

ВРАЩЕНИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ В РАМКАХ ОТО

Д.М.СЕДРАКЯН

Поступила 27 декабря 1996

Принята к печати 17 февраля 1997

Получены уравнения динамики вращения двухкомпонентной модели нейтронной звезды в рамках Общей теории относительности. Показано, что при стационарном вращении нормальной компоненты звезды, $\Omega = \text{const}$, угловая скорость сверхтекучей компоненты Ω_s зависит от координат и равняется $\Omega_s + \omega$, где ω - недиагональная компонента метрического тензора.

1. *Введение.* Динамические уравнения, описывающие вращение сверхтекучей жидкости в плоском пространстве, были получены в работе [1]. Эти уравнения были применены для исследования скачков и после-скачковой релаксации угловой скорости пульсаров [2]. Несмотря на хорошее согласие теории с наблюдениями скачков угловой скорости пульсара Vela, для построения окончательной теории необходим учет эффектов Общей теории относительности (ОТО). Следовательно первоочередной задачей является обобщение полученных в работе [1] уравнений динамики вращения сверхтекучей жидкости в случае искривленного гравитацией пространства.

Недавно такое рассмотрение было проведено в работах [3,4] с предположением, что угловая скорость $\Omega \leq \Omega_{\text{кр}}$, где $\Omega_{\text{кр}}$ - критическая скорость образования сверхтекучих вихрей во вращающейся звезде. Однако реальные угловые скорости вращения пульсаров $\Omega \gg \Omega_{\text{кр}}$, что говорит о наличии довольно плотной вихревой решетки в нейтронной звезде.

Целью данной статьи является получение уравнения динамики вращения двухкомпонентной модели нейтронной звезды (звезды, состоящей из смеси сверхтекучей и нормальной жидкостей) в рамках ОТО.

Для получения уравнений динамики мы ограничимся простой моделью нейтронной звезды, состоящей из нормальной коры и сверхтекучего ядра, которое в основном состоит из нейтронов. В ядре также имеется незначительное количество (5%) сверхпроводящих протонов и нормальных электронов. Трение между сверхтекучей нейтронной жидкостью и

нормальными электронами осуществляется взаимодействием электронов с магнитным полем нейтронных вихрей [5]. В нейтронных звездах значительные изменения коэффициента трения происходят на макроскопических расстояниях, которые гораздо больше межвихревых расстояний, что позволяет описать поведение вихрей гидродинамическим приближением. Мы также предполагаем, что нормальные электроны вращаются как твердое тело. Это условие удовлетворяется благодаря наличию внутри звезды сверхсильных магнитных полей $\sim 10^{12}$ Гаусс, что связывает нормальную компоненту (электроны) в сверхтекучем ядре с твердой корой звезды [2,5]. Также предположим, что во время движения вихри остаются параллельными оси вращения. Исследование проводится в предположении наличия цилиндрической симметрии.

2. Интервал и четырехмерные скорости двухкомпонентной вращающейся жидкости. Рассмотрим метрику гравитационного поля, создаваемого вращением распределения масс. Введем обозначения $x^0 = t$, $x^1 = \varphi$, а x^1 и x^2 выберем как R и θ или z и r при использовании сферических или цилиндрических координат соответственно. Здесь используется система единиц $k = c = 1$, где k - гравитационная постоянная, а c - скорость света. Очевидно, что распределение масс, а также гравитационное поле будут аксиально - симметричными, то есть:

$$g_{ik} = g_{ik}(x^1, x^2, \Omega_c). \quad (1)$$

В общем случае угловая скорость нормальной компоненты звезды может зависеть от t' , x^1 , x^2 и имеет вид:

$$\Omega_c = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2)$$

Произведем преобразование координат $t' \rightarrow -t$, $x^1 = x^1$, $x^2 = x^2$ и $\varphi' = -\varphi$. Тогда угловая скорость Ω_c не меняется, следовательно и g_{ik} не меняется. Из требования инвариантности интервала непосредственно следует:

$$g_{01} = g_{13} = g_{23} = g_{02} = 0.$$

Таким образом, в наиболее общем случае четырехмерный интервал можно записать в виде:

$$\begin{aligned} -ds^2 = & -g_{00} dt^2 + g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + \\ & + g_{33} d\varphi^2 + 2g_{03} d\varphi dt + 2g_{12} dx^1 dx^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Дальнейшего упрощения в этом выражении можно добиться подходящим преобразованием координат x^1 и x^2 . Так, потребуем, чтобы в новых координатах имело место:

$$g_{12} = 0 \text{ и } g_{33} = g_{22} f(x^2), \quad (4)$$

где $f(x^2)$ - произвольная функция, и выбирается в случае сферических координат $\sin^2\theta$, а в случае цилиндрических - r^2 . Для удобства введем обозначения:

$$g_{11} = e^\lambda, \quad g_{22} = e^\mu, \quad g_{33} = \omega e^\mu f(x^2), \quad g_{00} = \omega^2 e^\mu f(x^2) - e^\nu. \quad (5)$$

В новых обозначениях четырехмерный интервал можно переписать в виде

$$ds^2 = (e^\nu - \omega^2 e^\mu f(x^2)) dt^2 - e^\mu \left((dx^2)^2 + f(x^2) d\varphi^2 \right) - 2\omega e^\mu f(x^2) d\varphi dt - e^\lambda (dx^1)^2, \quad (6)$$

где λ , μ , ω и ν - функции от x^1 , x^2 и $\Omega_c(t, x^1, x^2)$. Так как метрика должна быть инвариантна относительно преобразования $t \rightarrow -t$, а угловая скорость нормальной жидкости при этом преобразовании меняет знак, то очевидно, что все компоненты метрического тензора, кроме ω , будут четными функциями от Ω_c . Что касается функции ω , то она должна быть нечетной функцией от Ω_c .

Если ограничить наше рассмотрение твердотельным вращением нормальной компоненты звезды, то Ω_c будет функцией только времени. В нестационарных проявлениях вращения пульсаров изменение угловой скорости Ω_c во времени мало по сравнению с угловой скоростью пульсара. Так, даже при больших скачках угловой скорости пульсаров $\Delta\Omega_c / \Omega_c \approx 10^{-6}$, а "шумы" угловой скорости между скачками еще меньше: $\Delta\Omega_c / \Omega_c \approx 10^{-9}$. Угловые скорости пульсаров имеют также малые вековые изменения: $\dot{\Omega}_c / \Omega_c \approx 10^{-13} + 10^{-15} \text{ с}^{-1}$. Из сказанного вытекает, что в реальных задачах астрофизики быстровращающиеся небесные тела вращаются в основном с постоянной угловой скоростью. Сделанное замечание позволяет нам, при рассмотрении нестационарных явлений пульсаров, считать гравитационное поле и распределение масс в звезде не зависящими от времени, однако необходимо учитывать зависимость от времени гидродинамических скоростей сверхтекучей и нормальной жидкостей.

Обозначим контравариантные компоненты четырехмерных гидродинамических скоростей нормальной и сверхтекучей жидкостей следующим образом: $u'(c)$ и $u'(s)$. В случае вращения отличны от нуля только компоненты с $i=0$ и $i=3$. Следовательно, мы имеем две пары неизвестных компонент четырехмерной скорости двухкомпонентной жидкости, которые являются функциями x^1 , x^2 и t и определяются из уравнений

динамики вращения звезды. Две из неизвестных функций выберем, $u^0(c)$ и $u^0(s)$, а вместо функций $u^3(c)$ и $u^3(s)$ введем другие неизвестные функции, Ω_c и Ω_s , следующим образом:

$$\begin{aligned} u^3(c) &= \Omega_c u^0(c), \\ u^3(s) &= -\frac{g_{03}}{g_{33}} u^0(s) + \Omega_s u^0(s). \end{aligned} \quad (7)$$

Такой выбор новых неизвестных функций связан с тем, что при стационарном вращении они имеют простой физический смысл. Действительно, как показано в работе [6], при стационарном вращении звезды, состоящей из нормального вещества, минимум энергии соответствует состоянию, в котором $u^3(c)$ и $u^0(c)$ связаны соотношением (7), где Ω_c - постоянно и представляет собой угловую скорость твердотельного вращения звезды. Аналогично, если Ω_s назвать угловой скоростью сверхтекучей компоненты жидкости, то она должна быть пропорциональна плотности квантовых вихрей вращающейся сверхтекучей жидкости. Первое слагаемое во второй формуле (7) добавлено в связи с тем, что при отсутствии квантовых вихрей, т.е. при $\Omega_c < \Omega_{кр}$, как показано в работе [4], $u^3(s)$ имеет вид:

$$u^3(s) = -\frac{g_{03}}{g_{33}} u^0(s).$$

Используя известное соотношение для четырехмерных скоростей: $u^i(s)u_i(s) = u^i(c)u_i(c) = 1$, можно выразить $u^0(c)$ и $u^0(s)$ через компоненты метрического тензора g_{ik} и угловых скоростей Ω_c и Ω_s . Простой расчет дает:

$$\begin{aligned} u^0(c) &= [g_{00} + 2\Omega_c g_{03} + \Omega_c^2 g_{33}]^{-1/2}, \\ u^0(s) &= [g_{00} + 2(\Omega_s - \omega) g_{03} + (\Omega_s - \omega)^2 g_{33}]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

При необходимости можно найти ковариантные компоненты четырехмерных скоростей из требования $u_i = g_{ik}u^k$. В частности, для ковариантных компонент с $i=3$ имеем:

$$\begin{aligned} u_3(c) &= (\Omega_c + \omega) g_{33} u^0(c), \\ u_3(s) &= \Omega_s g_{33} u^0(s). \end{aligned} \quad (9)$$

В конце отметим, что в случае твердотельного вращения коры звезды естественно предположить, что Ω_c есть функция только от времени,

тогда как Ω_s будет зависеть от координат и времени.

3. *Уравнение динамики вращения двухкомпонентной жидкости.* Как показано в аботе [4], уравнение, описывающее волновую функцию сверхтекучего конденсата: $\Psi = \phi e^{i\delta}$, является уравнением Клейна-Гордона для скалярной функции:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \Psi \right) + m(\phi^2) \Psi = 0, \quad (10)$$

где $m(\phi^2)$ - переменная эффективной массы. Решение этого уравнения для плотности тока сверхтекучей жидкости дает следующее выражение:

$$j_i = n u_i(s) = \phi^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \delta, \quad (11)$$

где $u_i(s)$ - ковариантная компонента четырехмерной гидродинамической скорости сверхтекучей жидкости, n - концентрация сверхтекучих частиц. Известно также [7]:

$$m(\phi^2) u_i(s) = n p_i, \quad (12)$$

где p_i - четырехмерный импульс сверхтекучих частиц, а

$$m(\phi^2) = \frac{n}{\phi^2} = \frac{\rho_s + \Phi_s}{n} = \frac{w(s)}{n}.$$

Здесь $w(s) = \rho_s + \Phi_s$ есть тепловая функция сверхтекучей жидкости. Как видно из уравнений (11) и (12), в случае отсутствия вихрей потенциальной функцией является:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta = \frac{j_\alpha}{\phi^2} = \frac{n}{\phi^2} u_\alpha(s) = m(\phi^2) u_\alpha(s), \quad (13)$$

где x^α являются только пространственные координаты: т.е. $\alpha=1,2,3$.

Условие градиентности выражения $m(\phi^2) u_\alpha$ в декартовых координатах можно написать в следующем виде:

$$e^{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} m(\phi^2) u_\gamma - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} m(\phi^2) u_\beta \right) = 0, \quad (14)$$

где $e^{\alpha\beta\gamma}$ - антисимметричный единичный тензор. В случае наличия вихревой решетки условие квантования дает обобщение уравнения (14) в следующем виде:

$$e^{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} m(\phi^2) u_\gamma - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} m(\phi^2) u_\beta \right) = 2\pi\hbar e^\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (15)$$

где e^α - компонента единичного вектора по направлению вихря, $\vec{r}$ -

координаты точки в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{e}$, а $\vec{r}_i$ - точка пересечения вихря с этой плоскостью. Если считать, что расстояния между вихрями малы по сравнению с макроскопическими расстояниями звезды, то можно ввести плотность вихрей [8]:

$$n = \sum_i \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (16)$$

где γ - определитель трехмерного метрического тензора, определяющий геометрические свойства пространства с постоянным гравитационным полем, и связан с определителем метрики $g_{\alpha\beta}$ известным соотношением $-g = g_{00}\gamma$. Тогда уравнение (15) примет вид:

$$\frac{e^{a\beta\gamma}}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} m(\phi^2) u_\gamma - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} m(\phi^2) u_\beta \right) = 2\pi\hbar e^a n(r, t). \quad (17)$$

Если учесть, что при нерелятивистском пределе $m(\phi^2)$ переходит в массу куперовской пары нейтронов, равной $2m_n$, то, при отсутствии гравитационного поля, уравнение (17) переходит в известное условие квантования в плоском пространстве [1]:

$$\text{rot} \vec{v}_s = \vec{v} n(r, t),$$

где $\vec{v} = \frac{\pi\hbar}{m_n} \vec{e}$ и $\vec{v}_s$ - скорость сверхтекучей жидкости.

Движение вихревой решетки в искривленном пространстве описывается четырехмерным током вихрей:

$$j_L^i = \sum_j \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \frac{dx_L^i}{dt} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} n(r, t) \frac{dx_L^i}{dt}. \quad (18)$$

Здесь $\frac{dx_L^i}{dt}$ - скорость движения вихревой решетки. Тогда уравнение непрерывности, при отсутствии пиннинга вихрей, имеет вид:

$$j_{L,i}^i = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} j_L^i) = 0. \quad (19)$$

Подставляя в (19) выражение j_L^i из (18), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} n) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{\gamma} n \frac{dx_L^\alpha}{dt} \right) = 0. \quad (20)$$

Для определения скорости движения вихревой решетки $\frac{dx_L^\alpha}{dt}$ мы должны знать силы, действующие на нейтронный вихрь. Если скорость сверхтекучей жидкости отличается от скорости вихря, то на него действует сила Магнуса. Под действием этой силы вихрь ускоряется. При

движении вихря появляется сила трения, направленная против движения вихря. При равенстве этих двух сил вихрь будет двигаться равномерно со скоростью $\frac{dx_L^\alpha}{dt}$. Следовательно, $\frac{dx_L^\alpha}{dt}$ можно найти из требования равенства силы Магнуса и трения.

Выражение для силы Магнуса можно найти из закона Бернулли, который имеет вид [4]:

$$m(\phi^2) \frac{\sqrt{g_{00}}}{\Gamma} = \text{const},$$

где Γ - Лоренц - фактор в искривленном пространстве. После несложных операций найдем ковариантную компоненту силы Магнуса:

$$F_\alpha = \frac{2\pi\hbar}{m(\phi^2)} w(s) \sqrt{-g} e_{\alpha\beta\gamma} \left(v_{(s)}^\beta e^\gamma - v_{(s)}^\gamma e^\beta \right). \quad (21)$$

Здесь v^α - пространственная компонента четырехмерной скорости сверхтекучей жидкости в системе покоя вихря, $e_{\alpha\beta\gamma}$ - единичный четырехмерный антисимметрический тензор. В случае плоского пространства в нерелятивистском пределе: $m(\phi^2) = 2m_n$, $w(s) = \rho_s$ и $\sqrt{-g} = 1$, (21) переходит в известную формулу для силы Магнуса:

$$\vec{F} = \rho_s [\vec{v}, \vec{v}_s].$$

Предположим, что имеет место линейная связь между силой трения и пространственными компонентами четырехмерной скорости нормальной жидкости в системе покоя вихря и напомним:

$$F'_\alpha = -\eta v_\alpha(c), \quad (22)$$

где $v_\alpha(c)$ - скорость нормальной жидкости в системе покоя вихря.

Если ввести цилиндрические координаты $(x^1 = z, x^2 = r)$, то, используя (21) и (22) и соответствующие выражения для контрвариантных компонент сил, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{\sqrt{-g}} v_3(s) &= -v^2(c), \\ \chi \sqrt{-g} v^2(s) &= v_3(c), \end{aligned} \quad (23)$$

где введено обозначение: $\chi = \frac{2\pi\hbar}{m(\phi^2)} \cdot \frac{w(s)}{\eta}$. Если учесть также, что радиальная скорость сверхтекучей и нормальной компонент в системе

покоящегося наблюдателя равняется нулю, то

$$\frac{v^2(c)}{v^0(c)} = \frac{v^2(s)}{v^0(s)} = -\frac{dx_L^2}{dt},$$

и уравнения (23) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_L^2}{dt} &= -\frac{v_3(c)}{\chi\sqrt{-gv^0(s)}}, \\ v_3(c) &= -\frac{\chi^2}{1+\chi^2} \frac{v_3(s)v^0(s) - v_3(c)v^0(c)}{v^0(c)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя второе выражение из этих уравнений в первое, получим выражение для радиальной скорости вихря:

$$\frac{dx_L^2}{dt} = \frac{\chi}{1+\chi^2} \frac{v_3(s)v^0(s) - v_3(c)v^0(c)}{\sqrt{-gv^0(c)v^0(s)}}. \quad (25)$$

Из (25) видно, что радиальные скорости вихрей малы, когда скорости вращения сверхтекучей и нормальной жидкостей близки друг другу. В астрофизических задачах вращения пульсаров это условие хорошо выполняется, следовательно $\frac{dx_L^0}{dt} \ll 1$. Это означает, что для покоящегося наблюдателя вихрь в основном совершает вращательное движение. Следовательно, для покоящегося наблюдателя система покоя вихря - это система, совершающая вращение с угловой скоростью $\Omega_L(r, t)$. Из второго уравнения (24) видно, что при сильных трениях, т.е. $\chi \rightarrow 0$, вихрь вращается вместе с нормальной жидкостью ($\Omega_L \rightarrow \Omega_c$), а при отсутствии трения, т.е., $\chi \rightarrow \infty$, вихрь вращается со сверхтекучей жидкостью ($\Omega_L \rightarrow \Omega_s$).

Считая вихрь параллельным оси вращения звезды, напишем уравнение (17) в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial}{\partial r}(\mu_s u_3(s)) = \sqrt{\gamma} n(r, t), \quad (26)$$

где $\mu_s = \frac{m(\phi^2)}{2\pi\hbar}$. Отсюда, в частности, следует:

$$\mu_s u_3(s) = \int_0^r n(r', t) \sqrt{\gamma} dr'.$$

Напишем также уравнение (20) в цилиндрических координатах и, интегрируя его по r' от 0 до r , получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^r n(r', t) \sqrt{\gamma} dr' = -n(r, t) \sqrt{\gamma} \frac{dx_L^2}{dt}. \quad (27)$$

Из (26) и (27) окончательно имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu_s \mu_3(s) = -\sqrt{\gamma} n(r, t) \frac{dx_L^2}{dt}, \quad (28)$$

где $\frac{dx_L^2}{dt}$ определяется из уравнения (25).

Чтобы замкнуть систему динамических уравнений, описывающих вращение звезды, мы должны добавить уравнение релятивистского момента вращения звезды в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \{w(c) u_3(c) u^0(c) + w(s) u_3(s) u^0(s)\} \sqrt{-g} dV = M_{\text{ext}}, \quad (29)$$

где M_{ext} - внешний тормозящий момент сил. Уравнения (24), (26), (28) и (29) составляют замкнутую систему динамических уравнений, описывающих нестационарное вращение нейтронной звезды - пульсара. Конечно, к этим уравнениям необходимо добавить и уравнение ОТО Эйнштейна для определения компонентов метрического тензора $g_{\mu\nu}$, которые входят в вышеуказанные уравнения.

В заключение отметим, что при отсутствии тормозящих сил, т.е. при $M_{\text{ext}}=0$, вращение звезды становится стационарным. Тогда из

уравнения (28) следует, что $\frac{dx_L^2}{dt} = 0$. Это условие, согласно формуле (25), дает:

$$v_3(c) v^0(c) = v_3(s) v^0(s). \quad (30)$$

В этом случае вихри совершают только вращательное движение с угловой скоростью Ω_L , следовательно, согласно (8) и (9), имеем:

$$\begin{aligned} v_3(s) &= g_{33}(\Omega_s - \Omega_L) v^0(s), \quad v_3(c) = g_{33}(\Omega_c - \Omega_L + \omega) v^0(c), \\ v^0(s) &= \left[g_{00} + 2g_{03}(\Omega_s - \Omega_L - \omega) + g_{33}(\Omega_s - \Omega_L - \omega)^2 \right]^{-1/2}, \\ v^0(c) &= \left[g_{00} + 2g_{03}(\Omega_c - \Omega_L) + g_{33}(\Omega_c - \Omega_L)^2 \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляя найденные выражения для v_s и v^0 в условие (30), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega_s - \Omega_L}{g_{00} + 2g_{03}(\Omega_s - \omega - \Omega_L) + g_{33}(\Omega_s - \omega - \Omega_L)^2} = \\ & = \frac{\Omega_c - \Omega_L + \omega}{g_{00} + 2g_{03}(\Omega_c - \Omega_L) + g_{33}(\Omega_c - \Omega_L)^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Легко увидеть, что решением этого уравнения является:

$$\Omega_s = \Omega_c + \omega. \quad (33)$$

Это условие для плоского пространства, т.е. при $\omega \rightarrow 0$, переходит в известное условие $\Omega_s = \Omega_c$.

Автор благодарит участников семинара кафедры теоретической физики ЕГУ за обсуждение результатов.

Ереванский государственный
университет, Армения.

ROTATION OF THE TWO-COMPONENT MODEL OF NEUTRON STAR IN FRAME OF GRT

D.M.SEDRAKIAN

Dynamical equations of rotation of two-component model of neutron star have been derived in frame of General Relativity theory. It has been shown, that in stationary rotation of the normal component on the star: $\Omega_c = \text{const}$, the angular velocity of superfluid component Ω_s depends on coordinates and is equal to $\Omega_c + \omega$ where ω – is the nondiagonal component of the metric tensor.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Д.Седракян, Д.М.Седракян, Ж. эксперим. и теор. физ., 108, 2(8), 631, 1995.
2. A.D.Sedrakian, D.M.Sedrakian, J.M.Cordes, Y.Terzinn, Astrophys.J., 447, 324, 1995.
3. А.Ю.Андреев, Д.А.Киржниц, С.Н.Юдин, Письма в ЖЭТФ, 61, 825, 1995.
4. Д.А.Киржниц, С.Н.Юдин, Успехи физ. наук, 165, №11, 1335, 1995.
5. A.D.Sedrakian, D.M.Sedrakian, Astrophys.J., 447, 305, 1995.
6. J.B.Hartle, D.H.Sharp, Astrophys.J., 147, 317, 1967.
7. B.Carter, D.Langlois, Prepr. Observ. Meudon, № 95024, 1995.
8. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория Поля, Наука, М., с.332, 1988.