

УДК: 524.31-852

## МЕТОД АЛЬБЕДНОГО СДВИГА В ЗАДАЧЕ ОБ АНИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ СВЕТА В ПЛОСКИХ АТМОСФЕРАХ

В.В.ИВАНОВ, А.М.КАСАУРОВ

Поступила 20 июля 1998

Рассматривается стандартная задача теории переноса излучения - расчет диффузного отражения и пропускания излучения плоской рассеивающей атмосферой. Недавно предложенный метод альбедного сдвига применяется для расчета  $X$ - и  $Y$ -функций (а также  $H$ -функции) для случая анизотропного рассеяния с индикатрисой Хензи-Гринштейна. Метод позволяет "подавлять" рассеяния и получать итеративные решения высокой точности всего за несколько итераций даже в тех случаях, когда среднее число рассеяний фотона в атмосфере очень велико.

1. *Введение.* Недавно был предложен новый численно-аналитический метод расчета полей излучения в плоских рассеивающих атмосферах - метод альбедного сдвига [1-4]; см. также [5]. Суть его состоит в следующем. По уравнению переноса в интегральной или дифференциальной форме и по порождаемым им уравнениям для стандартных функций теории переноса излучения -  $H$ -функции,  $X$ - и  $Y$ -функций, резольвентной функции Соболева  $\Phi(\tau)$  - строятся вспомогательные однопараметрические семейства уравнений той же общей структуры, что и обычные уравнения теории переноса. В этих вспомогательных уравнениях за счет выбора фигурирующего в них параметра вклад членов, описывающих рассеяния, может быть сильно подавлен. Поэтому решения вспомогательных уравнений без труда получают итерациями. Вспомогательные уравнения построены таким образом, что по решению, найденному для произвольного значения параметра, по простым формулам может быть восстановлено точное решение исходной физической задачи.

До сих пор численная реализация этого подхода была сделана лишь для простейшего случая изотропно рассеивающей полубесконечной атмосферы. В настоящей работе приводятся результаты применения этого подхода к задачам анизотропного рассеяния. Рассматриваются как полубесконечные, так и конечные атмосферы. Решается задача о диффузном отражении и пропускании. Точнее, описанным выше в общих чертах методом находятся  $X$ - и  $Y$ -функции (а также  $H$ -функция) для случая рассеяния с индикатрисой Хензи-Гринштейна.

2. *Уравнение переноса излучения.* Стандартная задача теории переноса излучения - расчет поля излучения в плоском слое оптической толщины  $\tau_0$ , верхняя граница которого освещается параллельными лучами. Для нулевой азимутальной гармоники поля излучения эта задача сводится к решению следующего уравнения переноса [6,7]:

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = -I(\tau, \mu) + \frac{a}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' + \frac{a}{4} p(\mu, \mu_0) e^{-\tau/\mu_0} \quad (1)$$

при граничных условиях

$$I(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0; \quad I(\tau_0, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (2)$$

Здесь  $I(\tau, \mu)$  - усредненная по азимуту интенсивность излучения на оптической глубине  $\tau$ , распространяющегося под углом  $\arccos \mu$  к внутренней нормали к верхней ( $\tau = 0$ ) границе,  $p(\mu, \mu')$  - усредненная по азимуту индикатриса рассеяния,  $a$  - альbedo однократного рассеяния,  $\mu_0$  - косинус угла падения внешнего излучения. Если индикатриса рассеяния  $x(\gamma)$ , где  $\gamma$  - угол рассеяния, разлагается в ряд по полиномам Лежандра  $P_i(\cos \gamma)$ :

$$x(\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_i(\cos \gamma), \quad (3)$$

то

$$p(\mu, \mu') = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_i(\mu) P_i(\mu'). \quad (4)$$

Мы считаем, что  $x(\gamma)$  нормирована:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} x(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 1, \quad (5)$$

так что в (3) и (4)  $x_0 = 1$ .

Излагаемая ниже теория относится к случаю произвольной индикатрисы рассеяния, численные же результаты будут приводиться для часто используемой (см., например, [8,9]) модельной индикатрисы Хенли-Гринштейна

$$x(\gamma) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \gamma)^{3/2}}, \quad (6)$$

где  $g$  - параметр,  $-1 < g < 1$ , характеризующий степень ее вытянутости вперед ( $g > 0$ ) или назад ( $g < 0$ ). Для индикатрисы Хенли-Гринштейна

$$x_i = (2i + 1) g^i. \quad (7)$$

Один из наиболее удивительных и вместе с тем один из самых важных результатов теории анизотропного рассеяния состоит в том, что для получения интенсивности, удовлетворяющей уравнению (1) и граничным условиям (2), вместо уравнения переноса можно решать другое, более простое уравнение. Согласно Чандрасекару, который впервые обнаружил такую возможность, это вспомогательное уравнение имеет вид (см. [6], разд. 89)

$$\mu \frac{d\varrho(\tau, \mu)}{d\tau} = -\varrho(\tau, \mu) + \int_{-1}^1 \Psi(\mu') \varrho(\tau, \mu') d\mu' + e^{-\tau/\mu_0}. \quad (8)$$

Его решение - *псевдоинтенсивность*  $\varrho(\tau, \mu)$ . Как и физическая интенсивность  $I(\tau, \mu)$ , она должна искаться при нулевых граничных условиях.

Главное упрощение здесь состоит в следующем. В обычном уравнении переноса в интегральном члене, описывающем рассеяния, фигурирует зависящая от *двух* переменных фазовая функция  $p(\mu, \mu')$ , во вспомогательном же уравнении (8) ее место занимает функция *одной* переменной  $\Psi(\mu)$  - чандрасекаровская характеристическая функция. Она представляет собой ряд по степеням  $\mu^2$  вида

$$\Psi(\mu) = \frac{a}{2} \sum_{i=0}^{\infty} x_i R_i(\mu) P_i(\mu), \quad (9)$$

где  $R_i(\mu)$  - многочлены порядка  $i$  такие, что

$$R_0(\mu) = 1, \quad R_1(\mu) = (1-a)\mu, \quad (10)$$

а при  $i \geq 2$

$$i R_i(\mu) + (i-1) R_{i-2}(\mu) = (2i-1 - ax_{i-1}) \mu R_{i-1}(\mu). \quad (11)$$

Это трехчленное рекуррентное соотношение подобно аналогичному соотношению для полиномов Лежандра

$$i P_i(\mu) + (i-1) P_{i-2}(\mu) = (2i-1) \mu P_{i-1}(\mu), \quad (12)$$

которые являются частным случаем  $R_i(\mu)$ , соответствующим  $a = 0$ .

Важный момент, который необходимо подчеркнуть с самого начала, состоит в следующем. В уравнении для псевдоинтенсивности аналогом обычного альбеда однократного рассеяния  $a$  выступает величина

$$\lambda = 2 \int_0^1 \Psi(\mu) d\mu, \quad (13)$$

которую мы будем называть *псевдоальбедо*. Через обычное альбеда рассеяния  $a$  и коэффициенты  $x_i$  разложения индикатрисы по полиномам Лежандра псевдоальбеда выражается следующим образом (см. [7], гл.V, §3; [8], разд. 6.2):

$$\lambda = 1 - \prod_{l=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{ax_l}{2l+1} \right). \quad (14)$$

В консервативном случае, когда  $a = 1$ , псевдоальbedo также равно 1. Отметим, что при консервативном рассеянии имеет место следующее полезное соотношение [10]:

$$2 \int_0^1 \mu^2 \Psi(\mu) d\mu = \frac{1}{3} \prod_{l=2}^{\infty} \left( 1 - \frac{x_l}{2l+1} \right), \quad a = 1. \quad (15)$$

Укажем также, что при очень сильно вытянутых вперед индикатрисах псевдоальbedo заметно больше физического альbedo однократного рассеяния. Более подробно это обсуждается в разделе 8.1.

Мы не приводим здесь довольно громоздких соотношений, позволяющих по псевдоинтенсивности  $q(\tau, \mu)$  находить обычную интенсивность  $I(\tau, \mu)$ . Обсуждение этого вопроса см. в книге В.В.Соболева [7], гл. VI, §1.

3. *Функции X и Y.* В задаче о диффузном отражении и пропускании, сформулированной выше, для получения усредненных по азимуту интенсивностей излучения, выходящего из атмосферы, решать уравнение переноса (1) или даже уравнение (8) для псевдоинтенсивности не обязательно. По существу, достаточно найти порождаемые уравнением (8) X- и Y-функции и их моменты (см. [7], гл. VII, [8], разд. 6.5). Функции X и Y удовлетворяют следующей системе нелинейных интегральных уравнений:

$$X(\mu) = 1 + \mu \int_0^1 \frac{X(\mu)X(\mu') - Y(\mu)Y(\mu')}{\mu + \mu'} \Psi(\mu') d\mu', \quad (16)$$

$$Y(\mu) = e^{-\tau_0/\mu} + \mu \int_0^1 \frac{Y(\mu)X(\mu') - X(\mu)Y(\mu')}{\mu - \mu'} \Psi(\mu') d\mu'. \quad (17)$$

Они связаны между собой соотношением

$$Y(\mu) = e^{-\tau_0/\mu} X(-\mu). \quad (18)$$

Наряду с системой (16)-(17), функции X и Y удовлетворяют также линейным уравнениям

$$T(\mu)X(\mu) = 1 - \mu \int_0^1 \frac{X(\mu')}{\mu - \mu'} \Psi(\mu') d\mu' - e^{-\tau_0/\mu} \mu \int_0^1 \frac{Y(\mu')}{\mu + \mu'} \Psi(\mu') d\mu', \quad (19)$$

$$T(\mu)Y(\mu) = e^{-\tau_0/\mu} - e^{-\tau_0/\mu} \mu \int_0^1 \frac{X(\mu')}{\mu + \mu'} \Psi(\mu') d\mu' - \mu \int_0^1 \frac{Y(\mu')}{\mu - \mu'} \Psi(\mu') d\mu', \quad (20)$$

где  $T(\mu)$  - так называемая дисперсионная функция

$$T(\mu) = 1 - 2\mu^2 \int_0^1 \frac{\Psi(\mu')}{\mu^2 - \mu'^2} d\mu'. \quad (21)$$

При  $\mu \in [0, 1]$  интегралы в (19)-(20), содержащие в знаменателях  $\mu - \mu'$ , а также интеграл в (21) понимаются в смысле главного значения по Коши.

Будем предполагать, что у так называемого *характеристического уравнения*

$$2 \int_0^1 \frac{\Psi(\mu)}{1 - k^2 \mu^2} d\mu = 1 \quad (22)$$

существует неотрицательный корень  $k$ . В этом случае решение системы (19)-(20) неединственно, так как соответствующая ей однородная система имеет нетривиальные решения. Как известно (см., например, [11]), имеющее физический смысл решение системы (19)-(20) должно удовлетворять дополнительным соотношениям

$$\int_0^1 \frac{X(\mu)}{1 - k\mu} \Psi(\mu) d\mu + e^{-k\tau_0} \int_0^1 \frac{Y(\mu)}{1 + k\mu} \Psi(\mu) d\mu = 1, \quad (23)$$

$$e^{-k\tau_0} \int_0^1 \frac{X(\mu)}{1 + k\mu} \Psi(\mu) d\mu + \int_0^1 \frac{Y(\mu)}{1 - k\mu} \Psi(\mu) d\mu = e^{-k\tau_0}. \quad (24)$$

Такое решение будем называть *физическим*. В дальнейшем  $X(\mu)$  и  $Y(\mu)$  будут обозначать у нас физическое решение.

Заметим, что характеристическое уравнение (22) можно записать также в виде

$$T\left(\frac{1}{k}\right) = 0. \quad (25)$$

Соотношения (23) и (24) получаются из (19) и (20) при  $\mu = 1/k$ , если потребовать, чтобы  $X(\mu)$  и  $Y(\mu)$  не имели сингулярности при  $\mu = 1/k$ .

В консервативном случае, когда гибели фотонов при рассеяниях не происходит ( $a = \lambda = 1$ ), мы имеем из (13)

$$2 \int_0^1 \Psi(\mu) d\mu = 1 \quad (26)$$

Согласно (22), это означает, что в этом случае  $k = 0$ . Соотношения (23)-(24), выделяющие физическое решение, заменяются в консервативном случае на следующие:

$$\int_0^1 X(\mu) \Psi(\mu) d\mu + \int_0^1 Y(\mu) \Psi(\mu) d\mu = 1, \quad (27)$$

$$\int_0^1 \mu X(\mu) \Psi(\mu) d\mu - \int_0^1 \mu Y(\mu) \Psi(\mu) d\mu = \tau_0 \int_0^1 Y(\mu) \Psi(\mu) d\mu \quad (28)$$

В предельном случае полубесконечной атмосферы ( $\tau_0 = \infty$ ) для физического решения мы имеем

$$X(\mu) = H(\mu), \quad Y(\mu) = 0, \quad (29)$$

где  $H(\mu)$  - решение уравнения

$$H(\mu) = 1 + \mu H(\mu) \int_0^1 \frac{H(\mu')}{\mu + \mu'} \Psi(\mu') d\mu', \quad (30)$$

удовлетворяющее следующему условию:

$$\int_0^1 \frac{H(\mu)}{1 - k\mu} \Psi(\mu) d\mu = 1. \quad (31)$$

Уравнения (30) и соотношение (31) являются предельными случаями (16) и (23), соответствующими  $\tau_0 = \infty$ . Уравнение же (19) переходит в линейное уравнение для  $H$ -функции

$$T(\mu)H(\mu) = 1 - \mu \int_0^1 \frac{H(\mu')}{\mu - \mu'} \Psi(\mu') d\mu'. \quad (32)$$

4. *Краткие обозначения.* Как приведенные выше формулы, так и особенно ряд даваемых ниже соотношений довольно громоздки. Структура формул становится гораздо яснее, если ввести следующие краткие обозначения:

$$\mathcal{X}(\mu) = 1 - \mu \int_0^1 \frac{X(\mu')}{\mu + \mu'} \Psi(\mu') d\mu', \quad (33)$$

$$\mathcal{Y}(\mu) = \mu \int_0^1 \frac{Y(\mu')}{\mu + \mu'} \Psi(\mu') d\mu'. \quad (34)$$

Тогда линейные уравнения (19) и (20) для  $X$  и  $Y$  принимают вид

$$T(\mu)X(\mu) = \mathcal{X}(-\mu) - e^{\tau_0/\mu} \mathcal{Y}(\mu), \quad (35)$$

$$T(\mu)Y(\mu) = e^{-\tau_0/\mu} \mathcal{X}(\mu) - \mathcal{Y}(-\mu), \quad (36)$$

а нелинейные уравнения (16)-(17) записываются так:

$$X(\mu)\mathcal{X}(\mu) + Y(\mu)\mathcal{Y}(\mu) = 1, \quad (37)$$

$$X(\mu)\mathcal{Y}(-\mu) + Y(\mu)\mathcal{X}(-\mu) = e^{-\tau_0/\mu}. \quad (38)$$

Соотношения (23) и (24) в этих обозначениях имеют вид

$$\mathcal{X}(-\gamma) - e^{-k\tau_0} \mathcal{Y}(\gamma) = 0, \quad (39)$$

$$e^{-k\tau_0} \mathcal{X}(\gamma) - \mathcal{Y}(-\gamma) = 0, \quad (40)$$

где для краткости обозначено

$$\gamma = \frac{1}{k}. \quad (41)$$

Это  $\gamma$  не следует путать с фигурирующим в формулах (3), (5) и (6) углом рассеяния, обозначавшимся той же буквой; оба обозначения традиционны.

Заметим, что функции  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$  удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{X}(\mu)\mathcal{X}(-\mu) - \mathcal{Y}(\mu)\mathcal{Y}(-\mu) = T(\mu). \quad (42)$$

Если в (37)-(38)  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$  считать известными, то эти уравнения можно рассматривать как линейную систему для  $X$  и  $Y$ . Определитель этой системы, согласно (42), есть функция  $T(\mu)$ , а ее решение - это линейные уравнения (35) и (36). При  $\mu = 1/k \equiv \gamma$  из (42) получаем

$$\mathcal{X}(\gamma)\mathcal{X}(-\gamma) - \mathcal{Y}(\gamma)\mathcal{Y}(-\gamma) = 0. \quad (43)$$

В предельном случае полубесконечной атмосферы мы имеем  $\mathcal{Y}(\mu) = 0$ , и (42) переходит в известную Винер-Хопфовскую факторизацию

$$T(\mu) = \mathcal{H}(\mu)\mathcal{H}(-\mu), \quad (44)$$

где

$$\mathcal{H}(\mu) = 1 - \mu \int_0^1 \frac{H(\mu')}{\mu + \mu'} \Psi(\mu') d\mu' = \frac{1}{H(\mu)}. \quad (45)$$

Введем также следующие восходящие к Чандрасекару [6] обозначения для обобщенных моментов  $X(\mu)$  и  $Y(\mu)$ :

$$x_n = \int_0^1 \mu^n X(\mu) \Psi(\mu) d\mu, \quad y_n = \int_0^1 \mu^n Y(\mu) \Psi(\mu) d\mu, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (46)$$

Пусть  $h_n$  - аналогичный момент  $H$ -функции:

$$h_n = \int_0^1 \mu^n H(\mu) \Psi(\mu) d\mu. \quad (47)$$

Обозначим, далее,

$$\varphi_n = \int_0^1 \mu^n \Psi(\mu) d\mu. \quad (48)$$

Моменты  $x_n$  следует отличать от коэффициентов разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра, см. формулу (3) и следующие за ней в разделе 2.

Нулевые моменты  $X(\mu)$  и  $Y(\mu)$  удовлетворяют, как известно, соотношению (см., например, [6], разд.57)

$$x_0^2 - 2x_0 + \lambda = y_0^2, \quad (49)$$

которое в предельном случае полубесконечной атмосферы даст

$$h_0 = 1 - \sqrt{1 - \lambda}. \quad (50)$$

Из соотношений между моментами старших порядков нам понадобится лишь следующее:

$$2(1-x_0)x_2 + 2y_0y_2 + x_1^2 - y_1^2 = 2\varphi_2. \quad (51)$$

При  $\tau_0 = \infty$  оно принимает вид

$$2\sqrt{1-\lambda} h_2 + h_1^2 = 2\varphi_2. \quad (52)$$

Из (33)-(34) следует, что

$$\mathcal{X}(\infty) = 1 - x_0, \quad \mathcal{Y}(\infty) = y_0, \quad (53)$$

а (35) - (36) при  $\mu = \infty$  дают, если учесть (49),

$$X(\infty) = Y(\infty) = (1 - x_0 + y_0)^{-1}. \quad (54)$$

В частном случае консервативного рассеяния вместо (49) будем иметь

$$x_0 + y_0 = 1, \quad (55)$$

что есть краткая запись соотношения (27). Формула же (28) во введенных только что обозначениях принимает вид

$$x_1 - y_1 = \tau_0 y_0. \quad (56)$$

В консервативном случае соотношение (51) записывается так:

$$2y_0(x_2 + y_2) + x_1^2 - y_1^2 = 2\varphi_2, \quad (57)$$

а (54) дает

$$X(\infty) = \frac{1}{2y_0}. \quad (58)$$

**5. Общее решение.** Как уже говорилось, решение линейных уравнений (19)-(20) неединственно, поскольку соответствующая однородная система имеет нетривиальные решения. Можно показать [11], что существуют два линейно независимых решения однородной системы. Одно из них есть

$$x(\mu) = \frac{\mu}{1 - k\mu} [\mathcal{X}(\gamma)X(\mu) + \mathcal{Y}(\gamma)Y(\mu)], \quad (59)$$

$$y(\mu) = -\frac{\mu}{1 + k\mu} [\mathcal{Y}(\gamma)X(\mu) + \mathcal{X}(\gamma)Y(\mu)], \quad (60)$$

а другое отличается от этого тем, что в качестве  $x(\mu)$  стоит правая часть (60), а в качестве  $y(\mu)$  - правая часть (59), т.е.  $x(\mu)$  и  $y(\mu)$  переставлены местами. Поэтому общее решение  $\tilde{X}(\mu), \tilde{Y}(\mu)$  уравнений (19)-(20) имеет вид

$$\tilde{X}(\mu) = X(\mu) + C^+ x(\mu) + C^- y(\mu), \quad (61)$$

$$\tilde{Y}(\mu) = Y(\mu) + C^+ y(\mu) + C^- x(\mu), \quad (62)$$

где  $C^{\pm}$  - произвольные постоянные.

Ниже предлагается метод, позволяющий получать итеративные решения нелинейных уравнений (16)-(17), которые быстро сходятся всегда, даже при консервативном и почти консервативном рассеянии и большой оптической толщине слоя  $\tau_0$ .

6. *Альбедный сдвиг для X- и Y-функций.* Пусть  $k_1$  - произвольное вещественное число,  $k_1 \in (-\infty, +\infty)$ . Введем семейство характеристических функций  $\Psi_1(\mu)$ , зависящих от параметра  $k_1$ , таких, что

$$\frac{\Psi_1(\mu)}{1 - k_1^2 \mu^2} = \frac{\Psi(\mu)}{1 - k^2 \mu^2}. \quad (63)$$

Согласно (22) и (63), мы имеем

$$2 \int_0^1 \frac{\Psi_1(\mu)}{1 - k_1^2 \mu^2} d\mu = 1, \quad (64)$$

т.е. характеристическое уравнение (22) сохраняет свой вид. Обозначим, далее, через  $T_1(\mu)$  дисперсионную функцию, соответствующую характеристической функции  $\Psi_1(\mu)$ :

$$T_1(\mu) = 1 - 2\mu^2 \int_0^1 \frac{\Psi_1(\mu')}{\mu^2 - \mu'^2} d\mu'. \quad (65)$$

Из (63) и (21) легко получить, что  $T_1$  и  $T$  связаны между собой так же, как и характеристические функции  $\Psi_1$  и  $\Psi$ :

$$\frac{T_1(\mu)}{1 - k_1^2 \mu^2} = \frac{T(\mu)}{1 - k^2 \mu^2}. \quad (66)$$

Из (66) при  $\mu \rightarrow \infty$  следует, что

$$\frac{1 - \lambda_1}{k_1^2} = \frac{1 - \lambda}{k^2}, \quad (67)$$

где

$$\lambda_1 = 2 \int_0^1 \Psi_1(\mu) d\mu. \quad (68)$$

Величину  $\lambda_1$  будем называть *смещенным альбедо* однократного рассеяния. За счет выбора параметра  $k_1$  значение  $\lambda_1$  можно изменять по произволу.

Обозначим через  $X_1(\mu)$ ,  $Y_1(\mu)$  физическое решение системы линейных уравнений вида (19)-(20), в которой вместо  $\Psi(\mu')$  под интегралами стоит  $\Psi_1(\mu')$ . Будем называть эту систему *смещенной по альбедо*. Аналогично вводятся и смещенные по альбедо нелинейные уравнения для  $X_1$  и  $Y_1$ . Пусть, далее,  $\tilde{X}_1(\mu)$  и  $\tilde{Y}_1(\mu)$  - общее решение такой смещенной по альбедо системы. Оно дается, очевидно, формулами типа (59)-(62),

в которых  $k$  заменено на  $k_1$ , вместо  $\gamma$  стоит  $\gamma_1 = 1/k_1$ , функции  $X$  и  $Y$  заменены на  $X_1$  и  $Y_1$  и, наконец,  $C^\pm$  - на  $C_1^\pm$ , т.е. фактически все величины, входящие в (59)-(62), снабжены индексом 1 (разумеется, кроме аргумента  $\mu$ ).

Пусть, далее,  $X$  и  $Y$  - обсуждавшееся выше физическое решение исходных, не смещенных по альбедо, уравнений. Справедливо следующее утверждение [4]. Физическое решение исходной задачи  $X(\mu)$ ,  $Y(\mu)$  может быть полностью восстановлено по регулярному решению  $X_1(\mu)$ ,  $Y_1(\mu)$  смещенной по альбедо вспомогательной задачи с произвольно взятым значением параметра  $k_1$ . Для этого постоянные  $C_1^\pm$  в выражениях для  $\bar{X}_1(\mu)$  и  $\bar{Y}_1(\mu)$  следует выбрать так, чтобы

$$\bar{X}_1(\gamma) = 0, \quad \bar{Y}_1(\gamma) = 0. \quad (69)$$

При таком выборе  $C_1^\pm$  окажутся выполненными следующие соотношения:

$$(1 - k^2 \mu^2) X(\mu) = (1 - k_1^2 \mu^2) \bar{X}_1(\mu), \quad (70)$$

$$(1 - k^2 \mu^2) Y(\mu) = (1 - k_1^2 \mu^2) \bar{Y}_1(\mu). \quad (71)$$

Формулы (69)-(71) являются для нас основными.

Соотношения (69), служащие для нахождения постоянных  $C_1^\pm$ , полезно выписать в развернутом виде:

$$x_1(\gamma) C_1^+ + y_1(\gamma) C_1^- = -X_1(\gamma), \quad (72)$$

$$y_1(\gamma) C_1^+ + x_1(\gamma) C_1^- = -Y_1(\gamma), \quad (73)$$

где согласно (59) и (60)

$$x_1(\gamma) = \frac{1}{k - k_1} [\mathcal{L}_1(\gamma_1) X_1(\gamma) + \mathcal{Y}_1(\gamma_1) Y_1(\gamma)], \quad (74)$$

$$y_1(\gamma) = -\frac{1}{k + k_1} [\mathcal{Y}_1(\gamma_1) X_1(\gamma) + \mathcal{L}_1(\gamma_1) Y_1(\gamma)] \quad (75)$$

В консервативном случае система (72)-(73) вырождается в одно уравнение. Можно показать (см. Приложение), что в этом случае вместо (72)-(73) постоянные  $C_1^\pm$  могут быть найдены из соотношений

$$(C_1^+ + C_1^-) [\mathcal{L}_1(\gamma_1) + \mathcal{Y}_1(\gamma_1)] = k_1, \quad (76)$$

$$(C_1^+ - C_1^-) [(-2X_1(\infty) + \Delta_1) \mathcal{L}_1(\gamma_1) + (-2X_1(\infty) - \Delta_1) \mathcal{Y}_1(\gamma_1)] = k_1 \Delta_1, \quad (77)$$

где

$$\Delta_1 = -\frac{k_1}{1 - \lambda_1} [\tau_0 - \tau_0(x_{10} - y_{10}) - 2(x_{11} - y_{11})]. \quad (78)$$

Моменты  $x_{1i}$ ,  $y_{1i}$ , входящие в (78), относятся к смещенным по альбедо функциям  $X_1$  и  $Y_1$ . Первый индекс (1) указывает на факт смещения по альбедо, а второй ( $i$ ) - порядок момента.

В частном случае полубесконечной атмосферы ( $\tau_0 = \infty$ ) мы имеем  $X_1(\mu) = H_1(\mu)$ ,  $Y_1(\mu) = 0$ . Пусть  $\tilde{H}_1(\mu)$  - общее решение линейного уравнения вида (32) для  $H_1(\mu)$ . Оно имеет вид

$$\tilde{H}_1(\mu) = H_1(\mu) + C_1 \frac{\mu}{1 - k_1 \mu} H_1(\mu), \quad (79)$$

где  $C_1$  - произвольная постоянная. Эту формулу легко получить как непосредственно из уравнения (32), так и в качестве предельного случая выражения для  $\tilde{X}_1(\mu)$  вида (61). Если потребовать, чтобы  $\tilde{H}_1(\gamma) = 0$ , что представляет собой предельный случай первой из формул (69), то мы найдем, что  $C_1 = k_1 - k$ . Вводя (79) при этом значении  $C_1$  в формулу

$$(1 - k^2 \mu^2) H(\mu) = (1 - k_1^2 \mu^2) \tilde{H}_1(\mu), \quad (80)$$

являющуюся предельным случаем (70), соответствующим  $\tau_0 = \infty$ , получаем

$$(1 + k \mu) H(\mu) = (1 + k_1 \mu) H_1(\mu). \quad (81)$$

Это соотношение, полученное ранее Х.Домке [1], послужило затем отправным пунктом при формулировке метода альбедного сдвига [2].

## 7. Численная реализация метода

7.1. *Схема расчета.* Расчет  $X$ - и  $Y$ -функций для индикатрисы Хеньи-Гринстейна по описанной выше методике осуществляется следующим образом.

1. Задаются оптические параметры. Их три. Два из них, альбедо частицы  $a$  и параметр вытянутости индикатрисы  $g$ , характеризуют элементарный акт рассеяния, третий - это оптическая толщина слоя  $\tau_0$ . Итак, искомые функции  $X$  и  $Y$  зависят от одного аргумента ( $\mu$ ) и трех параметров.

2. Выбирается значение параметра  $k_1$ . Это тот свободный параметр, варьируя которым мы можем менять значение  $\lambda_1$ , тем самым регулируя скорость сходимости итеративных решений уравнений для функций  $X_1(\mu)$  и  $Y_1(\mu)$ . Более подробно влияние  $k_1$  на сходимость обсуждается в разделе 8.2.

3. Осуществляется дискретизация нелинейных уравнений для  $X_1(\mu)$  и  $Y_1(\mu)$ . Для вычисления интегралов мы использовали квадратурную формулу Симпсона. При решении уравнения для функции  $Y_1$  следует учитывать, что при  $\mu' = \mu$  в подынтегральном выражении появляется неопределенность вида  $0/0$ . Раскрываем ее:

$$\frac{Y_1(\mu)X_1(\mu') - X_1(\mu)Y_1(\mu')}{\mu - \mu'} = X_1(\mu)Y_1'(\mu) - Y_1(\mu)X_1'(\mu). \quad (82)$$

В результате оказывается, что нужно иметь не только сами функции  $X_1(\mu)$  и  $Y_1(\mu)$ , но и их производные. Эти производные вычислялись по пятиточечным формулам. Именно, для произвольной функции  $f = f(z)$  не у границ промежутка интегрирования бралось обычное пятиточечное представление производной ( $i = 2, 3, \dots, n-3, n-2$ ):

$$f_i' = \frac{1}{12h} (f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}). \quad (83)$$

На левом и правом концах промежутка производные вычислялись, соответственно, по формулам

$$f_0' = \frac{1}{12h} (-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4), \quad (84)$$

$$f_n' = \frac{1}{12h} (3f_{n-4} - 16f_{n-3} + 36f_{n-2} - 48f_{n-1} + 25f_n), \quad (85)$$

а в непосредственно соседствующих с ними точках - по формулам

$$f_1' = \frac{1}{12h} (-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4), \quad (86)$$

$$f_{n-1}' = \frac{1}{12h} (-f_{n-4} + 6f_{n-3} - 18f_{n-2} + 10f_{n-1} + 3f_n). \quad (87)$$

В (83)-(87)  $f_i \equiv f(z_i)$ ,  $f_i' \equiv f'(z_i)$ , а  $h \equiv z_{i+1} - z_i$  - шаг дискретизации.

4. Производится расчет характеристической функции. Вначале вычисляем  $\Psi(\mu)$  по формулам (9)-(12), а затем  $\Psi_1(\mu)$  по формуле (63). Следует отметить, что для сильно вытянутых индикатрис сходимость ряда (9) медленная, так что необходимо брать большое число членов разложения. В наших расчетах в (9) удерживались, как правило, члены вплоть до  $i = N = 100$ . Для проверки точности характеристическая функция  $\Psi(\mu)$  вычислялась также по следующему альтернативному представлению (см. [8], разд. 6.2.2):

$$\Psi(\mu) = \frac{N+1}{2\mu} (P_{N+1}(\mu)R_N(\mu) - P_N(\mu)R_{N+1}(\mu)). \quad (88)$$

5. Выполняется решение нелинейных уравнений вида (16)-(17) для  $X_1$  и  $Y_1$  методом простой итерации.

6. По функциям  $X_1(\mu)$  и  $Y_1(\mu)$  восстанавливаются значения  $X(\mu)$  и  $Y(\mu)$  (формулы (70)-(71)). Для этого необходимо найти коэффициенты  $C_1^\pm$ , входящие в выражения для  $\tilde{X}_1(\mu)$  и  $\tilde{Y}_1(\mu)$ . Это требует решения линейной системы двух уравнений (72)-(73) (либо (76)-(77) в консер-

вативном случае).

7.2. *Оценка точности результатов.* Самым убедительным свидетельством правильности работы наших программ является совпадение значений  $X$  и  $Y$ , восстанавливаемых по функциям  $X_1$  и  $Y_1$ , рассчитанным для различных значений параметра  $k_1$ .

Для оценки точности, которую дают наши расчеты, были также выполнены сравнения их результатов с имеющимися в литературе данными.

Во-первых, для предельного случая полубесконечной среды имеются таблицы  $H$ -функций для случая индикатрисы Хензи-Гринштейна [12]. При  $g < 0.7$  наши результаты показали полное согласие с приводимыми в этой работе (совпадают все 5 значащих цифр). Однако в случае вытянутых индикатрис ( $g \geq 0.7$ ) имеется расхождение в несколько единиц четвертого знака, что, вероятно, связано с неточностью расчетов А.К.Колессова. Такое заключение основано на следующем факте. Если в разложении  $\Psi(\mu)$  в ряд удержать  $\sim 40$  членов (а не 100, как делали мы), то расхождение с результатами А.К.Колессова существенно уменьшается (до 1-2 единиц пятого знака).

Во-вторых, для изотропного рассеяния ( $g = 0$ ) имеется целый ряд расчетов функций  $X$  и  $Y$  (см., например, [13-15]). В различных областях значений параметров  $\tau_0$  и  $a$  имеющиеся таблицы разных авторов, как известно, обладают различной точностью (обсуждение см., например, в [15]). Сравнение с опубликованными значениями, а также проверка того, с какой точностью выполняются приведенные выше в разделе 4 соотношения между моментами функций  $X$  и  $Y$  (или  $H$ -функции) позволяет утверждать, что наша программа обеспечивает точность не хуже 1 - 2 единиц пятой значащей цифры.

## 8. Численные результаты.

8.1. *Псевдоальbedo.* Начнем с обсуждения вопроса о связи альbedo однократного рассеяния  $a$  и псевдоальbedo  $\lambda$ , определенного формулой (13). На рис.1 приведено семейство кривых, дающих  $\lambda = \lambda(a)$  для нескольких значений параметра асимметрии  $g$ . Любопытный факт состоит в том, что при фиксированном  $a$ ,  $a < 1$ , значения псевдоальbedo  $\lambda$  с ростом  $g$  увеличиваются. Когда индикатриса сильно вытянута вперед (большие  $g$ ), значения  $\lambda$  оказываются очень близкими к 1 даже тогда, когда отличия  $a$  от 1 довольно значительны. Так, при  $a = 0.8$  роль многократных рассеяний в исходной физической задаче сравнительно небольшая: среднее число рассеяний (в бесконечной среде)  $1/(1-a) = 5$ , а после всего 10 рассеяний выживает лишь порядка 10% фотонов ( $0.8^{10} = 0.107$ ). Если же индикатриса сильно вытянута вперед, например  $g = 0.8$ , то псевдоальbedo  $\lambda$  оказывается равным  $\lambda = 0.997$ , так что параметр  $1/(1-\lambda)$ , дающий среднее число "псевдорассеяний" в

бесконечной среде, равен  $\sim 330$ , а после 10 "псевдорассеяний" выживает 97% "псевдофотонов".

Итак, хотя традиционное сведение уравнений переноса к псевдозадаче в целом дает хорошо известное огромное упрощение (системы уравнений

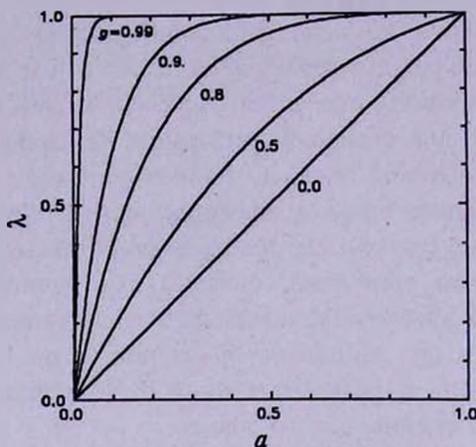


Рис.1. Псевдоальбедо  $\lambda$  как функция альбедо  $a$  при различных значениях параметра вытянутости индикатрисы  $g$ .

высокого порядка заменяются на одно уравнение), при этом появляется побочная трудность - резкое ухудшение сходимости итеративных решений уравнения для псевдоинтенсивности (и порождаемых им). Этот факт ранее, видимо, не отмечался.

8.2. *H-функция.* Приведем вначале некоторые данные, относящиеся к предельному случаю полубесконечных атмосфер. Нелинейное уравнение вида (30) для смещенной  $H$ -функции решалось методом прямой итерации. На рис.2 приведена зависимость числа итераций, необходимых для достижения точности  $10^{-8}$  (относительная погрешность последовательных итераций). Приведенные на рис.2 данные относятся к сильно вытянутой индикатрисе ( $g = 0.8$ ). В случае консервативного рассеяния прямые итерации "несмещенного"  $H$ -уравнения не сходятся, тогда как для смещенного по альбедо уравнения имеются такие значения параметра  $k_1$ , при которых для достижения указанной выше точности достаточно всего 17 итераций, так что каждые две итерации уменьшают погрешность на порядок. Оптимальное значение  $k_1$  оказывается в этом случае около 8.5 (рис.2А). Ему соответствует смещенное альбедо  $\lambda_1 \approx 0.6$  (рис.2Б). С уменьшением альбедо однократного рассеяния  $a$  наивысшая скорость сходимости несколько увеличивается, а оптимальное значение  $k_1$  уменьшается. Так, при  $a = 0.9$  оно близко к  $k_1 = 7$ .

На рис.3 приведены графики функций  $H_1(\mu)$ , соответствующих

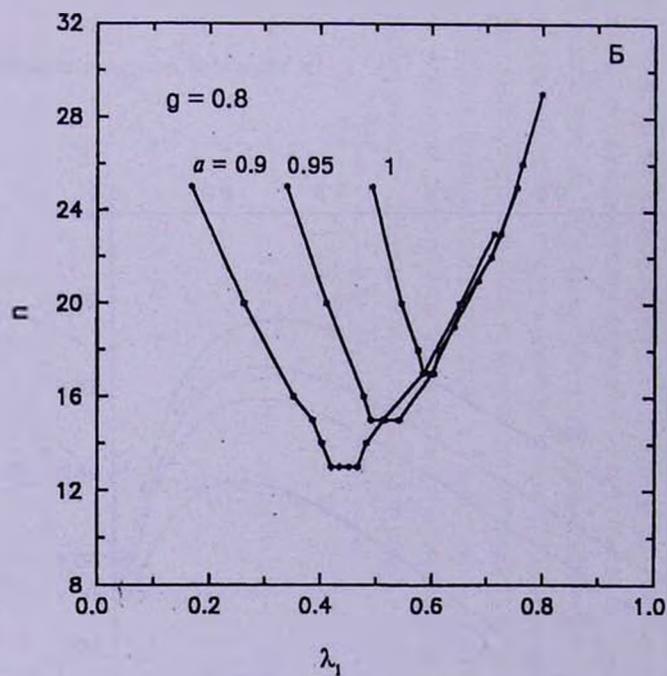
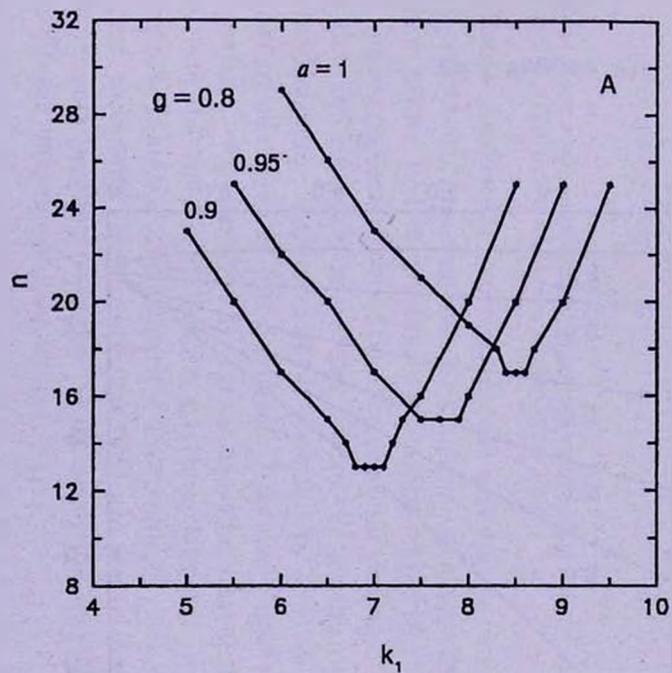


Рис.2. Зависимость числа итераций  $n$  от параметра  $k_1$  (рис.А) и от "сдвинутого" альbedo  $\lambda_1$  (рис.Б) для нескольких значений альbedo частицы  $a$ .

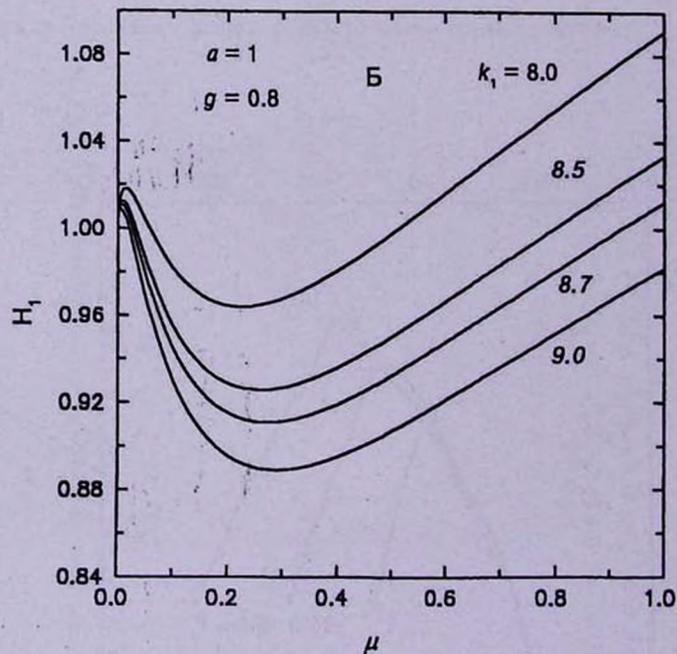
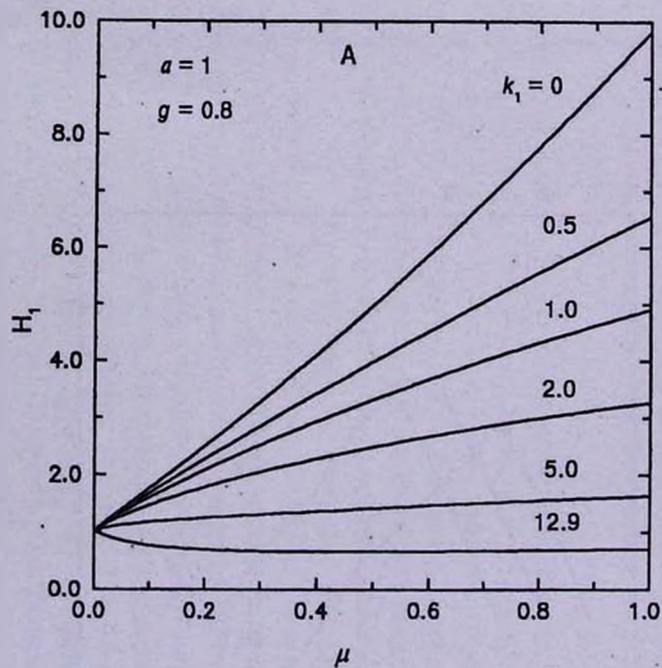


Рис.3. Функции  $H_1(\mu)$  для различных значений параметра  $k_1$ .

различным значениям  $k_1$ . По любой из них несмещенная  $H$ -функция может быть найдена из соотношения (81). При значениях  $k_1$ , обеспечивающих самую быструю сходимость итераций ( $k_1 \sim 8.5 + 8.7$ ), значения соответствующих функций  $H_1(\mu)$  при всех  $\mu \in [0,1]$  отличаются от 1 менее чем на 10% (рис.3Б), тогда как  $H$ -функция исходной задачи (в консервативном случае соответствующая  $k_1 = 0$ ) изменяется на порядок.

Эти данные относились к конкретному значению  $g$ , именно,  $g = 0.8$ . Как зависит оптимальное значение  $k_1$ , т.е. такое, которое обеспечивает самую быструю сходимость, от параметра асимметрии индикатрисы  $g$ ? Соответствующие данные представлены на рис.4.

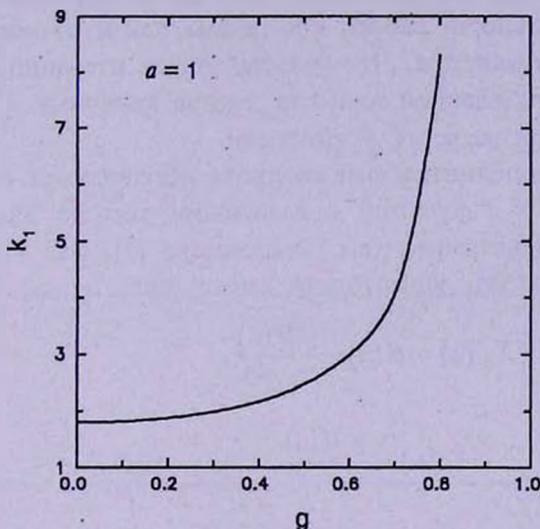


Рис.4. Зависимость параметра  $k_1$ , обеспечивающего самую быструю сходимость итераций, от значения параметра вытянутости индикатрисы  $g$ .

Общее заключение, которое можно сделать на основе проведенных нами численных экспериментов, сводится к следующему. Альбедный сдвиг в случае полубесконечных атмосфер эффективен не только при изотропном рассеянии, что было установлено уже давно [1,2], но и при сильной анизотропии рассеяния. Значение смещенного альбеда  $\lambda_1$ , обеспечивающее самую быструю сходимость итераций, существенно зависит от вытянутости индикатрисы. С ростом  $g$  оно возрастает (от  $\sim 0$  при  $g=0$  до  $\sim 0.6$  при  $g=0.8$ ). Таким образом, полученный в [2] вывод о том, что значение  $\lambda_1 = 0$  близко к оптимальному, который был сделан из анализа данных, относящихся к изотропному рассеянию, на анизотропное рассеяние не переносится. То, что это может так оказаться, было указано недавно в работе [5] из аналитических соображений, без привлечения численных данных.

8.3. *X- и Y-функции.* Обратимся теперь к случаю конечных  $\tau_0$ . Расчеты выполнялись по схеме, детально описанной в разделе 8.1. Проиллюстрируем на графиках, как происходит восстановление физического решения. Ограничимся случаем консервативного рассеяния. На рис.5 приведены графики  $X_1$ - и  $Y_1$ -функций для  $\tau_0 = 1$ ,  $g = 0.5$ , соответствующие двум разным значениям  $k_1$ , именно,  $k_1 = 1.1$  и  $k_1 = 1.9$ . По формулам восстановления по этим "смещенным"  $X_1$ - и  $Y_1$ -функциям были рассчитаны функции  $X$  и  $Y$ . Им на рисунках соответствуют кривые  $k_1 = 0$ . Как уже говорилось, совпадение функций  $X$  и  $Y$ , восстановленных по  $X_1$  и  $Y_1$ , рассчитанным для различных значений  $k_1$ , служит надежным контролем как правильности работы программы, так и точности полученных численных результатов. Что касается числа итераций, необходимых для достижения заданной точности, то при конечных  $\tau_0$  оно того же порядка, что и при расчетах  $H_1$ -функций.

При больших  $\tau_0$  дополнительный контроль обеспечивает сравнение восстановленных  $X$ - и  $Y$ -функций с даваемыми хорошо известными асимптотическими формулами (см., например, [7], гл. VI, §6). В консервативном случае эти асимптотики имеют вид

$$X_{as}(\mu) = H(\mu) - \frac{\mu H(\mu)}{\tau_0 + \delta}, \quad (89)$$

$$Y_{as}(\mu) = \frac{\mu H(\mu)}{\tau_0 + \delta}, \quad (90)$$

где

$$\delta = 2 \frac{h_2}{h_1}. \quad (91)$$

При изотропном рассеянии ( $g = 0$ ) эти формулы уже при  $\tau_0 = 5$  обеспечивают точность в одну единицу пятого знака для  $X(\mu)$  и в три единицы третьего знака для  $Y(\mu)$ . При  $g = 0.5$  точность примерно на порядок ниже. При  $\tau_0 = 10$  даже для  $Y$ -функции асимптотики обеспечивают точность в четыре значащие цифры.

В качестве иллюстрации в табл.1 для  $\tau_0 = 5$ ,  $g = 0.5$  мы приводим значения  $X_1$  и  $Y_1$ , рассчитанные для  $k_1 = 1.8$ , восстановленные по этим  $X_1$  и  $Y_1$  значения физических  $X$ - и  $Y$ -функций, а также асимптотики  $X_{as}(\mu)$  и  $Y_{as}(\mu)$ , найденные по формулам (89) и (90). На рис.6 показан пример восстановления  $X$  и  $Y$  для вдвое большего значения  $\tau_0$ , чем в табл.1, именно  $\tau_0 = 10$ . При таком  $\tau_0$  расчет дает фактически  $X_{as}$  и  $Y_{as}$ .

9. *Заключение.* Основные результаты работы можно резюмировать следующим образом.

1. Рассмотрена стандартная задача о диффузном отражении и

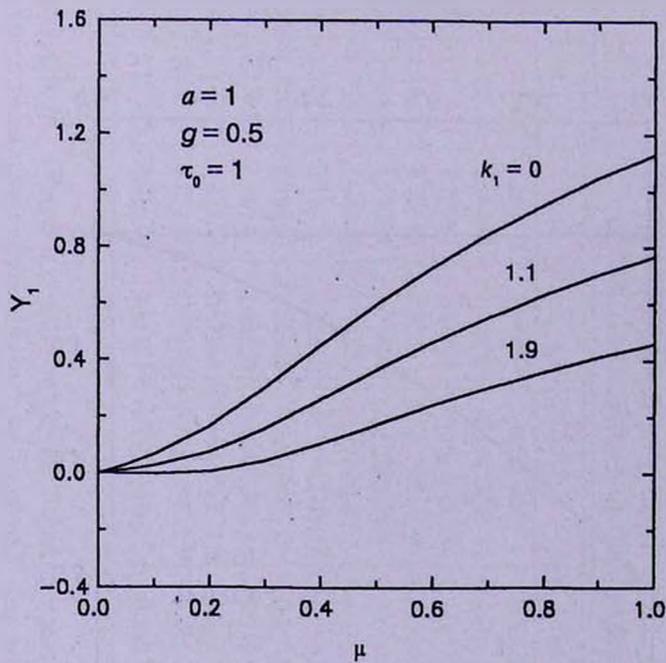
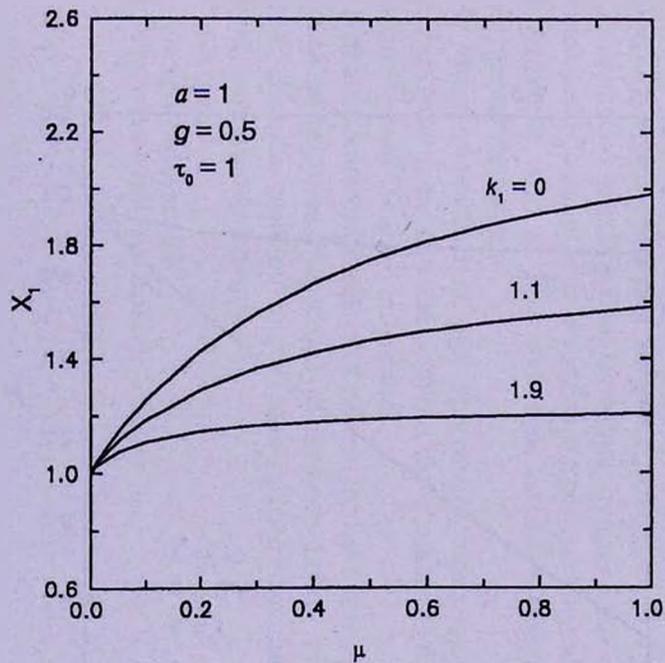


Рис.5. Функции  $X_1(\mu)$  и  $Y_1(\mu)$  для двух значений параметра  $k_1$ . Оптическая толщина атмосферы  $\tau_0 = 1$ . Кривые, относящиеся к  $k_1 = 0$ , соответствуют физическому решению.

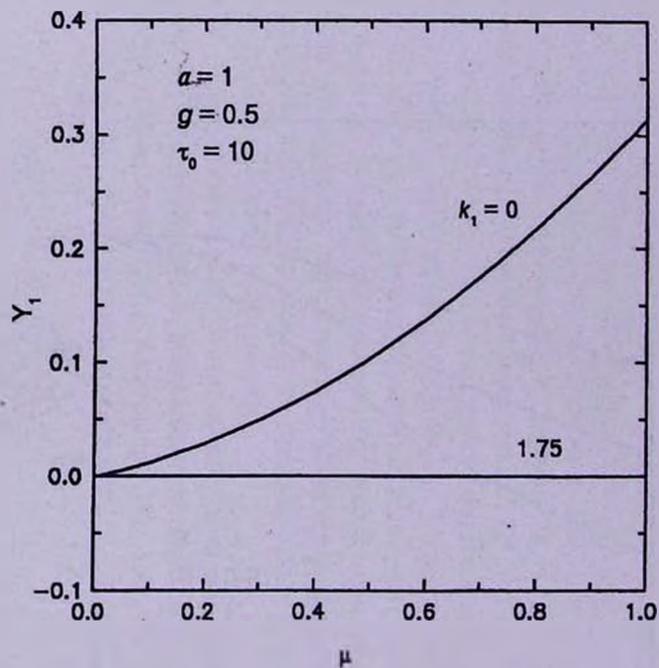
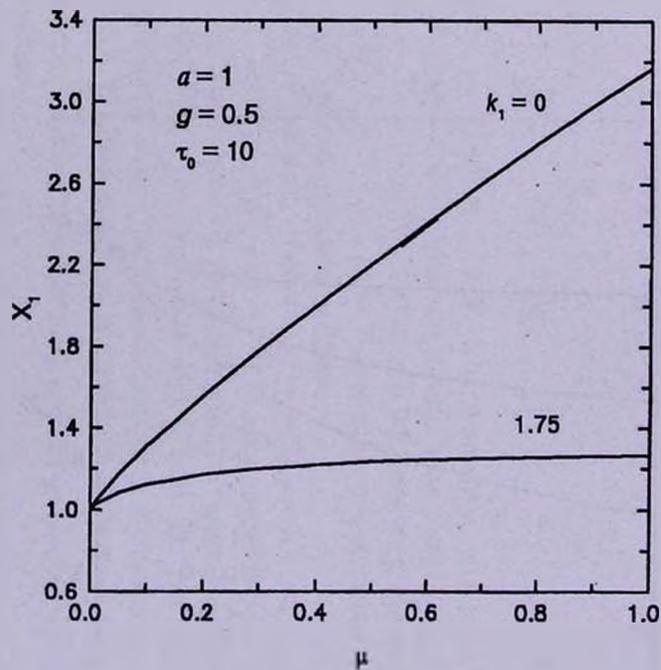


Рис.6. Пример восстановления физического решения для атмосферы большой оптической толщины ( $\tau_0 = 10$ ).

Таблица 1

ФУНКЦИИ  $X_1$ ,  $Y_1$  ДЛЯ  $k_1 = 1.8$ , ВОССТАНОВЛЕННЫЕ ПО НИМ  
 $X$  И  $Y$ , А ТАКЖЕ  $X_{\infty}$ ,  $Y_{\infty}$  ДЛЯ  $\tau_0 = 5$ ,  $g = 0.5$   
 (КОНСЕРВАТИВНЫЙ СЛУЧАЙ)

$\mu$	$X_1(\mu)$	$X(\mu)$	$X_{\infty}(\mu)$	$Y_1(\mu)$	$Y(\mu)$	$Y_{\infty}(\mu)$
0.00	1.00000	1.00000	1.00000	0.000000	0.000000	0.000000
0.05	1.08056	1.16815	1.16815	-0.366995E-5	0.965410E-2	0.965531E-2
0.10	1.11941	1.29924	1.29924	-0.861471E-5	0.216539E-1	0.216567E-1
0.20	1.16422	1.53142	1.53142	-0.237041E-4	0.519124E-1	0.519189E-1
0.30	1.18986	1.74227	1.74226	-0.502939E-4	0.901178E-1	0.901283E-1
0.40	1.20638	1.93890	1.93889	-0.926763E-4	0.136071	0.136080
0.50	1.21778	2.12411	2.12410	-0.114427E-3	0.189687	0.189677
0.60	1.22603	2.29929	2.29928	0.325053E-4	0.250888	0.250864
0.70	1.23223	2.46525	2.46522	0.614131E-3	0.319462	0.319609
0.80	1.23701	2.62253	2.62241	0.194031E-2	0.394959	0.395889
0.90	1.24078	2.77157	2.77116	0.428187E-2	0.476684	0.479691
1.00	1.24382	2.91275	2.91171	0.782405E-2	0.563761	0.571004

пропускании. Показано, что метод альбедного сдвига применим при анизотропном рассеянии. Даже при сильной анизотропии рассеяния, когда характеристическое уравнение имеет более одного корня, альбедный сдвиг позволяет добиться быстрой сходимости итеративного решения нелинейного уравнения для  $H$ -функции.

2. Детально рассмотрена методика применения альбедного сдвига для ускорения сходимости итеративных решений нелинейных уравнений для функций  $X(\mu)$  и  $Y(\mu)$  как при наличии поглощения, так и в консервативном случае.

3. Метод реализован в виде программы, позволяющей рассчитывать  $X$ - и  $Y$ -функции как при изотропном, так и при анизотропном рассеянии с индикатрисой Хензи-Гринштейна.

В подготавливаемой сейчас к печати статье будет проиллюстрирована высокая эффективность метода альбедного сдвига также и для итеративного расчета функций источников в рассеивающих атмосферах конечной оптической толщины.

## Приложение

Запишем систему (72)-(73) в следующей форме:

$$C_1^+ + C_1^- = -\frac{X_1(\gamma) + Y_1(\gamma)}{x_1(\gamma) + y_1(\gamma)}, \quad (A1)$$

$$C_1^+ - C_1^- = -\frac{X_1(\gamma) - Y_1(\gamma)}{x_1(\gamma) - y_1(\gamma)}. \quad (A2)$$

Из формул (74)-(75) можно получить

$$\frac{x_1(\gamma) - y_1(\gamma)}{X_1(\gamma) - Y_1(\gamma)} = \frac{1}{k^2 - k_1^2} \left[ \mathcal{X}_1(\gamma_1) \left( k \frac{X_1(\gamma) + Y_1(\gamma)}{X_1(\gamma) - Y_1(\gamma)} + k_1 \right) + \mathcal{Y}_1(\gamma_1) \left( k \frac{X_1(\gamma) + Y_1(\gamma)}{X_1(\gamma) - Y_1(\gamma)} - k_1 \right) \right] \quad (A3)$$

В консервативном случае, учитывая, что  $X_1(\infty) = Y_1(\infty)$ , из (74)-(75) получим

$$x_1(\infty) = y_1(\infty) = -\frac{X_1(\infty)}{k_1} [\mathcal{X}_1(\gamma_1) + \mathcal{Y}_1(\gamma_1)]. \quad (A4)$$

Уравнение (A1) при учете (A4) приводится к виду (76). В левой же части уравнения (A2) появляется неопределенность вида 0/0. Чтобы ее раскрыть, воспользуемся следующими разложениями при  $\mu \rightarrow \infty$  (см. [16], разд. 8.2):

$$X_1(\mu) = X_1(\infty) - \frac{\alpha}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \quad (A5)$$

$$Y_1(\mu) = X_1(\infty) - \frac{\beta}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \quad (A6)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - некоторые коэффициенты, зависящие от параметров задачи  $a$ ,  $g$ ,  $\tau_0$  и  $k_1$ .

Из формул (A5) и (A6) при  $\mu = \gamma$  имеем

$$X_1(\gamma) + Y_1(\gamma) = 2X_1(\infty) - k(\alpha + \beta) + O(k^2), \quad (A7)$$

$$X_1(\gamma) - Y_1(\gamma) = -k(\alpha - \beta) + O(k^2), \quad (A8)$$

откуда

$$\frac{X_1(\gamma) + Y_1(\gamma)}{X_1(\gamma) - Y_1(\gamma)} = -\frac{2X_1(\infty) - k(\alpha + \beta)}{k(\alpha - \beta)} + O(k). \quad (A9)$$

Подставляя (A9) в (A3) и вводя полученный результат в (A2), получим искомое соотношение (77), в котором

$$\Delta_1 = k_1(\alpha - \beta) + O(k). \quad (\text{A10})$$

Величину  $\alpha - \beta$  можно выразить через моменты функций  $X_1$  и  $Y_1$ . Поступим следующим образом. При  $\mu \rightarrow \infty$  из (65) имеем

$$T_1(\mu) = 1 - \lambda_1 + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \quad (\text{A11})$$

Подставляя в линейное уравнение для функции  $X_1(\mu)$  ее разложение (A5) и собирая члены при  $\mu^{-1}$ , получаем

$$(1 - \lambda_1)\alpha = -\tau_0 y_{10} + x_{11} - y_{11}. \quad (\text{A12})$$

Аналогично, из линейного уравнения для  $Y_1(\mu)$  находим

$$(1 - \lambda_1)\beta = \tau_0 - \tau_0 x_{10} - (x_{11} - y_{11}). \quad (\text{A13})$$

Из двух последних формул следует, что

$$\alpha - \beta = -\frac{1}{1 - \lambda_1} [\tau_0 - \tau_0(x_{10} - y_{10}) - 2(x_{11} - y_{11})], \quad (\text{A14})$$

что вместе с (A10) дает (78).

## ALBEDO SHIFTING TECHNIQUE IN PROBLEMS OF ANISOTROPIC LIGHT SCATTERING IN PLANE ATMOSPHERES

V.V.IVANOV, A.M.KASAUROV

The standard problem of radiative transfer theory is considered, i.e., diffuse reflection and transmission of light by a plane-parallel scattering atmosphere. Recently developed new approach to the problem, the so-called albedo shifting method is used for evaluation of the  $X$ - and  $Y$ -functions (and the  $H$ -function) for the case of anisotropic scattering with Henyey-Greenstein phase function. The method enables one to "dump" scattering and thus obtain high-accuracy iterative solutions even in those cases when the mean number of photon scattering in the atmosphere is large.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *H.Domke*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **39**, 283, 1988.
2. *V.V.Ivanov*, *G.B.Rybicki*, *A.M.Kasaurov*, Harvard - Smithsonian Center for Astrophysics Preprint Series N3478, 1992.
3. *В.В.Иванов*, Астрон. ж., **75**, 102, 1998.
4. *Д.И.Нагирнер*, Докл. Академии наук, **343**, 191, 1995.
5. *Н.Б.Енгибарян*, *Б.Н.Енгибарян*, Астрофизика, **38**, 417, 1995.
6. *С.Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
7. *В.В.Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Физматгиз, М., 1972.
8. *H.C. van de Hulst*, Multiple Light Scattering, vols. I and II, Academic Press, New York, 1980.
9. *Э.Г.Яновицкий*, Рассеяние света в неоднородных атмосферах, Изд. ГАО НАН Украины, Киев, 1995.
10. *I.Kuščer*, J. Math. Phys., **34**, 256, 1956.
11. *T.W.Mullikin*, Astrophys. J., **136**, 627, 1962.
12. *А.К.Колесов*, Труды Астрон. обсерв. ЛГУ, **28**, 3, 1971.
13. *J.L.Carlstedt*, *T.W.Mullikin*, Astrophys. J. Suppl. Ser., **12**, N113, 1966.
14. *J.Caldwell*, Astrophys. J., **163**, 111, 1971.
15. *W.L.Dunn*, *R.D.M.Garcia*, *C.E.Siewert*, Astrophys. J., **260**, 849, 1982.
16. *V.V.Ivanov*, Transfer of Radiation in Spectral Lines, NBS SP N385 (Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office), 1973.