

УДК: 524.7-7

ОПИСАНИЕ СИНХРОКОМПТОНОВСКОГО МЕХАНИЗМА СВЕЧЕНИЯ ДЖЕТОВ АКТИВНЫХ ЯДЕР ГАЛАКТИК

Д.И.НАГИРНЕР, Л.С.НИКОЛАЕВА

Поступила 20 ноября 1997

Принята к печати 1 декабря 1997

Коэффициенты синхротронного излучения и поглощения, а также комптоновского ослабления в газе ультрарелятивистских электронов с хаотическим магнитным полем представлены быстро сходящимися степенными рядами при любых показателях степенного распределения электронов по энергиям. Для функции перераспределения по частотам приводятся точное и приближенное выражения. Результаты будут использованы для расчета свечения джетов активных ядер галактик.

1. *Введение.* Для объяснения явления джетов активных ядер галактик (АЯГ) и, в частности, их свечения было предложено несколько моделей (см., например, статью [1], книгу [2] и обзоры [3,4]). Наиболее предпочтительной является модель струи. При расчете свечения джета, струю, которая его моделирует, можно разбить на отдельные сгустки и представить их однородными плоскими слоями или шарами.

Вещество сгустка представляет собой однородную полностью ионизованную плазму со сравнительно слабым (не квантующим, так что электроны можно считать свободными) магнитным полем с хаотическим распределением по направлениям. Электроны плазмы, как обычно принимается в подобных моделях, считаются ультрарелятивистскими со степенным распределением по энергиям.

Электроны сгустка излучают синхротронное излучение, являющееся первичным источником фотонов. Низкочастотные синхротронные фотоны испытывают комптоновское рассеяние на тех же релятивистских электронах, которые их породили. В результате фотоны набирают энергию и переходят в более жесткие диапазоны частот (так называемый синхрокмптоновский механизм).

Таким образом, в уравнении переноса излучения в джете должны учитываться следующие процессы: синхротронное излучение и поглощение, а также комптоновское рассеяние электронами со степенным спектром. Не учитывается вынужденное рассеяние ввиду его малой роли, однако принято во внимание вынужденное синхротронное излучение,

что не нарушает линейности задачи.

Хаотичность магнитного поля означает, что все направления поля, которое, как мы считаем, имеет одну и ту же величину напряженности во всем сгустке, равновероятны, т.е. масштаб изотропизации магнитного поля считается меньше как размеров сгустка, так и масштаба углового усреднения наблюдателя. Это предположение требует пояснений.

Обычно при описании синхротронного излучения сначала находят мощность излучения электронов под определенным углом к магнитному полю. Вычисляется полная мощность излучения, что оправдывается тем, что почти все оно идет в узком конусе вблизи направления движения электрона [6,7]. При приложениях к астрофизическим объектам производится усреднение по направлениям поля вдоль луча зрения (см., например, [7]). При этом информация о поляризации пропадает. В нашей работе мы не рассчитываем поляризацию и принимаем, что хаотический характер поля имеет не только вдоль луча зрения, но и в пределах углового разрешения наблюдателя.

Тогда с самого начала можно считать, что все направления поля равновероятны в любом макроскопическом объеме и электронный газ в этом объеме излучает во все стороны одинаково.

Принятое приближение оправдывается тем, что хотя в настоящее время имеются наблюдения излучения АЯГ практически во всех диапазонах, с большим угловым разрешением джеты наблюдаются только в радиодиапазоне. В видимой области миллисекундное разрешение джетов недоступно и они явно обнаружены только у небольшого числа галактик [8]. Поляризация их излучения невелика.

Обычно при расчете синхрокомптоновского излучения ограничиваются однократным рассеянием, считая светящийся объект оптически тонким [9]. Однако каждое рассеяние перебрасывает фотон в более жесткую область спектра и поэтому даже малый вклад повторных рассеяний необходимо принимать во внимание. Работ, учитывающих многократное рассеяние, немного.

При расчете многократных рассеяний важно уметь вычислять коэффициенты поглощения и излучения достаточно быстро. Поэтому здесь после введения обозначений и записи уравнения переноса излучения будут получены удобные представления коэффициентов синхротронного поглощения и излучения, а также комптоновского ослабления в виде быстро сходящихся рядов. Тем самым будет определена правая часть уравнения переноса, то есть коэффициенты поглощения и излучения. На этом этапе геометрия сгустков не является существенной.

Введем основные величины, описывающие электронный и фотонный газы.

2. *Описание электронов и фотонов.* Обозначим импульс электрона в произвольной системе отсчета через \bar{p} . Его энергия $\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \bar{p}^2}$. В дальнейшем будут использоваться безразмерные величины: импульс $\bar{z} = \bar{p}/mc$ и энергия $\gamma = \mathcal{E}/mc^2$. Ясно, что $\gamma = \sqrt{1 + z^2}$.

Свяжем с электронным газом систему координат E (сопутствующую), в которой средний импульс электронов равен нулю. Все конкретные расчеты будем производить в системе E . Концентрацию электронов в системе E обозначим n_e , а инвариантную функцию распределения электронов по энергиям через $N(\gamma)$. Последняя в сопутствующей системе нормирована следующим образом:

$$4\pi \int_0^{\infty} z^2 N(\gamma) dz = 1. \quad (1)$$

Будем считать, что $N(\gamma) = C\gamma^{-\alpha}$, $\gamma_m \leq \gamma \leq \gamma_M$, $\gamma_m \gg 1$. При такой нижней границе распределения величины z и γ одного порядка $\gamma \sim z$ и условие (1) упрощается. Если $\gamma_M = \infty$, как часто принимается для согласования с наблюдениями, то должно быть $\alpha > 3$. Поэтому для всех случаев запишем C в виде

$$C = \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha - 3}{1/\gamma_m^{\alpha-3} - 1/\gamma_M^{\alpha-3}}. \quad (2)$$

Представим импульс фотона в системе E произведением $mcx\bar{\omega}$, то есть в этой системе фотон характеризуется безразмерной частотой $x = h\nu/mc^2$ и единичным вектором направления движения $\bar{\omega}$ ($|\bar{\omega}| = 1$).

Распределение фотонов по импульсам описываем средними числами заполнения фотонных состояний n . Эти величины связаны с интенсивностью соотношением $I_\nu = (2h\nu^3/c^2)n$.

3. *Уравнение переноса.* Можно считать, что время установления лучистого равновесия меньше, чем характерное время изменения оптических свойств сгустков, и рассматривать стационарную задачу. Стационарное уравнение переноса излучения, определяющее средние числа заполнения фотонных состояний, имеет обычный вид

$$\frac{dn}{dl} = -\beta(x)n(\tau, \eta, x) + B(x) + S(\tau, \eta, x), \quad (3)$$

где слева стоит оператор дифференцирования по оптическому пути l

вдоль луча, то есть расстоянию, измеренному в единицах $1/n_e\sigma_0$, где σ_0 - томсоновское сечение. Через τ обозначено оптическое расстояние (оптическая глубина в слое или оптическое расстояние от поверхности шара по радиусу), а через η - косинус угла между направлением возрастания τ и направлением луча распространения излучения. Вследствие плоской или сферической симметрии задачи средние числа заполнения от других геометрических величин не зависят. Далее,

$$\beta(x) = \bar{\sigma}_0(x) + \alpha(x) \quad (4)$$

профиль поглощения, включающий ослабление излучения вследствие комптоновского рассеяния и синхротронного поглощения; $B(x)$ - излучательная способность вещества, соответствующая синхротронному механизму. Наконец, величина, играющая роль функции источников по отношению к рассеянию, задается формулой (см. [10])

$$S(\tau, \eta, x) = \frac{1}{x} \int x_1 dx_1 d^2 \omega_1 R(x, x_1, \mu) n(\tau, \eta_1, x_1). \quad (5)$$

Здесь μ - косинус угла рассеяния, а $R(x, x_1, \mu)$ - функция перераспределения (ФП) излучения по частотам и направлениям при комптоновском рассеянии.

Далее получим выражения для коэффициентов $B(x)$, $\alpha(x)$ в принятом приближении, а затем разложения в ряды этих коэффициентов и $\bar{\sigma}_0(x)$ для степенного распределения электронов по энергиям. Будут приведены также точное и приближенное выражения для ФП.

4. Полное синхротронное излучение. Источником синхротронного излучения являются электроны, движущиеся в однородном и стационарном магнитном поле H по спиралям. Полю H соответствует циклотронная частота $\omega_* = eH/mc$. Вектор скорости каждого электрона состоит из двух ортогональных составляющих: \vec{v}_\parallel и \vec{v}_\perp . Первая направлена параллельно магнитному полю, вторая - перпендикулярно. Тогда вектор импульса можно представить в виде $\vec{p} = \vec{p}_\parallel + \vec{p}_\perp = mc \gamma (\vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp)$.

Пусть t - время в системе координат E , а t_e - собственное время электрона. Они связаны соотношением: $t = \gamma t_e$. Обозначим радиус витка спирали электрона через R . Тогда перпендикулярная составляющая вектора скорости равна $v_\perp = R \omega$, где ω - частота вращения электрона (или гирочастота): $\omega = \omega_* / \gamma$. Отсюда

$$p_\perp = m v_\perp \gamma = m R_* \omega \gamma = m R_* \omega_* \quad (6)$$

Ускорение имеет только перпендикулярную составляющую

$$w = v_1 \omega = R_0 \omega^2 = \frac{R_0 \omega_0^2}{\gamma^2}. \quad (7)$$

Исключим R_0 из формулы (7), подставив ее значение из (6):

$$w = \frac{p_1 \omega_0}{m \gamma^2}. \quad (8)$$

Согласно классической формуле Лармора [11] полная мощность излучения во все стороны движущегося по окружности электрона равна $(2/3)(e^2/c^3)\gamma^4 w^2$. Таким образом, полное излучение пропорционально квадрату проекции электрона на плоскость, перпендикулярную локальному магнитному полю. При сделанном нами предположении, что функция распределения электронов зависит только от энергии, то есть от p^2 , можно усреднить по проекциям импульса при заданной его величине. Обозначим угол между импульсом и магнитным полем через χ . Тогда $p_1 = p \sin \chi$, а так как $\overline{\sin^2 \chi} = 2/3$, то $\overline{p_1^2} = (2/3)m^2 c^2 z^2 - (2/3)m^2 c^2 \gamma^2$, а полная мощность $4\pi\varepsilon = (4/9)(e^2/c)\omega_0^2 \gamma^2$, откуда интегральный коэффициент излучения одного электрона

$$\varepsilon = \frac{1}{9\pi} \frac{e^2}{c} \omega_0^2 \gamma^2. \quad (9)$$

Теперь опишем спектр синхротронного излучения.

5. *Синхротронный спектр.* Полная монохроматическая интенсивность синхротронного излучения пропорциональна функции [11]

$$f(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \int_y^\infty K_{5/3}(x) dx, \quad (10)$$

где $y = v/v_c$, $v_c = (3/2)\omega_0 \gamma^2 / (2\pi)$, $K_{5/3}(x)$ - функция Макдональда. Функция $f(y)$ нормирована так, что интеграл от нее по всем y равен 1. Тогда спектральный коэффициент излучения электрона с энергией γ

$$\varepsilon_v(\gamma) = \varepsilon f\left(\frac{v}{v_c}\right) \frac{1}{v_c}. \quad (11)$$

Коэффициент синхротронного излучения, усредненный по принятому распределению электронов с учетом того, что $z \sim \gamma$, принимает вид

$$\varepsilon_v = \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \varepsilon_v(\gamma) 4\pi z \gamma N(\gamma) n_e d\gamma = C n_e \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \varepsilon_v(\gamma) \gamma^{2-\alpha} d\gamma. \quad (12)$$

Обезразмерим наши соотношения. Безразмерный коэффициент синхротронного излучения

$$B(x) = \frac{\varepsilon_v}{2h\nu^3\sigma_0 n_e/c^2} = \frac{\pi}{18} C \left(\frac{3}{2}\right)^{(\alpha-3)/2} \frac{1}{\alpha_0} x_*^{(\alpha-1)/2} x_*^{-(\alpha+3)/2} \int_{y_m}^{y_M} f(y) y^{(\alpha-5)/2} dy. \quad (13)$$

Здесь $\alpha_0 = e^2/\hbar c$ - постоянная тонкой структуры, $x_* = \hbar\omega_*/mc^2$ - безразмерная циклотронная частота, пределы интегрирования: $y_M = (2/3)x/x_*\gamma_m^2$, $y_m = (2/3)x/x_*\gamma_M^2$. Заметим, что выражение (13) отличается от получающегося для этой величины из приведенной в [7] формулы для коэффициента излучения при $\gamma_m = 0$ и $\gamma_M = \infty$, как там принято, на численный множитель порядка 1, зависящий от показателя α .

Теперь обратимся к часто не учитываемому синхротронному поглощению.

6. *Коэффициент синхротронного поглощения.* Он связан с найденным коэффициентом излучения. Для вывода соотношения между коэффициентами рассмотрим, как это обычно делается (см., например, [12,6]), состояние термодинамического равновесия. В этом случае выполняется условие детального баланса. Для синхротронного излучения это условие имеет вид

$$-\varkappa_0(x)n + B(x)(1+n) = 0, \quad (14)$$

где $\varkappa_0(x)$ определяется только процессом поглощения. Множитель $1+n$ учитывает вынужденное излучение.

Безразмерный коэффициент излучения при произвольном изотропном распределении электронов по энергиям представим в виде интеграла по этому распределению:

$$B(x) = 4\pi \int_{1+x}^{\infty} N(\gamma) B(x, \gamma) z \gamma d\gamma, \quad B(x, \gamma) = \frac{c^2}{2\hbar\nu^3\sigma_0} \varepsilon_v(\gamma). \quad (15)$$

Условие $\gamma \geq 1+x$, накладываемое на γ , означает, что только с такими энергиями электроны могут излучить фотон с частотой x . Запишем и коэффициент поглощения в таком же виде:

$$\varkappa_0(x) = 4\pi \int_1^{\infty} N(\gamma') \varkappa(x, \gamma') z' \gamma' d\gamma', \quad (16)$$

где $\gamma' = \gamma - x$, γ и γ' - энергии электрона до и после излучения фотона с частотой x соответственно. Тогда

$$B(x) = 4\pi \int_1^{\infty} N(\gamma' + x) B(x, \gamma' + x) \sqrt{(\gamma' + x)^2 - 1} (\gamma' + x) d\gamma'. \quad (17)$$

Подставив полученные соотношения в (14), записав результат без штрихов и опустив интеграл, получим соотношение

$$N(\gamma + x) B(x, \gamma + x) \sqrt{(\gamma + x)^2 - 1} (\gamma + x) (1 + n) - N(\gamma) \alpha(x, \gamma) z \gamma n = 0. \quad (18)$$

При термодинамическом равновесии среднее число заполнения определяется формулой Планка:

$$n = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} = \frac{1}{e^{xy} - 1}, \quad (19)$$

где $x = h\nu/mc^2$ и $y = mc^2/k_B T$. В свою очередь электроны при термодинамическом равновесии распределены по энергиям согласно релятивистскому закону Максвелла (см. [13], стр. 140), при котором

$$N(\gamma) \propto e^{-\gamma y}, \quad N(\gamma + x) \propto e^{-(\gamma+x)y}. \quad (20)$$

Согласно (19) и (20)

$$N(\gamma + x)(1 + n) \sim \frac{e^{-\gamma y}}{e^{xy} - 1}, \quad N(\gamma)n \sim \frac{e^{-\gamma y}}{e^{xy} - 1}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (18), находим

$$\alpha(x, \gamma) = \frac{\gamma + x}{\gamma} \frac{\sqrt{(\gamma + x)^2 - 1}}{z} B(x, \gamma + x). \quad (22)$$

Несмотря на то, что это соотношение было получено при рассмотрении термодинамического равновесия, оно справедливо вообще. Это обстоятельство отражается в том, что в (22) не входит температура.

Возвратимся к степенному распределению. Найдём разность между $\alpha_0(x)$ и $B(x)$, которая согласно (14) и представляет профиль коэффициента поглощения, исправленного за вынужденное излучение. Учтя, что $x \ll \gamma$, получим

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha_0(x) - B(x) = -4\pi \int_1^{\infty} d\gamma \sqrt{(\gamma + x)^2 - 1} (\gamma + x) B(x, \gamma + x) \times \\ &\times [N(\gamma + x) - N(\gamma)] \approx -4\pi x \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \gamma^2 B(x, \gamma) N'(\gamma) d\gamma. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как $N(\gamma) = C\gamma^{-\alpha}$, то $N'(\gamma) = -C\alpha\gamma^{-\alpha-1}$ и

$$\mathfrak{x}(x) = \frac{\pi}{18} C\left(\frac{3}{2}\right)^{(\alpha-2)/2} \frac{\alpha}{\alpha_0} x_0^{\alpha/2} x^{-(\alpha+2)/2} \int_{y_m}^{y_M} f(y) y^{(\alpha-4)/2} dy. \quad (24)$$

7. *Вычисление $\mathfrak{x}(x)$ и $B(x)$.* Дадим способ вычисления интегралов, входящих в выражения (24) для $\mathfrak{x}(x)$ и (13) для $B(x)$. Введем обозначение

$$F_{\delta}(y) = \int_y^{\infty} (y')^{(\delta-2)} f(y') dy'. \quad (25)$$

Подставляя в (25) выражение (10) для $f(y)$ и меняя порядок интегрирования, получаем

$$F_{\delta}(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \int_y^{\infty} (y')^{\delta-1} dy' \int_{y'}^{\infty} K_{5/3}(x) dx = \frac{1}{\delta} \left[\frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \int_y^{\infty} x^{\delta} K_{5/3}(x) dx - y^{\delta-1} f(y) \right], \quad (26)$$

Таким образом, необходимо вычислять три интеграла:

$$f_{\delta}(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \int_y^{\infty} x^{\delta} K_{5/3}(x) dx, \quad (27)$$

где $\delta = 0, (\alpha - 1)/2$ или $\alpha/2$. При этом $f(y) = yf_0(y)$.

При малых y интегралы раскладываются в ряды:

$$f_{\delta}(y) = \frac{9}{8} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\pi} 2^{\delta-1} \Gamma\left(\frac{\delta}{2} + \frac{4}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{3}\right) + y^{\delta} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{y}{2}\right)^{-2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y/2)^{2n}}{n! \Gamma(n - 2/3) (\delta/2 + n - 1/3)} - \left(\frac{y}{2}\right)^{8/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y/2)^{2n}}{n! \Gamma(n + 8/3) (\delta/2 + n + 4/3)} \right] \right\}. \quad (28)$$

Разложение проверяется дифференцированием по y , в результате чего получается разложение функции Макдональда (см. формулы 8.485 и 8.445 из [14]). Свободное слагаемое находим с помощью интеграла согласно формуле 6.561.16 из [14], которая верна при $\delta > 2/3$. Однако при $y > 0$ разложение в ряд выполняется и при других δ по принципу аналитического продолжения.

При больших y интегралы представляются асимптотическими разложениями. Для их получения подставим в (27) асимптотику функции Макдональда, определяемую формулой 8.451.6 из [14]. Для индекса $5/3$ находим

$$f_{\delta}(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \int_y^{\infty} x^{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} dx \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(13/6 + n)}{2^n n! \Gamma(13/6 - n)} \frac{1}{x^m}. \quad (29)$$

Сделаем замену переменной $x = y + t$, вынесем из скобки в знаменателе y и разложим $(1 + t/y)^{m+1/2-\delta}$ в ряд по степеням $(t/y)^k$, считая $y \gg 1$. Затем введем новую переменную суммирования $n = m + k$, изменим порядок суммирования и в результате получим

$$f_{\delta}(y) = \frac{9}{8} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-y} y^{\delta-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{y^n} \sum_{m=0}^n \prod_{j=m+1}^n \left(j - \frac{1}{2} - \delta \right) \prod_{k=1}^m \left[\frac{(k-1/2)^2 - 25/9}{2k} \right]. \quad (30)$$

При $y \leq 10$ функции $f_i(y)$ вычислялись через разложения в ряды, при $y \geq 18$ - по асимптотикам. В промежутке (10,18) они вычислялись с помощью интерполирования по таблицам, полученным путем численного неопределенного интегрирования от $y = 18$ к $y = 10$. Значения функций, найденные численным интегрированием, при $y = 10$ совпадали с вычисляемыми через ряды с точностью в пять значащих цифр.

На рис. 1 и 2 представлены графики функций $f_i(y)$ и $F_i(y)$ при различных значениях δ .

Итак, мы имеем процедуру для вычисления коэффициентов излучения и поглощения синхротронного механизма. Займемся комптоновским рассеянием.

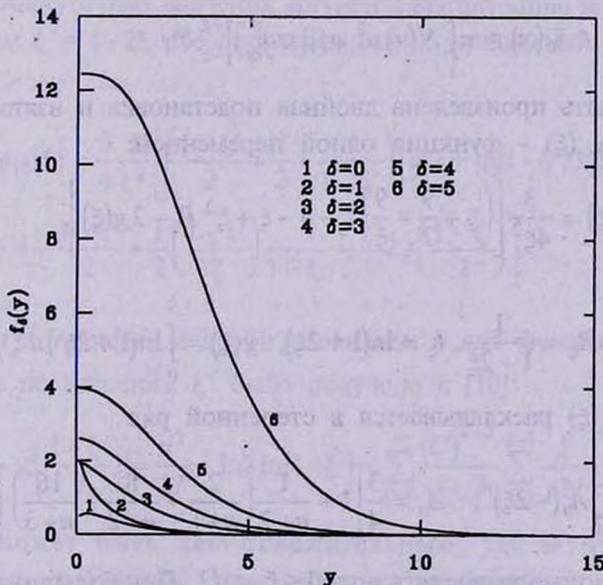


Рис.1. Функция $f_i(y)$ при различных значениях δ .

8. Комптоновское ослабление. При рассеянии фотоны изменяют свой импульс, так что и рассеяние, как известно, ослабляет первоначальный пучок излучения.

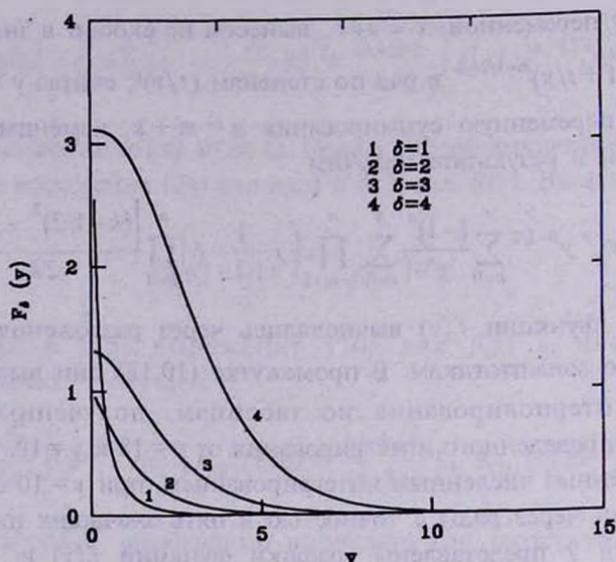


Рис.2. Функция $F_1(y)$ при различных значениях δ .

Получим выражения для профиля коэффициента ослабления излучения вдоль луча, то есть коэффициент поглощения в единицах $n_e \sigma_0$. В работе [10] получена формула для профиля коэффициента ослабления

$$\bar{\sigma}_0(x) = \pi \int_1^{\infty} N(\gamma) u^2 \psi_{10}(xu) \Big|_{u=\gamma-z}^{u=\gamma+z} d\gamma. \quad (31)$$

Здесь должна быть произведена двойная подстановка и взята разность результатов, а $\psi_{10}(\xi)$ - функция одной переменной:

$$\psi_{10}(\xi) = \frac{3}{4\xi^2} \left[\left(\xi + \frac{9}{2} + \frac{9}{\xi} \right) l_\xi - 4 - \xi + \xi^2 R_\xi - 2g(\xi) \right], \quad (32)$$

где обозначено $R_\xi = \frac{1}{1+2\xi}$, $l_\xi = \ln(1+2\xi)$, $g(\xi) = \int_0^\xi \ln(1+2\xi') d\xi'/\xi'$.

Функция $\psi_{10}(\xi)$ раскладывается в степенной ряд

$$\psi_{10}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-2\xi)^n, \quad A_n = \frac{3}{4} \left[1 + \frac{1}{n+2} \left(\frac{2}{n+1} + \frac{8}{n+2} - \frac{16}{n+3} \right) \right], \quad (33)$$

по которому ее можно вычислять при $0 \leq \xi < 1/2$. При больших значениях аргумента можно получить разложение, которое содержит логарифмические слагаемые вне суммы. Сначала представим эту функцию так:

$$\psi_{10}(\xi) = \frac{3}{4} \frac{1}{\xi^2} \left[\left(\xi + \frac{9}{2} + \frac{2}{\xi} \right) \ln(2\xi) + \left(\xi + \frac{9}{2} + \frac{2}{\xi} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{2\xi} \right) - \right. \\ \left. - 4 - \xi + \frac{\xi}{2} \frac{1}{1 + 1/(2\xi)} - \frac{\pi^2}{3} - \ln^2(2\xi) + 2g \left(\frac{1}{2\xi} \right) \right]. \quad (34)$$

Логарифм, дробь и функция g раскладываются при $\xi > 1/2$ по степеням $1/2\xi$. В частности,

$$g \left(\frac{1}{2\xi} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} \frac{1}{(2\xi)^n}. \quad (35)$$

Окончательное разложение имеет вид

$$\psi_{10}(\xi) = \frac{3}{4} \frac{1}{\xi^2} \left[\left(\xi + \frac{9}{2} + \frac{2}{\xi} \right) \ln(2\xi) - \ln^2(2\xi) - \frac{\xi}{2} - \frac{15}{4} - \frac{\pi^2}{3} + \frac{13}{4} \frac{1}{\xi} \right] + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\xi)^{n+4}} B_n, \quad (36)$$

где $B_n = -A_{4-n}$.

Для промежуточных значений аргумента эту функцию можно разложить по степеням $\xi' = 1 - 2\xi$. Не производя самих разложений, представим ее в виде

$$\psi_{10}(\xi) = \frac{3}{4} \frac{1}{\xi^2} \left[\left(\frac{1-\xi'}{2} + \frac{9}{2} + \frac{4}{1-\xi'} \right) [\ln 2 + \ln(1-\xi'/2)] - \right. \\ \left. - 4 - \frac{1-\xi'}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1-\xi'}{2} \right) \frac{1}{1-\xi'/2} - 2g \left(\frac{1-\xi'}{2} \right) \right]. \quad (37)$$

Разложения логарифма и дроби очевидны, а для функции $g(1/2 - \xi'/2)$ разложение по степеням ξ' было получено в [10]:

$$g \left(\frac{1-\xi'}{2} \right) = \frac{\pi^2}{12} + \ln 2 \ln(1-\xi') + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi')^{k+2}}{k+2} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j 2^j}. \quad (38)$$

Здесь ξ' может быть как положительным, так и отрицательным. Приведенные разложения охватывают все необходимые случаи.

Теперь обратимся к степенному распределению по энергиям. Для него с учетом принятых приближений формула для профиля коэффициента ослабления (31) переписывается в виде

$$\bar{s}_0(x) = 4\pi C \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \gamma^{2-\alpha} \psi_{10}(2x\gamma) d\gamma. \quad (39)$$

В этой формуле учтен только верхний предел формулы (31) $u = \gamma + z$, так как на нижнем $x(\gamma - z) = x/(\gamma + z) - x/2\gamma \ll 1$. После замены переменной $u = 2x\gamma$ находим

$$\bar{s}_0(x) = \frac{4\pi C}{(2x)^{3-\alpha}} \int_{2x\gamma_m}^{2x\gamma_M} u^{2-\alpha} \psi_{10}(u) du = \frac{4\pi C}{(2x)^{3-\alpha}} [S_\alpha(2x\gamma_M) - S_\alpha(2x\gamma_m)]. \quad (40)$$

Так как нам нужны только разности функции S_α , то определить ее можно формулой, пригодной при любых значениях ее аргумента:

$$S_\alpha(x) = \int_x^{1/2} \xi^{2-\alpha} \psi_{10}(\xi) d\xi. \quad (41)$$

Таким образом, дело свелось к вычислению одной функции, зависящей от одного параметра. Для нее получим разложения, аналогичные разложениям функции ψ_{10} . Рассмотрим те же три случая значений аргументов, назвав их соответственно малыми, большими и средними.

9. *Малые аргументы.* Подставив в (41) разложение (33), проинтегрируем формально по ξ и результат представим в виде разности

$$S_\alpha(x) = S_\alpha^-(x) - S_\alpha^-(1/2), \quad (42)$$

где каждое слагаемое является рядом:

$$S_\alpha^-(x) = -x^{3-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n \frac{A_n}{n-\alpha+3}. \quad (43)$$

Вычисления по приведенному ряду осложняются тем, что при целых значениях параметра α , больших 2, одно из слагаемых в ряду обращается в бесконечность. Эта трудность устраняется следующим образом. При $\alpha = n_0 + \varepsilon$, где целое число $n_0 \geq 3$, а $|\varepsilon| < 1/2$, не будем разделять обращающиеся в бесконечность при $\varepsilon = 0$ слагаемые в разности (42). Представим степень x , соответствующую этим слагаемым, имеющим номер $n = n_0 - 3$, в виде

$$\begin{aligned} x^{3-\alpha} (2x)^{n_0-3} &= 2^{\alpha-3} (2x)^{-\varepsilon} = 2^{\alpha-3} e^{-\varepsilon \ln(2x)} = \\ &= 2^{\alpha-3} [1 - \varepsilon \ln(2x) \operatorname{dex}(-\varepsilon \ln(2x), 1)], \end{aligned} \quad (44)$$

где остаток экспоненциального ряда

$$\text{dex}(x, n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+n)!}, \quad e^x = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{x^m}{m!} + x^n \text{dex}(x, n). \quad (45)$$

Тогда слагаемое в ряду (43) с номером $n = n_0 - 3$ при $\alpha = n_0 + \epsilon$ превратится в

$$(-1)^{n_0} 2^{\alpha-3} A_{n_0-3} \left[\text{dex}(-\epsilon \ln(2x), 1) \ln(2x) - \frac{1}{\epsilon} \right]. \quad (46)$$

Здесь расходящееся при $\epsilon \rightarrow 0$ слагаемое не зависит от x , а конечное обращается при $x = 1/2$ в нуль. Следовательно, при вычитании в (42) остается только конечное слагаемое, а расходящиеся сокращаются. Поэтому при вычислении ряда оставляем только это, конечное слагаемое. Точно такое рассуждение будем применять и в дальнейшем.

Итак, ряд (43) записываем в виде

$$S_{\alpha}^{-}(x) = -x^{3-\alpha} \sum_{n=0, n \neq n_0-3}^{\infty} (-2x)^n \frac{A_n}{n-\alpha+3} + 2^{\alpha-3} A_{n_0-3} \text{dex}(-\epsilon \ln(2x), 1) \ln(2x). \quad (47)$$

Если $n_0 < 3$, то условие $n \neq n_0 - 3$ излишне, а дополнительное слагаемое в (47) отсутствует.

Значение ряда (43) при $x = 1/2$ вычисляется по формуле

$$S_{\alpha}^{-}(1/2) = -2^{\alpha-3} \left[\sum_{n=0}^{n_0-4} (-1)^n \frac{A_n}{n-\alpha+3} + \sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \frac{A_n-3/4}{n-\alpha+3} + \frac{3}{8} (-1)^{n_0} \frac{1}{1-\alpha+n_0} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{m=1}^n \frac{m}{2(m-\alpha+n_0)} \right], \quad (48)$$

где $n_0 = \max(0, n_0 - 2)$. При выводе этой формулы было использовано известное свойство гипергеометрической функции (см. [14], соотношение 9.131.1).

В случае, если x очень мал, можно перейти к пределу $x \rightarrow 0$. Если $\alpha < 3$, то интеграл $S_{\alpha}^{-}(0)$ сходится, при выполнении противоположного неравенства - расходится. Однако в обоих случаях степени x в (40) сокращаются и получается $\bar{S}_0(0) = 1$, что отражает переход комптоновского рассеяния в томсоновское на малых частотах.

Случай больших значений аргумента проще по отношению к ряду, но сложнее ввиду наличия слагаемых вне суммы.

10. *Большие аргументы.* Формальное интегрирование в (41) после подстановки туда разложения (36) дает

$$S_{\alpha}(x) = S_{\alpha}^{+}(x) - S_{\alpha}^{+}(1/2), \quad (49)$$

где

$$S_{\alpha}^{+}(x) = S_A(x) + S_B(x) + S_C(x) + x^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{2^{n+4} x^{n+1} (n+\alpha+1)}. \quad (50)$$

Здесь введены обозначения

$$S_A(x) = \frac{3}{4} \frac{x^{-\alpha}}{\alpha} \left(2 \ln(2x) + \frac{13}{4} + \frac{2}{\alpha} \right), \quad S_C(x) = \frac{3}{4} \frac{x^{2-\alpha}}{\alpha-2} \left(\ln(2x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha-2} \right), \quad (51)$$

$$S_B(x) = \frac{3}{4} \frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1} \left(\frac{9}{2} \ln(2x) - \frac{15}{4} - \frac{\pi^2}{3} - \ln^2(2x) + \frac{9}{2} \frac{1}{\alpha-1} - 2 \frac{\ln(2x)}{\alpha-1} - \frac{2}{(\alpha-1)^2} \right). \quad (52)$$

При $\alpha > 2$ вычисления можно производить непосредственно по формуле (50). При $x=1/2$ следует только выделить недостаточно быстро убывающее слагаемое и преобразовать аналогично тому, как было преобразовано (48). В результате получится

$$S_{\alpha}^{+}(1/2) = S_A(1/2) + S_B(1/2) + S_C(1/2) + 2^{\alpha-3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n + 3/4}{n+\alpha+1} - \frac{3}{4} 2^{\alpha-4} \frac{1}{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{m=1}^n \frac{m}{2(m+\alpha+1)}. \quad (53)$$

Слагаемые вне суммы расходятся, когда α принимает значения 0, 1 и 2. В этих случаях поступаем так же, как и в предыдущем пункте. Полагаем $\alpha = n_0 + \varepsilon$, причем теперь $n_0 = 0, 1, 2$. В слагаемых $S_A(x)$ и $S_C(x)$ следует выделить члены до второго порядка малости по ε , а у $S_B(x)$ - до третьего. В результате получим, что, как и выше, расходящиеся слагаемые не зависят от x , а конечные обращаются в ноль при $x=1/2$. Выпишем разложения, включив в них расходящиеся слагаемые, которые отбросим при вычислениях, так как они сокращаются в разности (49).

Имеем для $|\varepsilon| < 1/2$

$$S_A(x) = \frac{3}{4} 2^{\varepsilon} \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{13}{4} \frac{1}{\varepsilon} + 2 \ln(2x) \left(\ln(2x)(d_2 - d_1) - \frac{13}{8} d_1 \right) \right], \quad \varepsilon = \alpha, \quad (54)$$

$$S_B(x) = \frac{3}{4} 2^{\varepsilon} \left[-\frac{2}{\varepsilon^3} + \frac{9}{2} \frac{1}{\varepsilon^2} - \left(\frac{15}{4} + \frac{\pi^2}{3} \right) \frac{1}{\varepsilon} + 2 \ln^3(2x) \left(d_3 - d_2 + \frac{d_1}{2} \right) + \frac{9}{2} \ln^2(2x) (d_2 - d_1) + \left(\frac{15}{4} + \frac{\pi^2}{3} \right) \ln(2x) d_1 \right], \quad \varepsilon = \alpha - 1, \quad (55)$$

$$S_C(x) = \frac{3}{4} 2^\varepsilon \left[\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon} + \ln^2(2x)(d_2 - d_1) + \ln(2x) \frac{d_1}{2} \right], \quad \varepsilon = \alpha - 2. \quad (56)$$

Здесь для краткости обозначено $d_n = \text{dex}(-\varepsilon \ln(2x), n)$.

Особый случай порождает значение $\gamma_\mu = \infty$. При таком значении верхней границы распределения электронов по энергиям интеграл $S_\alpha(\infty)$ сходится только при $\alpha > 2$. Заметим, что тогда не возникает осложнений в рядах, сходящихся при $x > 1/2$.

Наконец, рассмотрим случай x , близких к $1/2$.

11. *Средние аргументы.* Здесь получают наиболее громоздкие формулы, но не возникает осложнений со значениями параметра α .

В формуле (41) сделаем замены: $\xi = (1 - \xi')/2$, $\xi' = 1 - 2\xi$ и соответственно $x = (1 - y)/2$, $y = 1 - 2x$. Получится (штрих опущен)

$$S_\alpha\left(\frac{1-y}{2}\right) = \frac{3}{4} 2^{\alpha-1} \int_0^y (1-\xi)^{-\alpha} \left[\left(\frac{4}{3}\right) (\xi'')^2 \Psi_{10}(\xi'') \right]_{\xi''=(1-\xi)/2} d\xi, \quad (57)$$

куда вместо квадратной скобки надо подставить разложение функции $\left[\left(\frac{4}{3}\right) (\xi'')^2 \Psi_{10}(\xi'') \right]$ из (37).

Будем считать $|y|$ достаточно малым и разложим подинтегральную функцию по степеням ξ . Для этого перемножим ряды для входящих в (57) функций. Слагаемые с логарифмом представятся рядами вида

$$\begin{aligned} (1-\xi)^{-\beta} \ln(1-\xi/2) &= - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+m-1)}{m!} \xi^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^k}{k 2^k} = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\xi}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+m-1)}{m!(n-m)} 2^m. \end{aligned} \quad (58)$$

Ненамного отличаются слагаемые с дробью:

$$\frac{(1-\xi)^{-\beta}}{1-\xi/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{2}\right)^n \sum_{m=0}^n \frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+m-1)}{m!} 2^m. \quad (59)$$

Сложнее других слагаемое, в которое входит функция g . Его представление содержит тройную сумму. Первое слагаемое в (38) дает ряд с обычными членами, второе аналогично (58), но не имеет множителями степеней 2, разложение же произведения третьего на степенной множитель в (57) по степеням ξ и приводит к тройной сумме:

$$(1-\xi)^{-\alpha} g\left(\frac{1-\xi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \dots (\alpha+n-1)}{n!} \xi^n - \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\alpha \dots (\alpha+m-1)}{m(n-m)} + \sum_{n=2}^{\infty} \xi^n \sum_{m=0}^{n-2} \frac{\alpha \dots (\alpha+m-1)}{m(n-m)} \sum_{j=1}^{n-m-1} \frac{1}{j 2^j}. \quad (60)$$

После взятия интеграла по ξ множители ξ^n заменяются на $y^{n+1}/(n+1)$.

При расчетах с помощью рядов все их коэффициенты можно найти заранее, держать в массивах в памяти и свести вычисления к простому суммированию степенных рядов.

Заметим, что все интегралы и ряды, рассмотренные в этом разделе, являются частными случаями гипергеометрической функции Гаусса. Однако их специфика такова, что проще рассматривать непосредственно сами ряды, не обращаясь к обозначениям указанной функции.

Рис.3 дает представление о поведении функций $S_{\alpha}(x)$.

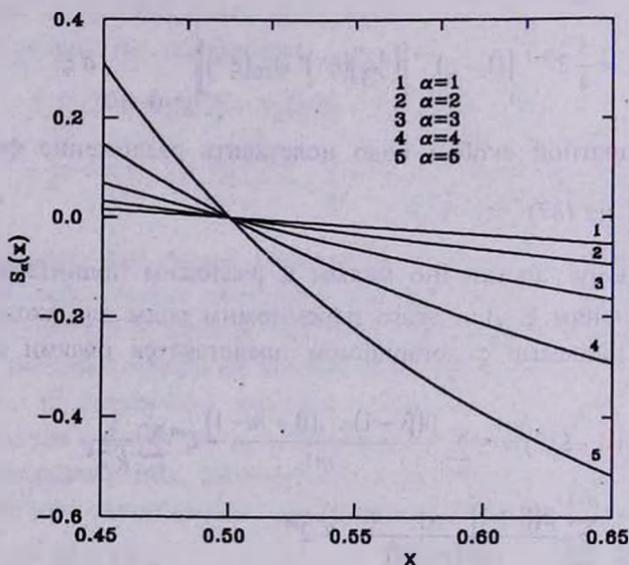


Рис.3. Функция $S_{\alpha}(x)$ при различных значениях α .

Теперь рассмотрим часть функции источников, определяемую рассеянием.

12. *Комптоновское рассеяние.* Входящая в интеграл (5), описывающий этот процесс, функция перераспределения (ФП) интенсивности $R(x, x_1, \mu)$ зависит от частот фотона x_1 и x - до и после рассеяния, а также от косинуса угла рассеяния μ . Согласно [10] она получается усреднением по энергиям электронов ФП при рассеянии на

электронах с фиксированной энергией

$$R(x, x_1, \mu, \gamma) = \frac{2}{Q} + \frac{q^2 - 2q - 2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right)}{q^2} + \frac{1}{q^2} \left[\frac{(x+x_1)\gamma + x(x_1\mu - x)}{a^3} + \frac{(x+x_1)\gamma + x_1(x_1 - x\mu)}{a_1^3} \right], \quad (61)$$

где $q = \chi x_1 w = \chi x_1(1 - \mu)$, $Q = \sqrt{x^2 + x_1^2 - 2\chi x_1 \mu}$, а

$$a = \sqrt{z^2 + x^2 - 2\gamma x + \frac{2}{w}}, \quad a_1 = \sqrt{z^2 + x_1^2 - 2\gamma x_1 + \frac{2}{w}}. \quad (62)$$

Для упрощения расчетов можно принять приближенное выражение для этой функции. Это выражение получается, если считать, что в системе отсчета, в которой до рассеяния электрон покоился, происходит не релеевское, а изотропное рассеяние. Как показано в [15], тогда

$$R(x, x_1, \mu, \gamma) = \frac{4}{3} \frac{1}{x Q_0}. \quad (63)$$

Здесь $Q_0 = \sqrt{(X-1)^2 + 2(1-\mu)}$, причем $X = x_1/x$, не зависит от энергии электронов. Произведение xR зависит только от отношения частот падающего и рассеянного фотонов X и от μ . Поэтому все дальнейшие ФП выражаем через эти переменные. Численные эксперименты, произведенные Ю.Й.Поутаненом [15], показали, что (63) является хорошим приближением к ФП. Это приближение используется им при расчетах рассеяния [16].

Усредненная по энергиям электронов ФП

$$R(x, x_1, \mu) = \frac{3}{8} \int_{\gamma_-(x, x_1, \mu)}^{\infty} N(\gamma) d\gamma \quad R(x, x_1, \mu, \gamma) = \frac{1}{4x Q_0} \Theta(\gamma_m - \gamma_m^*) \int_{\gamma_m^*}^{\gamma_m} \gamma^{-\alpha} d\gamma, \quad (64)$$

где $\Theta(x)$ - единичная функция скачка, $\gamma_m^* = \max(\gamma_m, \gamma_-(x, x_1, \mu))$, а

$$\gamma_-(x, x_1, \mu) = \frac{1}{2} \left(x - x_1 + Q \sqrt{1 + \frac{2}{\chi x_1(1-\mu)}} \right). \quad (65)$$

Уточним пределы интегрирования в (64) для рассматриваемого степенного распределения. Так как величина $\gamma_-(x, x_1, \mu)$ сравнивается с большой величиной γ_m , то можно для нее принять приближенное выражение. Поскольку $x, x_1 \ll \gamma$, она может достигать больших значений только при малых или больших X , поэтому положим

$$\gamma.(x, x_1, \mu) \approx \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{2}{xx_1(1-\mu)}} = \sqrt{\frac{(X-1)^2}{2Xw} + 1} \approx \frac{|X-1|}{\sqrt{2X(1-\mu)}}. \quad (66)$$

Равенство $\gamma.(x, x_1, \mu) = \gamma \gg 1$, где γ - одно из чисел γ_m или γ_M , осуществляется при $w = 1 - \mu = (X-1)^2/2X\gamma^2$. Так как μ - косинус угла рассеяния, должно выполняться неравенство $(X-1)^2/2X\gamma^2 \leq 2$, что накладывает ограничения на значения X . Эта величина должна быть заключена между $1/4\gamma_M^2$ и $4\gamma_M^2$. При этом, если $1/4\gamma_M^2 \leq X \leq 1/4\gamma_m^2$ или $4\gamma_m^2 \leq X \leq 4\gamma_M^2$, то должно быть $(X-1)^2/2X\gamma_M^2 \leq w \leq 2$, а $\gamma_m^* = |X-1|\sqrt{2Xw}$. Если же $1/\gamma_m^2 \leq x \leq 4\gamma_m^2$, то при $(X-1)^2/2X\gamma_M^2 \leq w \leq (X-1)^2/2X\gamma_m^2$ нижний предел $\gamma_m^* = |X-1|\sqrt{2Xw}$, а при $(X-1)^2/2X\gamma_m^2 \leq w \leq 2$ этот предел $\gamma_m^* = \gamma_m$. Верхний предел при всех рассматриваемых X одинаков, но если оказывается, что $\gamma_m^* > \gamma_M$, то интеграл следует принять равным нулю.

Заметим, что при использовании упрощенной функции перераспределения надо применять соответствующее выражение для профиля поглощения. Оно имеет ту же форму (31), что и точное, но с функцией $\psi_{10}(\xi) = [\xi - (1/2)\ln(1+2\xi)]/\xi^2$. Разложения в ряды при малых ξ получаются из (33) и (43) при $A_n = 2/(n+2)$ и регуляризуются точно так же, как точные. Усиление сходимости при $x = 1/2$ не требуется. Асимптотическая функция $S_\alpha^+(x)$ представляется в том же виде (50) с $B_n = 2/(n+2)$ и с более простыми функциями

$$S_A(x) = -\frac{1}{4} \frac{x^{-\alpha}}{\alpha}, \quad S_B(x) = -\frac{1}{2} \frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1} \left(\frac{1}{\alpha-1} + \ln 2\xi \right), \quad S_C(x) = \frac{x^{2-\alpha}}{\alpha-2}, \quad (67)$$

Их регуляризация при α близких к 1,2 или 3 существенно проще, чем точных.

13. *Заключение.* Таким образом, мы определили все слагаемые, входящие в уравнение переноса излучения (3). Коэффициенты синхротронного поглощения $\kappa(x)$ и излучения $B(x)$, а также комптоновского ослабления $\bar{\kappa}_0(x)$ при степенном спектре энергий ультрарелятивистских электронов представлены через функции, которые

вычисляются при помощи разложений их в ряды. Упрощено и уточнено слагаемое, описывающее рассеяние.

В следующей статье будет предложен метод решения уравнения переноса и представлены результаты для плоской и сферической геометрий сгустков джета. Предполагается также сравнение с наблюдениями и оценка правомерности модели и относительной роли механизмов излучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-02-05004-а).

Санкт-Петербургский государственный
университет, Россия

A DESCRIPTION OF SYNCHRO-SELF-COMPTON MECHANISM OF RADIATION FROM ACTIVE GALACTIC NUCLEI JETS

D.I.NAGIRNER, L.S.NIKOLAEVA

Coefficients of synchrotron emission and absorption, as well of Compton extinction in ultrarelativistic electron gas are represented in the form of rapidly convergent power series. Electron gas has a power distribution in energy and contains chaotic magnetic field. For redistribution function in frequency exact and approximate expressions are given. The results will be used for calculation of radiation of active galactic jets.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M.C.Begelman, R.D.Blandford, M.J.Rees*, Rev. Mod. Phys., **56**, N2, 1984.
2. *В.Г.Горбачук*, Введение в физику галактик и скоплений галактик, Наука, М., 1986.
3. *M.Sikora*, Astrophys. J. Suppl. Ser., **90**, 923, 1994.
4. *C.M.Urry, P.Padovani*, Publ. Astron. Soc. Pacif., **107**, 803, 1995.
5. *V.N.Fedorenko, T.J.-L.Courvoisier*, Astron. Astrophys., **307**, 347, 1996.
6. *А.Пахольчик*, Радиоастрофизика, Мир, М., 1973.

7. *В.Л.Гинзбург*, Теоретическая физика и астрофизика, Наука, М., 1987.
8. *J.A.Biretta, C.P.Stern, D.F.Harris*, *Astron. J.*, **101**, 1632, 1991.
9. *J.Poutanen*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **92**, 607, 1994.
10. *Д.И.Нагирнер, Е.В.Кикец, Ю.Й.Поутанен*, *Тр. Астрон. обсерв. ЛГУ*, **43**, 28, 1991.
11. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц*, Теория поля, Наука, М., 1988.
12. *В.В.Соболев*, Курс теоретической астрофизики, Наука, М., 1985.
13. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц*, Статистическая физика, Наука, М., 1995.
14. *И.С.Градштейн, И.М.Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971.
15. *J.Poutanen*, Compton Scattering of Polarized Light in Active Galactic Nuclei and X-Ray Binaries. *Observ. Astrophys. Lab., Univ. Helsinki, Report 2/1994*, Helsinki, 1994.
16. *J.Poutanen, R.Svensson*, *Astrophys. J.*, **470**, 249, 1996.