

НЕЙТРОННЫЕ ЗВЕЗДЫ В БИМЕТРИЧЕСКОЙ СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ.

I. НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ

Л.Ш.ГРИГОРЯН^{1,2}, П.Ф.КАЗАРЯН², Г.Ф.ХАЧАТРЯН¹

Поступила 25 декабря 1996

Принята к печати 15 февраля 1997

Найдены новые решения уравнений биметрической скалярно-тензорной теории гравитации для нейтронных звезд. В этих решениях скалярное поле постоянно: $\varphi = \varphi_0$, а метрический тензор пространства-времени определяется уравнениями ОТО. Задача состояла в нахождении фоновой метрики, соответствующей φ_0 . Решения с переменным φ были изучены ранее [15] и определяются безразмерным параметром теории ζ . Отличия между решениями с постоянным и переменным φ значительны при $|\zeta| \leq 1$.

1. *Введение.* В Биметрической Скалярно-Тензорной Теории (БСТТ) гравитационное поле описывается метрическим тензором g_{ik} искривленного пространства-времени и динамическим скалярным полем φ [1,2]. В теории фигурирует также фоновая плоская метрика γ_{ik} (не динамическая переменная). В наипростейшем варианте теории действие гравитирующей системы определяется выражением

$$S = \frac{1}{c} \int \left(-\frac{1}{2} \varphi \Lambda_g + \frac{1}{2} \zeta \frac{\varphi_{,n} \varphi^{,n}}{\varphi} + L_m \right) \sqrt{-g} d^4 x, \quad (1)$$

где L_m - плотность лагранжиана вещества и негравитационных полей, $\varphi^{,n} = g^{nm} \varphi_{,m}$, $\varphi_{,n} = \partial \varphi / \partial x^n$, ζ - безразмерная постоянная, а

$$\Lambda_g = g^{ik} \left(\bar{\Gamma}_{in}^i \bar{\Gamma}_{ik}^n - \bar{\Gamma}_{ik}^i \bar{\Gamma}_{in}^n \right), \quad \bar{\Gamma}_{ik}^i = \Gamma_{ik}^i - \check{\Gamma}_{ik}^i, \quad (2)$$

c - скорость света, В (2) $\bar{\Gamma}_{ik}^i$ - т.н. тензор аффинной деформации, Γ_{ik}^i и $\check{\Gamma}_{ik}^i$ - символы Кристоффеля для метрик g_{ik} и γ_{ik} соответственно. В Скалярно-Тензорной Теории (СТТ) Йордана-Бранса-Дикке [3,4] действие также определяется выражением (1), однако, вместо Λ_g входит R - скалярная кривизна пространства-времени. Как известно, R и Λ_g связаны

соотношением

$$R = \Lambda_g + w_{;n}^n, \quad w^n = g^a \bar{\Gamma}_{ik}^n - g^{in} \bar{\Gamma}_{ik}^k \quad (3)$$

(см., например, [5]). В силу переменности φ выражение $\varphi w_{;n}^n$ не является 4-дивергенцией, и поэтому БСТТ и СТТ должны отличаться друг от друга.

Условие экстремальности (1) по отношению к g_{ik} и φ приводит к уравнениям

$$\varphi R_{ik} + \varphi_{;n} \bar{\Gamma}_{ik}^n - \varphi_{;(i} \bar{\Gamma}_{k)n}^n - \zeta \frac{\varphi_{;i} \varphi_{;k}}{\varphi} = T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T, \quad (4a)$$

$$2\zeta \varphi_{;n}^n - \zeta \frac{\varphi_{;n} \varphi^{;n}}{\varphi} + \varphi \Lambda_g = 0, \quad (4b)$$

где $f_{(ik)} = 0.5(f_{ik} + f_{ki})$, а T_{ik} - тензор энергии-импульса вещества и негравитационных полей. Эти уравнения нужно дополнить уравнениями гидродинамики

$$T_{i;k}^k = 0. \quad (5)$$

Последние не являются следствием (4) из-за наличия фоновой метрики γ_{ik} . Используя (3), (4a), уравнение (4b) можно записать в более компактном виде:

$$\left(2\zeta \varphi^{;n} - \varphi w^{;n} \right)_{;n} = T. \quad (6)$$

В отличие от уравнений СТТ (см., например, [6,7]) уравнения (4) допускают решения с $\varphi = \text{const}$. Чтобы убедиться в этом, следуя [8,9], подставим

$$\varphi = \frac{c^4}{8\pi G} \equiv \varphi_0 \quad (7)$$

(G - ньютоновская гравитационная постоянная) в (4a) и (6). Ясно, что (4a) перейдет в

$$\varphi_0 R_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T, \quad (8)$$

а (6) - в

$$\varphi_0 w_{;n}^n + T = 0. \quad (9)$$

Уравнения Эйнштейна (8) не содержат γ_{ik} и в заданной системе координат определяют метрику искривленного пространства-времени:

$$g_{ik} = g_{ik}(x^n, \varphi_0). \quad (10)$$

Подставив (10) в (9), приходим к некоторому скалярному уравнению по отношению к фоновой плоской метрике

$$\gamma_{ik} = \gamma_{nm}^* \frac{\partial u^n}{\partial x^i} \frac{\partial u^m}{\partial x^k}, \quad \gamma_{nm}^* = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (11)$$

с квадратом интервала

$$\gamma_{ik} dx^i dx^k = (du^0)^2 - (du^1)^2 - (du^2)^2 - (du^3)^2. \quad (12)$$

Вместе с условием

$$g_{ik} \approx \gamma_{ik} \quad (13)$$

для слабого гравитационного поля уравнение (9) накладывает ограничение на выбор четырех функций $u^n(x')$. Для одной из космологических моделей $u^n(x')$ найдены в [8,9].

Целью данной работы является нахождение $u^n(x')$ в случае сверхплотных звезд. В разделе 2 выведено аналитическое решение уравнения (9) за пределами небесного тела. В следующем разделе найдены численные решения этого уравнения. В *Заключении* подведены итоги работы.

2. Аналитическое решение за пределами небесного тела. Рассмотрим статическое сферически-симметричное небесное тело. Симметрия системы позволяет выписать следующее выражение для квадрата интервала искривленного пространства-времени:

$$g_{ik} dx^i dx^k = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (14)$$

(шварцшильдовская система координат). При этом фоновую метрику γ_{ik} можно представить в виде

$$\gamma_{ik} dx^i dx^k = c^2 dt^2 - du^2 - u^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (15)$$

где u - функция от r , определяющая преобразование (12):

$$\begin{aligned} u^0 &= ct, \quad u^1 = u(r) \sin \theta \cos \varphi, \\ u^2 &= u(r) \sin \theta \sin \varphi, \quad u^3 = u(r) \cos \theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив (14) и выражение для тензора энергии-импульса

$$T_{ik} = (\rho c^2 + P) V_i V_k - P g_{ik} \quad (17)$$

в (8), приходим к уравнениям Оппенгеймера-Волкова [10]:

$$\frac{dP}{dr} = -G\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \frac{m + 4\pi r^3 P/c^2}{r(r - 2Gm/c^2)},$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \rho r^2, \quad (18)$$

где

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm}{rc^2}, \quad \frac{dv}{dr} = 2G \frac{m + 4\pi r^3 P/c^2}{r(r c^2 - 2Gm)}, \quad v(\infty) = 0, \quad (19)$$

P и ρc^2 - давление и плотность полной энергии звездного вещества, $m(r)$ - тяготеющая масса, накопленная внутри сферического слоя радиуса r . Зная уравнение состояния $\rho = \rho(P)$ сверхплотного вещества и задавая центральное давление $P(0)$, можно определить шварцшильдовский радиус R_s и тяготеющую массу

$$M = m(r) \text{ при } r \geq R_s, \quad (20)$$

путем интегрирования (18) с начальным условием

$$m(0) = 0. \quad (21)$$

При этом радиус небесного тела $r = R_s$ определяется из условия $P(R_s) = 0$ или $\rho(R_s) = \rho_s$ (ρ_s - плотность вещества на поверхности небесного тела), а функции $\lambda(r)$ и $v(r)$ - из уравнений (19). Результаты расчетов можно найти в [6, 11-13] и др. работах.

Теперь перейдем к уравнению (9). Подставив (14), (15) в определение w^n (см. (3)), получим

$$w^n = \frac{2}{r^2} F \delta_1^n, \quad (22)$$

где

$$F = 2r - u \frac{dr}{du} - \frac{r^2}{u} \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) \frac{du}{dr} + \frac{G}{c^2} \left(\frac{4\pi}{c^2} r^3 P - 3m\right). \quad (23)$$

В результате (9) принимает вид

$$\frac{d}{dr} \frac{F e^{v/2}}{\sqrt{1 - \frac{2Gm}{rc^2}}} = -\frac{r^2}{2\Phi_0} e^{v/2} \frac{\rho c^2 - 3P}{\sqrt{1 - \frac{2Gm}{rc^2}}}, \quad (24)$$

и поэтому интегрируется за пределами небесного тела. Подставив решение Шварцшильда:

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}, \quad r \geq R_s, \quad (25)$$

находим

$$\frac{u}{r_g} \frac{dr}{du} = \frac{r}{r_g} + \varepsilon - \frac{1}{2} \pm \sqrt{2\varepsilon \frac{r}{r_g} + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)^2}, \quad \varepsilon \geq 0, \quad (26)$$

где $r_g = 2GM/c^2$ - гравитационный радиус небесного тела. Постоянная интегрирования ε неотрицательна, поскольку только в этом случае на больших расстояниях от небесного тела правая часть (26) является действительной величиной. Вторичное интегрирование приводит к

$$u = u_0 \left[(z \pm \varepsilon)^2 - \frac{1}{4} \right] \left(\frac{z \pm \varepsilon + 0.5}{z \pm \varepsilon - 0.5} \right)^{\pm 2\varepsilon}, \quad \text{при } \varepsilon > 0, \quad (27)$$

где

$$z = \sqrt{2\varepsilon \frac{r}{r_g} + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)^2}. \quad (28)$$

Постоянная u_0 определяется условием (13) на больших расстояниях от небесного тела: $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r)}{r} = 1$, и оказывается равной

$$u_0 = \frac{r_g}{2\varepsilon}. \quad (29)$$

Наконец,

$$u = \begin{cases} r & \text{(a)} \\ r - r_g & \text{(б)} \end{cases} \quad \text{при } \varepsilon = 0 \quad (30)$$

(случаи (а) и (б) соответствуют знакам $\pm$ в (26)).

Равенства (27), (30) определяют функции (16) и фоновую метрику (15) за пределами небесного тела.

3. Численное интегрирование внутри небесного тела. Интегрируя (24), находим

$$\Omega + \frac{1}{\Omega} = 2A, \quad (31)$$

и поэтому

$$A + \sqrt{A^2 - 1} = \begin{cases} \frac{1}{\Omega} & \text{(a)} \\ \Omega & \text{(б),} \end{cases} \quad (32)$$

где

$$\Omega = \frac{r}{u} \frac{du}{dr} \sqrt{1 - \frac{2Gm}{rc^2}}$$

$$4A = 3\sqrt{1 - \frac{2Gm}{rc^2}} + \frac{1 + Pr^2/\Phi_0}{\sqrt{1 - \frac{2Gm}{rc^2}}} + \frac{\Phi}{re^{v/2}}, \quad (33)$$

а

$$\Phi = 4l + \frac{1}{\Phi_0} \int_0^r \frac{\rho c^2 - 3P}{\sqrt{1 - \frac{2Gm}{rc^2}}} e^{v/2} r^2 dr, \quad (34)$$

l - постоянная интегрирования. Разумеется, (32) должно переходить в (26) за пределами небесного тела. Поэтому должно выполняться условие

$$\varepsilon r_g + \frac{3}{c^4} G \int P \sqrt{-g} d^3x = l \quad (35)$$

(мы воспользовались формулой Толмена

$$M = \int (\rho + 3P/c^2) \sqrt{-g} d^3x = 4\pi \int_0^{R_g} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) \frac{r^2 e^{v/2}}{\sqrt{1 - \frac{2Gm}{rc^2}}} dr \quad (36)$$

для тяготеющей массы), а знаки $\pm$ в (26) должны соответствовать случаям (а) и (б) в (32). В силу $\varepsilon \geq 0$ имеем

$$l \geq \frac{3}{c^4} G \int P \sqrt{-g} d^3x \equiv l_{\min} \leq \frac{3GMP(0)}{\rho(0)c^4}. \quad (37)$$

Уравнение (9) исследовано в [14]. В этой работе предполагалось $l = 0$, что не позволило сшить внутренние и внешние решения уравнения (9) на поверхности конфигурации. Заметим также, что для небесного тела со слабым гравитационным полем $u(r)$ должно мало отличаться от r (см. (13)-(15)). Подстановка $u(r) \approx r$ в (26) приводит к $\varepsilon r_g \ll R_g$, и поэтому

$$l \ll R_g \quad \text{при} \quad r_g \ll R_g. \quad (38)$$

В центральной области небесного тела

$$A \approx 1 + \frac{l}{re^{v(0)/2}}, \quad (39)$$

и поэтому из (32), (33) приходим к

$$u \sim \begin{cases} \sqrt{r+\Delta} & (a) \\ r^2 e^{-2\Delta/r} & (б) \end{cases} \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (40)$$

где $\Delta = |e^{-v(0)}|^2$. Следовательно, условие

$$u(r) \sim r \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (41)$$

нарушается, в результате чего некоторые из компонентов тензора аффинной деформации, например,

$$\bar{\Gamma}_{12}^2 = \bar{\Gamma}_{13}^3 = \frac{1}{r} - \frac{1}{u} \frac{du}{dr}, \quad (42)$$

расходятся при $r \rightarrow 0$. Это обстоятельство не противоречит уравнениям (4), поскольку в (4а) слагаемые $\sim \bar{\Gamma}_{kl}^i$ не дают вклада (φ постоянно), а в (4б) слагаемое

$$\Lambda_g = g^{ik} (\bar{\Gamma}_{in}^l \bar{\Gamma}_{lk}^n - \bar{\Gamma}_{ik}^l \bar{\Gamma}_{nl}^k) = 0 \quad (43)$$

во всем пространстве (следует из (3), (8), (9)).

На рис. 1 и 2 приведены графики функции $u(r)$ для нейтронных

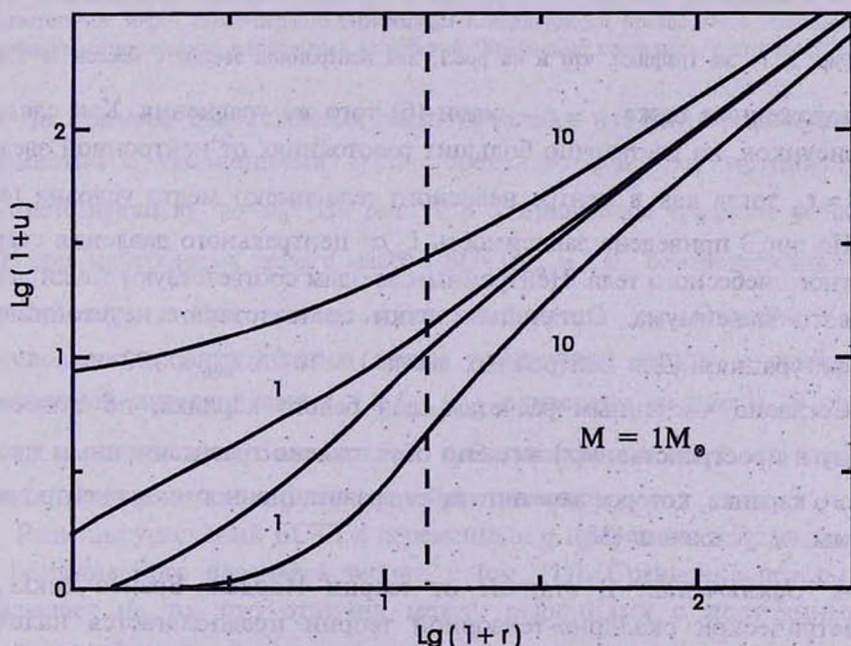


Рис.1. Графики функции $u(r)$ для нейтронной звезды с массой $M = 1M_\odot$. Вертикальная пунктирная прямая соответствует поверхности небесного тела; u (км) определяет фоновую метрику (15); r (км) — псевдиримановская радиальная координата. Рядом с кривыми приведены значения постоянной интегрирования $l/l_{\min}$ (см. (37)). За пределами нейтронной звезды $u(r)$ определяется выражением (27) в случае $l > l_{\min}$ и (30) в случае $l = l_{\min}$, а внутри конфигурации — интегрированием (18), (19) и (32). Уравнение состояния сверхплотного вещества взято из [12].

звезд с массами $1M_{\odot}$ и $2M_{\odot}$ соответственно. Кривые, расположенные выше прямой $u = r$, соответствуют ветви (а) уравнения (32), а кривые,

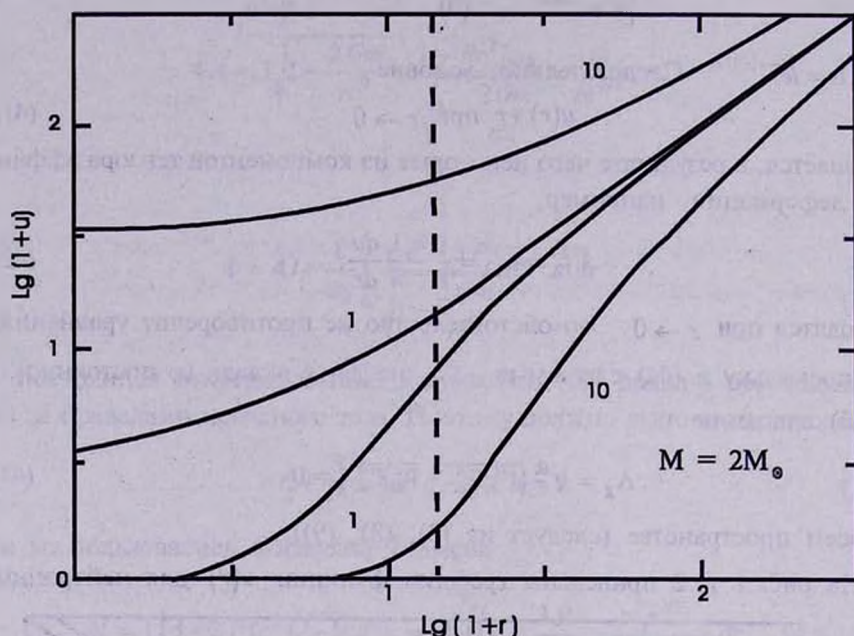


Рис. 2. Те же графики, что и на рис.1, для нейтронной звезды с массой $M=2M_{\odot}$.

расположенные ниже $u = r$ - ветви (б) того же уравнения. Как следует из рисунков, на достаточно больших расстояниях от нейтронной звезды $u(r) \approx r$, тогда как в центре небесного тела имеют место условия (40).

На рис.3 приведена зависимость $l_{\min}$ от центрального давления сверхплотного небесного тела. Нейтронным звездам соответствуют точки левее первого максимума. Остальные точки соответствуют неустойчивым конфигурациям. Для нейтронных звезд $1.6 \cdot 10^{-4} \leq l_{\min} \leq 0.92$ км.

Согласно численным расчетам, для белого карлика, по существу, всюду в пространстве $u(r) = r$. Это обусловлено гравитационным полем белого карлика, которое заметно слабее гравитационного поля нейтронной звезды, и условием (38).

4. **Заключение.** В отличие от теории Йордана-Бранса-Дикке, в биметрической скалярно-тензорной теории предполагается наличие фоновой метрики γ_{ik} . Благодаря этому обстоятельству уравнения БСТТ (см. (4)) допускают решения с постоянным ϕ . Подстановка

$$\phi = \frac{c^4}{8\pi G} = \phi_0$$

в (4) приводит к совместимой системе уравнений (8), (9), в которой (8) - уравнения ОТО.

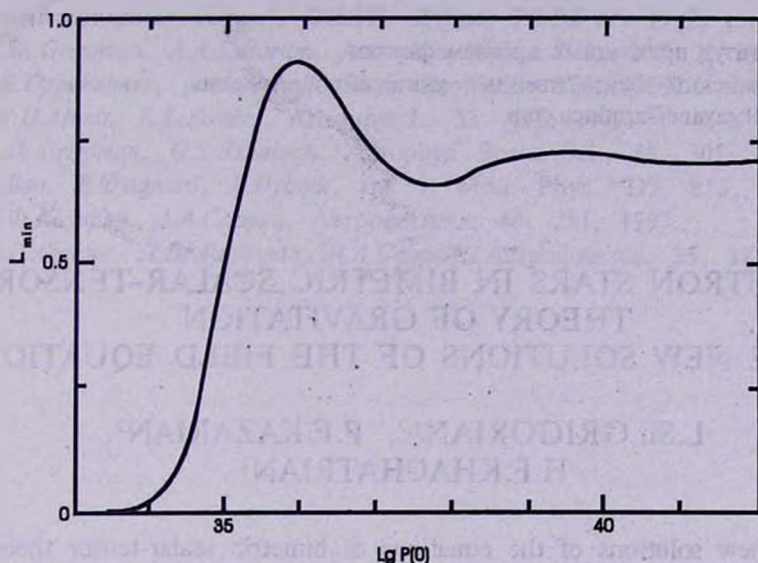


Рис. 3 Минимальное значение l (см. (37)) в зависимости от центрального давления $P(0)$ сверхплотного небесного тела, l - в км, $P(0)$ - в эрг см⁻³. Нейтронным звездам соответствуют точки левее первого максимума. Конфигурации правее этого максимума не устойчивы относительно радиальных колебаний. Уравнение состояния взято из [12].

На примере сверхплотных звезд показано, что интегрирование (9) совместно с уравнениями ОТО определяет фоновую метрику γ_{ik} , соответствующую $\phi = \phi_0$. На рис. 1 и 2 приведены графики функции $u(r)$ для нейтронных звезд с массой $M = 1M_\odot$ и $2M_\odot$ соответственно. Используя $u(r)$ и (16), можно найти компоненты γ_{ik} . Отличие u от r обусловлено гравитационным полем нейтронной звезды и свободной постоянной интегрирования $l \geq l_{\min}$ ($l_{\min}$ приведено на рис.3). В случае белых карликов из-за более слабого гравитационного поля $u(r)$ практически не отличается от r во всем пространстве.

Решения уравнений БСТТ с переменным ϕ приведены в [15] и зависят от безразмерного параметра теории ζ (см. (1)). Сравнение результатов указывает на то, что отличия между решениями с постоянным и переменным ϕ значительны для нейтронных звезд при $|\zeta| \leq 1$.

Авторы признательны А.А.Сааряну за полезные обсуждения полученных результатов.

В расчетах использован PC Pentium, подаренный Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG).

Работа выполнена в рамках гранта 96-855 Министерства образования и науки Республики Армения.

¹Институт прикладных проблем физики

2Ереванский государственный университет, Армения

e-mail: gayane@arminco.com

NEUTRON STARS IN BIMETRIC SCALAR-TENSOR THEORY OF GRAVITATION

I. THE NEW SOLUTIONS OF THE FIELD EQUATIONS

L.Sh.GRIGORIAN^{1,2}, P.F.KAZARIAN²,
H.F.KHACHATRIAN¹

The new solutions of the equations of bimetric scalar-tensor theory of gravitation for neutron stars are found. In these solutions the scalar field is constant: $\varphi = \varphi_0$, and the metric tensor of the space - time is determined by the equations of GR. The problem consisted in the finding of the background metric, corresponding $t_c \varphi_0$. The solutions with variable φ were investigated earlier [15] and are determined by the dimensionless parameter of the theory ζ . The differences between the solutions with constant and variable φ are significant at $|\zeta| \leq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян, *Астрофизика*, 31, 359, 1989; 32, 491, 1990; 33, 107, 1990.
2. L.Sh.Grigorian, A.A.Saharian, *Astrophys. Space Sci.*, 167, 271, 1990; 180, 39, 1991.
3. P.Jordan, *Schwerkraft und Weltall*, 2nd ed., Vieweg und Sohn, 1955.
4. C.Brans, R.H.Dicke, *Phys. Rev.*, 124, 925, 1961.
5. L.P.Eisenhart, *Rimannian Geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1949.
6. Г.С.Саакян, *Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс*, Наука, М., 1972.

7. *С.Вайнберг*, Гравитация и космология, Мир, М., 1975.
8. *А.А.Саарян, Л.Ш.Григорян*, Тр. IV семинара "Гравитационная энергия и гравитационные волны", ОИЯИ, Дубна, P2-92-12, 1992, с.193.
9. *L.Sh.Grigorian, A.A.Saharian*, Astrophys. Space Sci., 207, 1, 1993.
10. *J.R.Oppenheimer, G.M.Volkoff*, Phys. Rev., 55, 374, 1939.
11. *W.D.Arnett, R.L.Bowers*, Astrophys.J., 33, 415, 1977.
12. *L.Sh.Grigorian, G.S.Sahakian*, Astrophys. Space Sci., 95, 305, 1983.
13. *G.Bao, E.Østgaard, B.Dybnik*, Int. J. Mod. Phys., D3, 813, 1994.
14. *П.Ф.Казарян, А.А.Саарян*, Астрофизика, 40, 281, 1997.
15. *М.Р.Авакян, Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян*, Астрофизика, 35, 121, 1991.