована на основе теории пластин Амбарцумяна.

Институт механики НАН РА
e-mail: mbelubekyan@yahoo.com

М. В. Белубекян, Г. А. Геворкян

Задача дивергенции панели в сверхзвуковом потоке газа при учете поперечных сдвигов

Представлены результаты исследования дивергентной устойчивости консоли панели-плиты в сверхзвуковом потоке газа. На основе теории пластин С. А. Амбарцумяна с учетом поперечных сдвигов исследованы случаи прямого обтекания (поток от свободного края панели) и обратного обтекания (поток от защемленного края панели) панели-пластинки. Показано, что в случае обратного обтекания панели учет поперечных сдвигов в основных соотношениях (в отличие

от теории пластин Кирхгофа) так же, как и при прямом обтекании, может привести к потере дивергентной устойчивости панели-пластинки.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Հ. Ա. Գևորգյան

**Գազի գերձայնային հոսքով շրջնավոր վահանակի դիվերգենցիայի խնդիրը
լայնական սահքերի հաշվառման դեպքում**

Ներկայացված են գազի գերձայնային հոսքի մեջ կոնսոլային վահանակի սալիկի դիվերգենցիայի ստատիկ անկայունության ուսումնասիրության արդյունքները: Հիմք ընդունելով Մ. Ա. Համբարձումյանի սալերի տեսությունը, հաշվի առնելով լայնակի սահքերը՝ քննվել են վահանակ-սալիկի ուղիղ շրջնաձև (վահանակի ազատ եզրից հոսքի) և հակադարձ շրջնաձև (վահանակի ամրակցված եզրից հոսքի) դեպքերը: Ցույց է տրվում, որ վահանակ-սալիկի հակադարձ շրջնաձև դեպքում հիմնական հարաբերություններում լայնական սահքերի հաշվի առնելը, ի տարբերություն Կիրիլիսկոֆի սալերի տեսության, կարող է հանգեցնել վահանակ-սալի դիվերգենցիալ անկայունության, ինչպես ուղիղ շրջնաձև դեպքում:

M. V. Belubekyan, H. A. Gevorgyan

**The Divergence Problem of the Panel in a Supersonic Gas Flow
with Transverse Shears Taken into Account**

This article proposes the results of a study of the divergent stability of a cantilever panel-plate in a supersonic gas flow. Based on the Ambartsumian's theory of plates, taking into account the transverse shears, the cases of direct flow (flow from the free edge of the panel) and reverse flow (flow from the clamped edge of the panel) of the panel-plate were investigated. It is shown that in the case of reverse flow around the panel, taking into account the transverse shears in the basic relations (in contrast to the theory of Kirchhoff plates) can also lead to the loss of divergent stability of the panel-plate, as in the case of direct flow.

Литература

1. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М. Наука. 1987. 324 с.
2. Мовчан А. А. – ПММ. 1957. Т. 21. № 2. С. 211 – 243.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М. Наука. 1967. 245 с.
4. Belubekyan M. V., Martirosyan S. R. – Proc. of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. V. 70. № 4. P. 12 – 34.
5. Belubekyan M. V., Martirosyan S. R. – Proc. of NAS of Armenia. Mechanics. 2016. V. 69. № 3. P. 41 – 49.
6. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
7. Белубекаян М. В. – В кн.: Проблемы механики тонких деформируемых сред. Ереван. Гитутюн. 2002. С. 67 – 88.
8. Яновский А. П. – Механика композитных материалов. 2020. Т. 56. № 3. С. 407 – 436.