АСТРОФИЗИКА

ТОМ 40 НОЯБРЬ, 1997 ВЫПУСК 4

УДК: 524.354.6

О МОМЕНТЕ ИНЕРЦИИ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД. II. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОПРАВКИ

Л.Ш.ГРИГОРЯН[1,2], Г.Ф.ХАЧАТРЯН[1,2]

Поступила 6 марта 1997
Принята к печати 16 апреля 1997

В I части была предложена приближенная формула, определяющая вклад релятивистских эффектов в момент инерции сверхплотной звезды. В данной работе она проверена на моделях нейтронных звезд с 9 различными вариантами уравнения состояния сверхплотного вещества. Установлено, что для устойчивых конфигураций погрешность аппроксимации не превышает 5%. Выведен более точный вариант формулы Равенола-Петика [4] для момента инерции как функции массы и радиуса нейтронной звезды.

1. *Введение.* В I части [1] было выведено релятивистское уравнение

$$\frac{di}{dr}=\frac{8\pi}{3}r^4\frac{\rho+c^{-2}P}{1-2Gm/rc^2}\left(1-\frac{2Gi}{c^2r^3}\right)\left(1-\frac{Gi}{2c^2r^3}\right) \tag{1}$$

для накопленного момента инерции $i(r)$ медленно вращающегося небесного тела. В (1) m - тяготеющая масса, накопленная внутри сферического слоя радиуса r; P и ρc^2 - давление и плотность полной энергии звездного вещества, G - ньютоновская гравитационная постоянная, а c - скорость света. Решая уравнение Оппенгеймера-Волкова [2], совместно с (1), можно определить распределение давления P, массы m и момента инерции i в объеме сферически-симметрического небесного тела. На поверхности конфигурации $i(R)=I$, где $I=J/\Omega$ - релятивистское обобщение ньютоновского понятия момента инерции (J - полный момент количества движения для небесного тела и гравитационного поля, Ω - угловая скорость вращения системы, измеренная удаленным наблюдателем).

В той же I части для релятивистского множителя

$$\sigma=I/I_N \tag{2}$$

были предложены две приближенные формулы:

$$\sigma\approx\left(1-\frac{2GI}{c^2R^3}\right)\left(1-\frac{GI}{2c^2R^3}\right)\Big/\left(1-\frac{2GM}{c^2R}\right)\equiv\sigma_0(I), \tag{3а}$$

$$\sigma\approx 2\Big/\left(y+\sqrt{y^2-z^2}\right)\equiv\sigma_*(I_N), \tag{3б}$$

где $M=m(R)$ - тяготеющая масса небесного тела,

$$y=1-\frac{2GM}{c^2R}+\frac{5GI_N}{2c^2R^3},\quad z=\frac{2GI_N}{c^2R^3}. \tag{4}$$

В (2) I, I_N - различные значения момента инерции одного и того же небесного тела. В отличие от I в определении $I_N = i_N(R)$ релятивистские эффекты не учитываются в том смысле, что $i_N(r)$ является решением уравнений Оппенгеймера-Волкова совместно с уравнением

$$\frac{di_N}{dr} = \frac{8\pi}{3}\rho r^4 \tag{5}$$

нерелятивистской теории. Подстановка первого из выражений (3): $\sigma \approx \sigma_0(I)$ в (2) приводит к $I/\sigma_0(I) \approx I_N$. Разрешая полученное равенство относительно I, приходим ко второй формуле: $\sigma \approx \sigma_*(I_N)$. Для конфигураций из несжимаемой жидкости она упрощается и, как показано в I части, воспроизводит результаты численных расчетов σ, проведенных Чандрасекаром и Миллером [3], с погрешностью 5% во всем диапазоне центральных давлений от нуля до бесконечности.

В разделе 3 настоящей работы формула $I \approx \sigma_0 I_N$ проверена на моделях нейтронных звезд с 9 различными вариантами уравнения состояния вырожденного сверхплотного вещества. Там же предложен более точный вариант формулы Равенола-Петика [4]

$$I \approx \frac{0.21\,MR^2}{1 - 2GM/c^2R} \tag{6}$$

для нейтронных звезд с не очень малыми массами. Выводы работы приведены в *Заключении*.

2. *Уравнение состояния сверхплотного вещества.* Гравитирующими системами, состоящими из атомных ядер, электронов, нуклонов, гиперонов и др. элементарных частиц, являются сверхплотные звезды (белые карлики и нейтронные звезды). Физика этих небесных тел охватывает уникальный круг задач на стыке астрофизики, физики элементарных частиц и атомного ядра. Нейтронные звезды являются естественными лабораториями по проверке представлений о сильном гравитационном поле и свойствах вещества в надъядерной области плотностей $\rho \gtrsim \rho_n$, $\rho_n \approx 3\cdot 10^{14}$ г·см$^{-3}$ - плотность сплошной ядерной материи. Центральным в определении массы, радиуса, момента инерции и др. параметров сверхплотных звезд является вопрос о зависимости плотности массы от давления вырожденного вещества:

$$\rho = \rho(P) \tag{7}$$

(уравнение состояния). Реальные температуры в объеме сверхплотных звезд всегда значительно ниже температур вырождения частиц плазмы, и поэтому вкладом температуры в уравнение состояния можно пренебречь.

В случае белых карликов свойства вырожденного сверхплотного вещества (атомные ядра, окруженные вырожденным электронным газом) и его уравнение состояния достаточно основательно изучены. Иная ситуация в случае нейтронных звезд, внутри которых (за исключением тонкой

коры) плотность вещества $\rho \geq \rho_m$. При плотностях $\rho \sim \rho_m$ атомные ядра существовать не могут, и мы имеем дело со сплошной ядерной материей, состоящей в основном из нуклонов. С повышением плотности в игру вступают гипероны, резонансы, а также пионы и каоны (о роли последних пока нет единого мнения). Наконец, при еще больших плотностях, когда среднее расстояние между барионами сравнивается с размером кваркового мешка нуклонов, происходит фазовый переход плазмы в состояние сплошной кварковой материи, состоящей из кварков и небольшого количества лептонов. Не претендуя на охват соответствующей обширной литературы, укажем лишь на работы [5-14] (см. также приведенные там ссылки).

Исследования по определению уравнения состояния вырожденной плазмы в надъядерной области плотностей условно можно разделить на две группы: в первой используется нерелятивистская теория, а во-второй - теоретико-полевой подход. В первом случае задача сводится к выбору (а) нуклон-нуклонного потенциала и (б) метода расчета многочастичных эффектов. Множеством сочетаний вариантов (а) и (б) обусловлено существование ряда уравнений состояния. Однако подобные модельные уравнения состояния нуждаются в уточнении, поскольку в надъядерной области плотностей в игру вступают релятивистские эффекты, и описание межчастичных взаимодействий с помощью потенциалов оказывается неудовлетворительным. В моделях второй группы взаимодействие частиц описывается путем обмена квантами. Эти модели оперируют эффективным взаимодействием и удовлетворительно воспроизводят параметры сплошного ядерного вещества. Наряду с этим остается не выясненным вопрос об их согласии с данными по нуклон-нуклонному рассеянию и об адекватном описании свойств дейтрона. Дополнительные осложнения появляются при плотностях плазмы выше порогов стабилизации гиперонов ввиду отсутствия исчерпывающей информации о характере гиперон-гиперонных и гиперон-нуклонных взаимодействий. В ряде случаев они предполагаются одинаковыми, хотя и менее интенсивными, чем нуклон-нуклонные взаимодействия. Объективные неопределенности в знании межчастичных взаимодействий и сложности в учете многочастичных эффектов затрудняют однозначный выбор уравнения состояния при плотностях порядка и выше ядерной.

Например, в [5,7,9,12,13] использованы два десятка вариантов уравнения состояния. В настоящей работе мы выбрали из них девять. Необходимая информация о моделях приведена в табл.1*. С ее помощью можно определить зависимость ρ от P в виде аналитических выражений, табличных данных и графиков.

---

*Аналогичная таблица приведена в [4].

Таблица 1

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИЗ [5,7,9,12,13]

Модель	Уравнение*, таблица, параграф**	Литература	Уравнение состояния	Данная работа η (%)	Данная работа a
1	(29,13)*	[5]	Oppenheimer&Volkoff. 1939 (ideal neutron gas)	2.0	0.19
2	2	[7]	Pandharipande 1971 (neutron), BBP[a], BPS[b] and FMT[c]	3.4	0.27
3	3	[7]	Pandharipande 1971 (hyperon), BBP[a], BPS[b] and FMT[c]	3.1	0.26
4	7	[7]	Pandharipande 1971 (hyperon), Arponen 1972, BPS[b] and FMT[c]	2.8	0.25
5	8	[7]	Canuto&Chitre 1974, Pandharipande 1971, BBP[a], BPS[b] and FMT[c]	4.6	0.28
6	6.2**	[9]	Grigorian&Sahakian 1983	3.6	0.33
7	2	[12]	P[d] S AØ[e] - 5, BBP[a] - 2 and BBP[a] - 1	3.4	0.25
8	7	[12]	PS[d], WFF[f] - 3, BBP[a] - 2, BPS[b] - 1 and HZD[g]	4.7	0.30
9	1	[13]	PS[d], AØ[e] - 5, BEHOØ -nr (non relativistic), BBP[a] - 2, BBP[a] - 1 and HZD[g]	2.4	0.25

Примечания: В численных расчетах массы, радиуса и момента инерции нейтронных звезд мы использовали программу, общую для всех уравнений состояния. Для моделей 1-3, 6-9 результаты наших расчетов совпадают с соответствующими данными [5,7,9,12,13]. Для 4-ой и 5-ой моделей имеются расхождения с данными [7].

[a]Baym, Bete&Pethik 1971
[b]Baym, Pethik&Sutherland 1971
[c]Feynman, Metropolis&Teller 1949
[d]Pandharipande&Smith 1975
[e]Arnsten&Østgaard 1984
[f]Wiringa, Fiks&Fabrocini 1988
[g]Haensel, Zdunik&Dobaczewski 1989
[h]Bao, Engvik, Hjorth-Jensen, Osnes&Østgaard 1994
η - погрешность аппроксимации (3a) для устойчивых нейтронных звезд
α - безразмерная постоянная в (13)

Первая модель (идеальный нейтронный газ) была выбрана в качестве примера крайне "мягкого уравнения состояния". Разумеется, выбранные уравнения состояния не претендуют на охват всего множества имеющихся вариантов.

3. *Проверка приближенных формул.* Начнем с 6-ой модели уравнения состояния. Результаты интегрирования (1) совместно с уравнениями Оппенгеймера-Волкова (масса, радиус, момент инерции и т.д.) приведены в [9]. Мы заново провели расчеты, дополнив их интегрированием (5) совместно с уравнениями Оппенгеймера-Волкова. На рис.1 представлена зависимость отношения $\sigma/\sigma_0(I)$ от релятивистского фактора

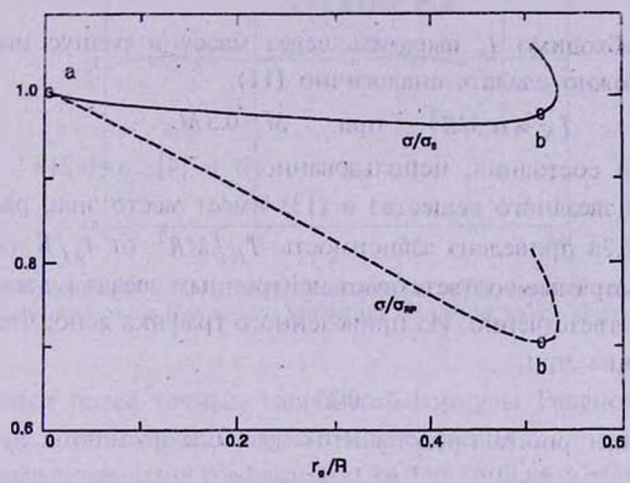

Рис.1. Сплошная кривая - зависимость отношения $\sigma/\sigma_0(I)$ от релятивистского фактора r_g/R нейтронной звезды. Пунктирная кривая - зависимость σ/σ_{RP} от r_g/R. Использована 6-ая модель уравнения состояния табл.1. Пояснения в тексте.

r_g/R (сплошная кривая),

$$r_g = \frac{2}{c^2}GM \tag{8}$$

- гравитационный радиус нейтронной звезды. Приведенные данные охватывают все конфигурации от устойчивых нейтронных звезд (отрезок кривой между кружочками a и b) до неустойчивых конфигураций. Устойчивой нейтронной звезде с наибольшей массой $2.14M_\odot$ соответствует кружочек b. Из хода кривой σ/σ_0 видно, что относительная погрешность аппроксимации $\sigma \approx \sigma_0(I)$ составляет 3.6% для ветви устойчивых нейтронных звезд и несколько больше (6%) для неустойчивых конфигураций. В случае $\sigma \approx \sigma_*(I_N)$ соответствующие погрешности еще меньше.

Согласно (3a)

$$\sigma \approx \sigma_0(I) \approx a\,\sigma_{RP}, \tag{9}$$

где

$$\sigma_{RP} = \frac{1}{1 - r_g/R}, \quad a = \sqrt{\left(1 - \frac{2GI}{c^2R^3}\right)\left(1 - \frac{GI}{2c^2R^3}\right)} \le 1, \tag{10}$$

и поэтому (6) можно записать в виде

$$I \approx a\sigma_{RP} I_N, \quad I_N \approx 0.21 a^{-1} MR^2. \tag{11}$$

Зависимость σ/σ_{RP} от r_g/R также приведена на рис.1 (пунктирная кривая). Ход этой кривой указывает на то, что для устойчивых конфигураций погрешность аппроксимации $\sigma \approx a\sigma_{RP}$ составляет 18% (при оптимальном $a \approx 0.85$), что в 5 раз больше погрешности $\sigma \approx \sigma_{II}(I)$. Следовательно, имеется возможность уточнить (6) путем замены $\sigma \approx a\sigma_{RP}$ на (3б):

$$I \approx \sigma_*(I_N) I_N. \tag{12}$$

Для этого необходимо I_N выразить через массу и радиус нейтронной звезды. Это можно сделать аналогично (11):

$$I_N \approx \alpha MR^2 \quad \text{при} \quad M \ge 0.5 M_\odot. \tag{13}$$

Для уравнения состояния, использованного в [4], $\alpha = 0.21 a^{-1}$. В случае несжимаемого звездного вещества в (13) имеет место знак равенства и $\alpha = 2/5$. На рис.2а приведена зависимость I_N/MR^2 от r_g/R (кривая d). Вертикальные прямые соответствуют нейтронным звездам с массами 0.5; 1 и $2.14 M_\odot$ соответственно. Из приведенного графика ясно, что формула (13) справедлива при

$$\alpha \approx 0.33. \tag{14}$$

В верхней части рис.2а представлены графики функции I_N/M^β для трех значений $\beta = 1.58$; 1.62 и 1.65 (кривые c, b и a), из которых следует, что

$$I_N \approx 9.2 \cdot 10^{44} (M/M_\odot)^{1.62} \text{ г·см}^{-3} \quad \text{при} \quad M \le M_\odot. \tag{15}$$

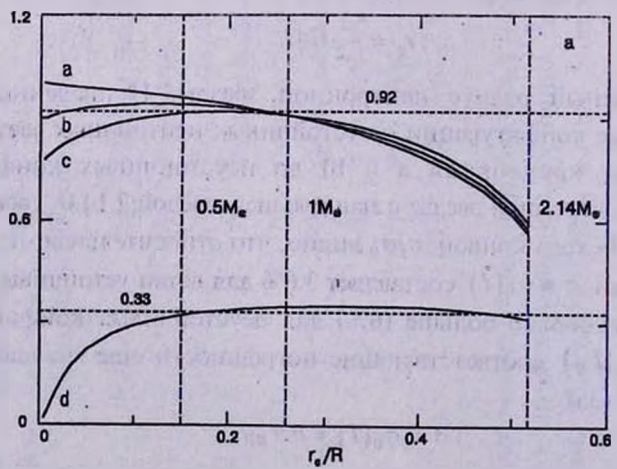

Рис.2а. Кривые a, b, c - графики функции $I_N/I_0(M/M_\odot)^\beta$ для $\beta = 1.65$; 1.62 и 1.58 соответственно, $I_0 = 10^{45}$ г см^2. Кривая d - зависимость I_N/MR^2 от r_g/R.

Сшивая (13) и (15), приходим к формуле

$$I_N \approx \begin{cases} 0.33\, MR^2 & \text{при } M \geq 0.7\, M_\odot \\ 9.2 \cdot 10^{44} (M/M_\odot)^{1.62} & \text{при } M \leq 0.7\, M_\odot. \end{cases} \tag{16}$$

Функция $I/\sigma_*(I_N)I_N$ приведена на рис.2б (кривая е). Как видим, суммарная погрешность (12) и (16) не превышает 6% для всей ветви устойчивых нейтронных звезд с $0.03 \leq M \leq 2.14\, M_\odot$. Выражения (12) и

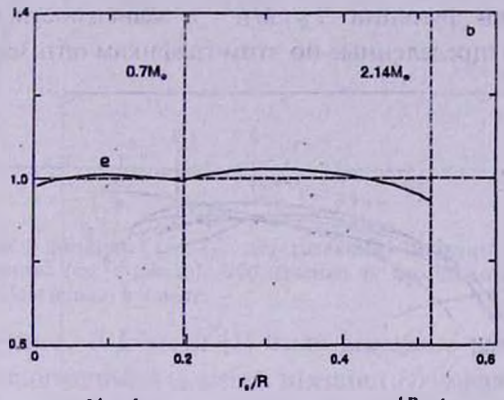

Рис.2b. Отношение $I/\sigma_* I_N$ в зависимости от r_k/R (кривая с). I_N вычислено по формуле (16). Использована 6-ая модель уравнения состояния табл.1. Дальнейшие пояснения в тексте.

(16) являются более точным вариантом формулы Равенола-Петика (6). Перейдем к другим моделям уравнения состояния.

На рис.3а приведены графики тех же функций, что и на рис.1. Цифры указывают модели уравнений состояния согласно табл.1. Сплошные кривые соответствуют отношению $\sigma/\sigma_0(I)$, пунктирные - отношению

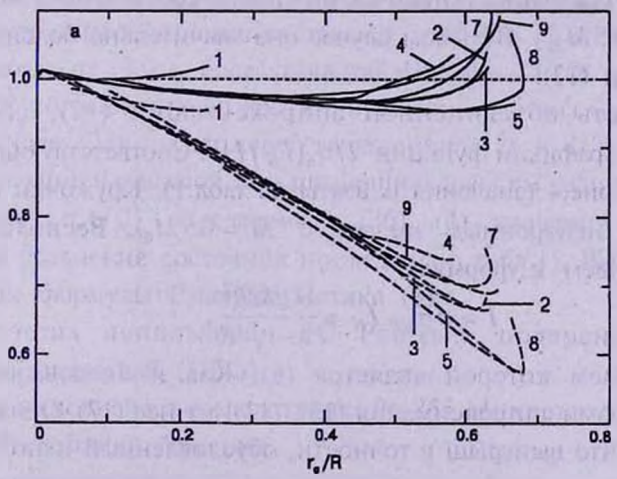

Рис.3а. Графики тех же функций, что и на рис.1 для различных вариантов уравнения состояния сверхплотного вещества. Цифры указывают модели уравнения состояния согласно табл.1.

σ/σ_{RP}. Из хода кривых видно, что за исключением 1-ой модели аппроксимация $\sigma \approx \sigma_0(I)$ в ≈6 раз точнее аппроксимации $\sigma \approx a\sigma_{RP}$ (при оптимальном выборе $0.8 \le a \le 0.9$, зависящем от модели). Погрешность самой аппроксимации $\sigma \approx \sigma_0(I)$ для устойчивых нейтронных звезд составляет 2-5% (см. 5-ый столбец табл.1).

Ограничимся рассмотрением нейтронных звезд с $M \ge 0.5\,M_\odot$, для которых зависимость I_N от M и R определяется формулой (13). На рис.3b приведены графики функции I_N/MR^2 в зависимости от r_g/R (ср. с кривой d рис.2a). Определенные по этим графикам оптимальные значения

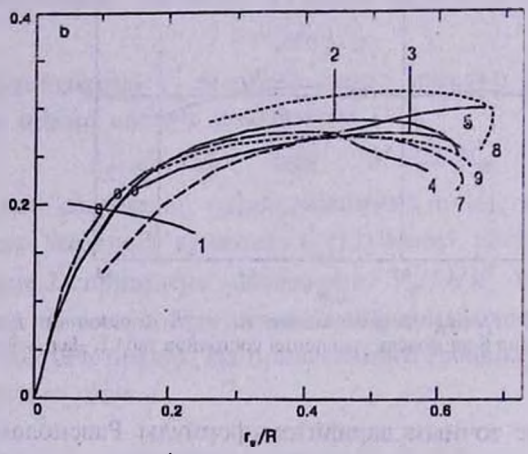

Рис.3b. Отношение I_N/MR^2 в зависимости от r_g/R. Кружочек на кривой (при наличии) соответствует нейтронной звезде с $M = 0.5\,M_\odot$ (ср. с кривой d рис.2a).

α приведены в последнем столбце табл.1. Имея α, по кривой I_N/MR^2 можно оценить погрешность аппроксимации (13) для той или иной модели уравнения состояния (кружочек на кривой соответствует нейтронной звезде с $M = 0.5\,M_\odot$). В любом случае она значительно больше погрешности формулы (12).

Погрешность объединенной аппроксимации (12), (13) можно определить по графикам функции $I/\sigma_*(I_N)I_N$. Соответствующие кривые приведены на рис.4 (значения α взяты из табл.1). Кружочки на кривых соответствуют нейтронным звездам с $M = 0.5\,M_\odot$. Воспользовавшись (11), (13), придем к формуле

$$I \approx a\sigma_{RP} I_N \approx \frac{\alpha\, aMR^2}{1 - r_g/R}, \qquad (17)$$

частным случаем которой является (6). Как и следовало ожидать, предлагаемая нами аппроксимация (12), (13), точнее (17). Однако следует иметь в виду, что выигрыш в точности, обусловленный использованием $\sigma \approx \sigma_*(I_N)$ вместо $\sigma \approx a\sigma_{RP}$, частично теряется использованием менее точной аппроксимации (13).

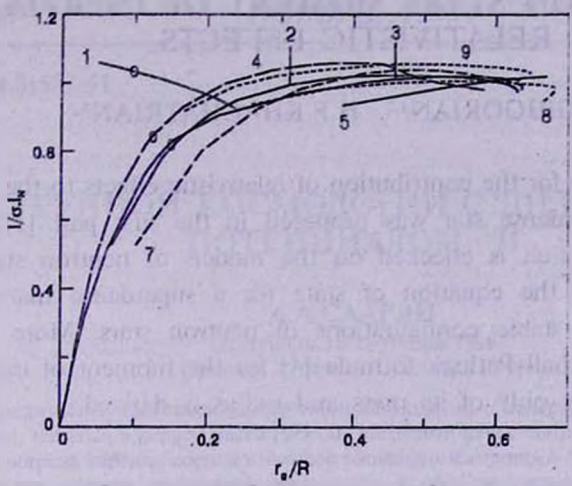

Рис.4. Графики функции $I/\sigma_* I_N$ для различных вариантов уравнения состояния сверхплотного вещества (ср. с рис.2b). Обозначения те же, что и на рис.3. I_N вычислено по формуле (13). Пояснения в тексте.

4. *Заключение*. В I части [1] было выведено релятивистское уравнение (1) для накопленного момента инерции $i(r)$ медленно вращающегося небесного тела. Была предложена и апробирована на модели сверхплотного небесного тела из несжимаемого вещества аппроксимация (3а) для $\sigma = I/I_N$, где $I = i(R)$ - момент инерции, вычисленный с использованием уравнения (1) релятивистской теории, а $I_N = i_N(R)$ - аналогичная величина, вычисленная с использованием уравнения (5) нерелятивистской теории.

В настоящей II части работы аппроксимация (3а) апробирована на моделях нейтронных звезд с 9 различными вариантами уравнения состояния сверхплотного вещества. Для устойчивых конфигураций погрешность аппроксимации составляет 2-5% (см. 5-ый столбец табл.1). При переходе от (3а) к более простой формуле (9) за исключением 1-ой модели погрешность возрастает примерно в 5 раз (см. рис.1 и 3а).

На основе (3а) предложены выражения (12) и (13), связывающие момент инерции I с массой M и шварцшильдовским радиусом R нейтронной звезды ($\sigma_*(I_N)$ определено в (3б), (4), значения α для разных вариантов уравнения состояния приведены в табл.1). Выражения (12) и (13) точнее формулы Равенола-Петика (6).

В расчетах использован PC Pentium, подаренный Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG).

Работа выполнена в рамках гранта 96-855 Министерства образования и науки Республики Армения.

[1]Институт прикладных проблем физики, Армения
[2]Ереванский государственный университет, Армения

ON NEUTRON STARS MOMENT OF INERTIA. II. RELATIVISTIC EFFECTS

L.Sh.GRIGORIAN[1,2], H.F.KHACHATRIAN[1,2]

An approximation for the contribution of relativistic effects to the moment of inertia of a superdense star was proposed in the first part [1]. In this paper the approximation is checked on the models of neutron stars for 9 different versions of the equation of state for a superdense matter. It is accurate to 5% for stable configurations of neutron stars. More accurate version of the Ravenhall-Pethick formula [4] for the moment of inertia of a neutron star in terms only of its mass and radius is derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л.Ш.Григорян, Г.Ф.Хачатрян*, Астрофизика, **40**, 87, 1997.
2. *J.R.Oppenheimer, G.M.Volkoff*, Phys. Rev., **55**, 374, 1939.
3. *S.Chandrasekhar, J.C.Miller*, Mon. Notis. Roy. Astron. Soc., **167**, 63, 1974.
4. *D.G.Ravenhall, C.J.Pethick*, Astrophys. J., **424**, 846, 1994.
5. *Г.С.Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
6. *Г.Бете*, Теория ядерной материи, Мир., М., 1974.
7. *W.D.Arnett, R.L.Bowers*, Astrophys. J., **33**, 415, 1977.
8. *А.Б.Мигдал*, Фермионы и бозоны в сильных полях, Наука, М., 1978.
9. *L.Sh.Grigorian, G.S.Sahakian*, Astrophys. Space Sci., **95**, 305, 1983.
10. *R.B.Wiringa*, Rev. Mod. Phys., **65**, 231, 1993.
11. *H.Heiselberg, C.J.Pethick, E.F.Staubo*, Phys. Rev. Lett., **70**, 1355, 1993.
12. *G.Bao, E.Østgaard, B.Dybvik*, Int. J.Mod. Phys., D3, 813, 1994.
13. *G.Bao, L.Engvik, M.Hjorth-Jensen, E.Osnes, E.Østgaard*, Nucl. Phys., A575, 707, 1994.
14. *K.Westerberg*, Phys. Rev., **D51**, 5030, 1995.