ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 121 2021 №2
Volume

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Вариационный принцип типа Рейсснера моментно-мембранной теории тонких оболочек

(Представлено 15/III 2021)

Ключевые слова: *моментно-мембранная теория, тонкая оболочка, вариационный принцип типа Рейсснера.*

Введение. Известно, что исходные дифференциальные уравнения и граничные условия классической и моментной теории упругости могут быть непосредственно получены при минимизации [1-8] выражения полной потенциальной энергии системы (вариационный принцип Лагранжа) или полной дополнительной энергии деформации (вариационный принцип Кастилиано). Вариационные принципы Лагранжа и Кастилиано дают удобные методы для построения приближённых решений граничных задач об упругом равновесии тел в постановке классической или моментной теории упругости. В классической и моментной теории упругости установлены также вариационные принципы общего типа, которые стационарны, но не экстремальны. Это вариационные принципы Ху-Вашицу и Рейсснера [3, 4, 6-8], которые применяются при построении прикладных теорий упругих тонких стержней, мембран, пластин и оболочек. В [9, 10] на основе моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений для изучения деформаций наноматериалов построена моментно-мембранная теория оболочек, в частности пластин, при изгибе и плоского напряжённого состояния,

В данной работе для моментно-мембранной теории тонких оболочек [9,10] устанавливается вариационный принцип типа Рейсснера, на основе которого составляется вариационное уравнение и из неё естественным образом (как уравнения Эйлера) вытекают соотношения упругости, дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия этой теории.

1. Постановка задачи. Вариационный принцип типа Рейсснера трёхмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений. Обобщая функционал Рейсснера классической теории упругости [3], аналогичный функционал моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений представим в виде

$$
\begin{aligned}
I = &\iiint_V \left(\sigma_{ij}\gamma_{ij} + \mu_{ij}\chi_{ij} - W_{\sigma,\mu} - X_i v_i - c_i\omega_i\right) dV - \\
&- \iint_{(S)_{\sigma,\mu}} \left(p_i^* v_i + m_i^*\omega_i\right) dS - \iint_{(S)_{u,\omega}} \left[p_i\left(v_i - v_i^*\right) + m_i\left(\omega_i - \omega_i^*\right)\right] dS,
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

где σ_{ij}, μ_{ij} – компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений; γ_{ij}, χ_{ij} – компоненты тензоров деформаций и изгибов-кручений; v_i, ω_i – компоненты векторов перемещения и свободного поворота; $W_{\sigma,\mu}$ – объёмная плотность потенциальной энергии деформации, выраженной через напряжения и моментные напряжения; $p_i = \sigma_{ji} n_i, m_i = \mu_{ji} n_i$; n_i – компоненты вектора нормали к поверхности (S) тела; (V) - область тела; X_i, c_i – компоненты векторов объёмных сил и моментов; $(S)_{\sigma,\mu}$ – часть поверхности (S), на которой заданы напряжения и моментные напряжения; $(S)_{v,\omega}$ – часть поверхности (S), на которой заданы перемещения и повороты; $i, j = 1,2,3$.

Объёмная плотность потенциальной энергии деформации выражается так [8]:

$$
\begin{aligned}
W_{\sigma,\mu} = &\frac{1}{2}\Big[\lambda'\theta_\sigma^2 + 2\mu'\left(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2\right) + \left(\mu' + \alpha'\right)\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{21}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{31}^2 + \right. \\
&\left. + \sigma_{23}^2 + \sigma_{32}^2\right) + 2\left(\mu' - \alpha'\right)\left(\sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{13}\sigma_{31} + \sigma_{23}\sigma_{32}\right) + \beta'\theta_\mu^2 + \\
&+ 2\gamma'\left(\mu_{11}^2 + \mu_{22}^2 + \mu_{33}^2\right) + \left(\gamma' + \varepsilon'\right)\left(\mu_{12}^2 + \mu_{21}^2 + \mu_{13}^2 + \mu_{31}^2 + \mu_{23}^2 + \mu_{32}^2\right) + \\
&+ 2\left(\gamma' - \varepsilon'\right)\left(\mu_{12}\mu_{21} + \mu_{13}\mu_{31} + \mu_{23}\mu_{32}\right)\Big],
\end{aligned}
\qquad (1.2)
$$

где

$$
\begin{gathered}
\theta_\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \ \theta_\mu = \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33}, \\
\mu' = \frac{1}{4\mu}, \ \alpha' = \frac{1}{4\alpha}, \ \gamma' = \frac{1}{4\gamma}, \ \varepsilon' = \frac{1}{4\varepsilon}, \\
\lambda' = -\frac{\lambda}{6\mu K}, \ K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \ \beta' = -\frac{\beta}{6\gamma\Omega}, \ \Omega = \beta + \frac{2}{3}\gamma,
\end{gathered}
\qquad (1.3)
$$

λ, μ – упругие постоянные Ламе, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – упругие постоянные.

На основе функционала Рейсснера (1.1) можно получить вариационное уравнение $(\delta I = 0)$, из которого следуют уравнения равновесия, соотношения упругости, силовые граничные условия на $(S)_{\sigma,\mu}$ и геометрические граничные условия на $(S)_{v,\omega}$:

уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0,\ \in_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + c_i = 0; \tag{1.4}$$

соотношения упругости

$$\begin{gathered}\gamma_{ii} = \lambda'\theta_\sigma + 2\mu'\sigma_{ii},\ \gamma_{ij} = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{ij} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{ji}, \\ \chi_{ii} = \beta'\theta_\mu + 2\gamma'\mu_{ii},\ \ \chi_{ij} = (\gamma' + \varepsilon')\mu_{ij} + (\gamma' - \varepsilon')\mu_{ji};\end{gathered} \tag{1.5}$$

граничные условия на $(S)_{\sigma,\mu}$

$$p_i = p_i^*,\ \ m_i = m_i^*; \tag{1.6}$$

граничные условия на $(S)_{v,\omega}$

$$v_i = v_i^*,\ \ \omega_i = \omega_i^*. \tag{1.7}$$

Отметим, что приведённые выше уравнения и соотношения моментной теории упругости изложены в декартовой системе координат x_i. Для установления функционала Рейсснера (инвариантное выражение) для моментно-мембранной теории оболочек, используем триортогональные координаты $\alpha_i, z(i = 1{,}2)$, где α_1, α_2 – линии главных кривизн срединной поверхности оболочки $(z = 0)$, а прямолинейная ось z направлена по нормали к этой поверхности. Коэффициенты Ламе этой координатой системы имеют вид [11]

$$H_i = A_i\left(1 + \frac{z}{R_i}\right),\ i = 1{,}2,\ H_3 = 1, \tag{1.8}$$

где A_i, R_i – коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

Представим вариационный функционал Рейсснера (1.1) для тела оболочки толщиной 2h с использованием системы координат $\alpha_i, z(i = 1{,}2)$:

$$\begin{gathered}\iint\limits_{(S)}\int\limits_{-h}^{h}\left(\sigma_{mn}\gamma_{mn} + \mu_{mn}\chi_{mn} - W_{\sigma,\mu}\right)H_1H_2\,d\alpha_1 d\alpha_2 dz - \\ - \iint\limits_{(S^+)}\left(q_n^+ v_n + m_n^+\omega_n\right)H_1H_2\big|_{z=h}\,d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ + \iint\limits_{(S^-)}\left(q_n^- v_n + m_n^-\omega_n\right)H_1H_2\big|_{z=-h}\,d\alpha_1 d\alpha_2 + \iint\limits_{(\Sigma_1')}\left(\sigma_{2n}^* v_n + \mu_{2n}^*\omega_n\right)H_1\,d\alpha_1 dz + \\ + \iint\limits_{(\Sigma_1'')}\left[\sigma_{2n}\left(v_n - v_n^*\right) + \mu_{2n}\left(\omega_n - \omega_n^*\right)\right]H_1\,d\alpha_1 dz - \iint\limits_{(\Sigma_2')}\left(\sigma_{1n}^* v_n + \mu_{1n}^*\omega_n\right)H_2\,d\alpha_2 dz - \\ - \iint\limits_{(\Sigma_2'')}\left[\sigma_{1n}\left(v_n - v_n^*\right) + \mu_{1n}\left(\omega_n - \omega_n^*\right)\right]H_2\,d\alpha_2 dz,\end{gathered} \tag{1.9}$$

где $W_{\sigma,\mu}$ сохраняет свой вид (1.2). В (1.9) принято, что $X_n = 0, c_n = 0$ $(n = 1{,}2{,}3)$.

2. Основные гипотезы. Перемещения и повороты. Деформации и изгибы-кручения, напряжения и моментные напряжения. В основе моментно-мембраной теории оболочек лежат две гипотезы:

1) Кинематическая гипотеза–это предположение о постоянстве всех компонент вектора перемещения и вектора свободного поворота по толщине оболочки, т.е. по координате z:

$$v_i = u_i(\alpha_1,\alpha_2),\ v_3 = w(\alpha_1,\alpha_2),\ \omega_k = \Omega_k(\alpha_1,\alpha_2)\ \ (i=1,2;\ k=1,2,3). \quad (2.1)$$

2) Статической гипотезой в физических соотношениях моментной теории упругости пренебрегается: σ_{33} – относительно σ_{ii}; μ_{33} – относительно μ_{ii}; σ_{3i} – относительно σ_{i3}; μ_{3i} – относительно $\mu_{i3}(i=1,2)$.

Здесь считаем, что оболочка тонкая, т.е. $\frac{h}{R_o}$ (R_o – меньший из главных радиусов кривизны срединной поверхности оболочки) значительно меньше единицы.

Отметим, что принятые гипотезы соответствуют исходному приближению асимптотического метода интегрирования граничной задачи моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [12, 13].

На основе принятых гипотез, используя геометрические и физические соотношения моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [3], для деформаций, изгибов кручений, напряжений и моментных напряжений, получим:
для деформаций и изгибов-кручений

$$\begin{gathered}\gamma_{ii} = \Gamma_{ii}(\alpha_1,\alpha_2),\ \gamma_{ij} = \Gamma_{ij}(\alpha_1,\alpha_2),\ \gamma_{i3} = \Gamma_{i3}(\alpha_1,\alpha_2),\\ \gamma_{3i} = \Gamma_{3i}(\alpha_1,\alpha_2),\ \gamma_{33} = 0,\ \chi_{ii} = k_{ii}(\alpha_1,\alpha_2),\\ \chi_{ij} = k_{ij}(\alpha_1,\alpha_2),\ \chi_{i3} = k_{i3}(\alpha_1,\alpha_2),\ \chi_{3i} = 0,\ \chi_{33} = 0,\ (i \neq j = 1,2),\end{gathered} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned}&\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_j + \frac{w}{R_i},\ \Gamma_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial w_i}{\partial \alpha_i} - \frac{u_i}{R_i} + (-1)^j\Omega_j,\\ &\Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_i + (-1)^i\Omega_3,\ \Gamma_{3i} = (-1)^i\Omega_j,\\ &k_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i},\ k_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i,\\ &k_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}\ \ (i \neq j = 1,2);\end{aligned} \quad (2.3)$$

для напряжений и моментных напряжений

$$\sigma_{ii}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right),\ \sigma_{ij}=(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji},$$
$$\sigma_{i3}=G^*\Gamma_{i3},\ G^*=\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha},$$
$$\mu_{ii}=\frac{2\gamma}{\beta+2\gamma}\left[2(\beta+\gamma)k_{ii}+\beta k_{jj}\right],\ \mu_{ij}=(\gamma+\varepsilon)k_{ij}+(\gamma-\varepsilon)k_{ji},\tag{2.4}$$
$$\mu_{i3}=Bk_{i3},\quad B=\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}.$$

В теории оболочек вместо напряжений и моментных напряжений удобно оперировать статически эквивалентными им внутренними усилиями и моментами, отнесёнными к единице длины соответствующей координатной линии α_1,α_2 срединной поверхности. Так как по формулам (2.4) $\sigma_{ii},\sigma_{ij},\sigma_{i3},\mu_{ii},\mu_{ij},\mu_{i3}$ не зависят от z, имеем

$$T_{ii}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}dz=2\sigma_{ii}h,\ S_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}dz=2\sigma_{ij}h,\ N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}dz=2\sigma_{i3}h,$$
$$L_{ii}=\int_{-h}^{h}\mu_{ii}dz=2\mu_{ii}h,\ L_{ij}=\int_{-h}^{h}\mu_{ij}dz=2\mu_{ij}h,\ L_{i3}=\int_{-h}^{h}\mu_{i3}dz=2\mu_{i3}h.\tag{2.5}$$

3. Вариационный принцип типа Рейсснера моментно-мембранной теории тонких оболочек. Если принять за основу функционал Рейсснера (1.9) моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений, подставляя в него перемещения и повороты (2.1), деформации и изгибы-кручения (2.2), напряжения и моментные напряжения (2.4), после выполнения интегрирования по z от $-h$ до $+h$, придем к функционалу Рейсснера моментно-мембранной теории оболочек:

$$\mathrm{I}_0=\iint_{(S)}\left(T_{11}\Gamma_{11}+T_{22}\Gamma_{22}+S_{12}\Gamma_{12}+S_{21}\Gamma_{21}+N_{13}\Gamma_{13}+N_{23}\Gamma_{23}+L_{11}k_{11}+L_{22}k_{22}+\right.$$
$$\left.+L_{12}k_{12}+L_{21}k_{21}+L_{13}k_{11}+L_{23}k_{23}-W_0\right)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2-$$
$$-\iint_{(S)}\left\{\left(q_1^+-q_1^-\right)u_1+\left(q_2^+-q_2^-\right)u_2+\left(q_3^+-q_3^-\right)w+\left[\left(m_1^+-m_1^-\right)+h\left(p_2^+ + p_2^-\right)\right]\Omega_1+\right.$$
$$\left.+\left[\left(m_2^+-m_2^-\right)-h\left(p_1^+ + p_1^-\right)\right]\Omega_2+\left(m_3^+-m_3^-\right)\Omega_3\right\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2+$$
$$+\int_{\Gamma_1'}\left(S_{21}^*u_1+T_{22}^*u_2+N_{23}^*w+L_{21}^*\Omega_1+L_{22}^*\Omega_2+L_{23}^*\Omega_3\right)A_1d\alpha_1+$$
$$+\int_{\Gamma_1''}\left[S_{21}^*\left(u_1-u_1^*\right)+T_{22}^*\left(u_2-u_2^*\right)+N_{23}^*\left(w-w^*\right)+L_{21}^*\left(\Omega_1-\Omega_1^*\right)+\right.\tag{3.1}$$

$$+L_{22}^*\left(\Omega_2-\Omega_2^*\right)+L_{23}^*\left(\Omega_3-\Omega_3^*\right)\Big]A_1d\alpha_1-$$
$$-\int\limits_{\Gamma_2'}\left(T_{11}^*u_1+S_{12}^*u_2+N_{13}^*w+L_{11}^*\Omega_1+L_{12}^*\Omega_2+L_{13}^*\Omega_3\right)A_2d\alpha_2-$$
$$-\int\limits_{\Gamma_2''}\Big[T_{11}^*\left(u_1-u_1^*\right)+S_{12}^*\left(u_2-u_2^*\right)+N_{13}^*\left(w-w^*\right)+L_{11}^*\left(\Omega_1-\Omega_1^*\right)+$$
$$+L_{12}^*\left(\Omega_2-\Omega_2^*\right)+L_{13}^*\left(\Omega_3-\Omega_3^*\right)\Big]A_2d\alpha_2,$$

где W_0 – поверхностная плотность потенциальной энергии деформации оболочки

$$\begin{aligned}W_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2h}\big[&\lambda'(T_{11}+T_{22})^2+2\mu'\left(T_{11}^2+T_{22}^2\right)+\\&+(\mu'+\alpha')\left(S_{12}^2+S_{21}^2+N_{13}^2+N_{23}^2\right)+\\&+2(\mu'-\alpha')S_{12}S_{21}+\beta'(L_{11}+L_{22})^2+2\gamma'\left(L_{11}^2+L_{22}^2\right)+\\&+(\gamma'+\varepsilon')\left(L_{12}^2+L_{21}^2+L_{13}^2+L_{23}^2\right)+2(\gamma'-\varepsilon')L_{12}L_{21}\big].\end{aligned}\tag{3.2}$$

На основе функционала Рейсснера можно получить вариационное уравнение, варьируя (3.1) по всем 18 функциональным аргументам: $\delta u_1,\delta u_2,\delta w,\delta\Omega_1,\delta\Omega_2,\delta\Omega_3,\delta T_{11},\delta T_{22},\delta S_{12}$, $\delta S_{21},\delta N_{13},\delta N_{23},\delta L_{11},\delta L_{22},\delta L_{12},\delta L_{21}$, $\delta L_{13},\delta L_{23}$, и утверждать, что равенство $\delta I_0=0$ справедливо лишь при условии равенства нулю коэффициентов при этих вариациях. Приравнивая нулю выражения в скобках при вариациях $\delta u_1,...,\delta L_{23}$, получим физические соотношения упругости и уравнения равновесия моментно-мембранной теории оболочек во всех точках срединной поверхности (S), а также граничные условия, справедливые на Γ_1' и Γ_1''; Γ_2' и Γ_2'':

физические соотношения упругости

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{2h}\frac{1}{E}\left(T_{ii}-\nu T_{jj}\right),\Gamma_{ij}=\frac{1}{2h}\left(\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}S_{ij}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}S_{ji}\right),$$

$$\Gamma_{i3}=\frac{1}{2G^*h}N_{i3},\ G^*=\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha},$$

$$k_{ii}=\frac{1}{2h}\frac{1}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}\left[2(\beta+\gamma)L_{ii}-\beta L_{jj}\right],\ k_{ij}=\frac{1}{2h}\left(\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}L_{ij}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}L_{ji}\right),\tag{3.3}$$

$$k_{i3}=\frac{1}{2Bh}L_{i3},\quad B=\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon};$$

дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_jT_{ii}\right)}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_iS_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}S_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}T_{jj}+\frac{N_{i3}}{R_i}=$$
$$=-\left(p_i^+-p_i^-\right),$$
$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial\alpha_2}=\left(p_3^+-p_3^-\right),$$
$$\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_iL_{ii}\right)}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_iL_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}L_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}L_{jj}+\frac{L_{i3}}{R_i}+ \qquad (3.4)$$
$$+\left(-1\right)^jN_{j3}=-\left(m_i^+-m_i^-\right)+\left(-1\right)^jh\left(p_j^++p_j^-\right),$$
$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}-\left(S_{12}-S_{21}\right)=$$
$$=\left(m_3^+-m_3^-\right),\quad i\neq j=1,2;$$

граничные условия

$$\begin{aligned}
&\text{на } \Gamma_1':\ S_{21}=S_{21}^*,T_{22}=T_{22}^*,N_{23}=N_{23}^*,L_{21}=L_{21}^*,L_{22}=L_{22}^*,L_{23}=L_{23}^*,\\
&\text{на } \Gamma_1'':\ u_1=u_1^*,u_2=u_2^*,w=w^*,\Omega_1=\Omega_1^*,\Omega_2=\Omega_2^*,\Omega_3=\Omega_3^*,\\
&\text{на } \Gamma_2':T_{11}=T_{11}^*,S_{12}=S_{12}^*,N_{13}=N_{13}^*,L_{11}=L_{11}^*,L_{12}=L_{12}^*,L_{13}=L_{13}^*,\\
&\text{на } \Gamma_2'':u_1=u_1^*,u_2=u_2^*,w=w^*,\Omega_1=\Omega_1^*,\Omega_2=\Omega_2^*,\Omega_3=\Omega_3^*.
\end{aligned} \qquad (3.5)$$

Таким образом, доказана

Теорема. *Вариационное уравнение* $\delta I_0=0$ *содержит в качестве (дифференциальных) уравнений Эйлера соотношения упругости и условия равновесия, а в качестве естественных граничных условий – статические (на* Γ_1',Γ_2'*) и геометрические (на* Γ_1'',Γ_2''*) условия.*

Ширакский государственный университет им М. Налбандяна
e-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Вариационный принцип типа Рейсснера моментно-мембранной теории тонких оболочек

На основе принятых предположений устанавливается вариационный принцип типа Рейсснера моментно-мембранной теории тонких оболочек, созданной для изучения деформаций наноматериалов. Выводятся соотношения упругости, уравнения равновесия, статические и геометрические граничные условия этой теории.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Բարակ թաղանթների մոմենտամեմբրանային տեսության Ռեյսների տիպի վարիացիոն սկզբունքը

Կատարված ընդունելությունների հիման վրա հաստատվում է բարակ թաղանթների մոմենտամեմբրանային տեսության Ռեյսների տիպի վարիացիոն սկզբունքը նանոնյութերի դեֆորմացիաների ուսումնասիրության համար: Դուրս են բերվում այս տեսության առաձգական առընչությունները, հավասարակշռության հավասարումները, ստատիկական և երկրաչափական եզրային պայմանները:

Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

The Variation Principle of Reissner Type of Moment-Membrane Theory of Thin Shells

On the basis of the accepted assumptions, a Reissner-type variation principle of the moment-membrane theory of shells is established, to study the deformation of nanomaterials. Elastic relations, equilibrium equations, static and geometric boundary conditions of this theory are derived.

Литература

1. *Панкович П. Ф.* Теория упругости. Киев. Оборонгиз. 1939. 640 с.
2. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. М. – Л. ГИТТЛ. 1947. 464 с.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 872 с.
4. *Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А.* Упругость и прочность цилиндрических тел. М. Высшая школа. 1975. 526 с.
5. *Образцов И. Ф., Булычев Л. А., Васильев В. В. и др*. Строительная механика летательных аппаратов. М. Машиностроение. 1986. 536 с.
6. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наукова думка. 1973. 247 с.
7. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. Киев. Наукова думка. 1978. 344 с.
8. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford. Pergamon. 1986. 383 p.
9. *Саркисян С. О.* – Физическая мезомеханика. 2020. Т. 23. № 4. С. 13-19.
10. *Саркисян С. О.* – Доклады НАН Армении. 2020. Т. 120. № 4. С. 239-249.
11. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М. ГИТТЛ. 1953. 544 с.
12. *Саркисян С. О.* – Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 129-147.
13. *Саркисян С. О.* – Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 325-343.