

УДК: 52-6-355:517.9

ТОЧНЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОМПАНЕЙЦА: ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРА И СРЕДНИХ ЧАСТОТ

Д.И.НАГИРНЕР, В.М.ЛОСКУТОВ, С.И.ГРАЧЕВ

Поступила 10 мая 1997

Принята к печати 25 мая 1997

Путем решения уравнения Компанейца рассчитывается эволюция спектра изотропного однородного излучения в бесконечном пространстве, заполненном однородным нерелятивистским электронным газом. Для бесконечно узкого исходного спектра в линейном приближении уравнения определена зависимость средней частоты и дисперсии частот от времени. Вводятся характерные времена, соответствующие изменениям характера этой зависимости. Предложены две схемы численного метода решения нелинейного уравнения: неконсервативная с равномерной сеткой по частоте и консервативная с автоматическим выбором адаптивной сетки по частоте и времени. Для линейного уравнения метод дает результаты, согласующиеся с расчетами его решений через разложения по собственным функциям оператора Компанейца, рассчитанным в работе [16]. В качестве примеров применения метода прослежено влияние нелинейности на эволюцию спектра первоначально монохроматического излучения различной интенсивности.

1. *Введение.* Уравнения Компанейца, описывающее временную эволюцию спектра однородного и изотропного излучения в бесконечном пространстве при рассеянии его равновесным почти нерелятивистским и невырожденным электронным газом в горячей разреженной плазме, который также однороден и изотропен, имеет вид [1]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right]. \quad (1)$$

Здесь $x = h\nu/k_B T$ - безразмерная частота (h и k_B - постоянные Планка и Больцмана, ν - обычная частота, T - температура электронного газа), t - безразмерное время, измеряемое в единицах $mc/\sigma_0 n_e k_B T$, где $\sigma_0 = (8\pi/3)(e^2/mc^2)^2$ - томсоновское сечение, а n_e - концентрация электронов. Уравнение справедливо, если выполняются два неравенства $h\nu \ll mc^2$ и $k_B T \ll mc^2$.

Искомая функция $n(x, t)$ представляет собой среднее число заполнения фотонных состояний, так что произведение $(2h\nu^3/c^2)n$ - обычная

интенсивность. Для полной постановки задачи для уравнения (1) достаточно задать начальное распределение $n(x,0)$.

Из уравнения следует, что интеграл

$$\int_0^{\infty} x^2 n(x,t) dx = \int_0^{\infty} x^2 n(x,0) dx = C \quad (2)$$

не зависит от времени.

Если средние числа заполнения малы, $n \ll 1$, в частности, если мало значение интеграла (2), $C \ll 1$, можно ограничиться линейным приближением уравнения Компанейца

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n \right) \right] \quad (3)$$

Постоянство (2) сохраняется и в случае линейного уравнения.

История уравнения Компанейца и его основные свойства отражены в обзорах [2] и [3]. Уравнение применялось для решения ряда физических и астрофизических задач. В линейном приближении (3) изучалась комптонизация начального тормозного спектра [4]. Эволюция планковского излучения с температурой, отличной от электронной, и других начальных спектров, а также влияние тормозных процессов на ход комптонизации рассчитаны в работе [5]. В линейном приближении исследовались эффект Зельдовича-Сюняева [6], влияние энерговыделения в ранней Вселенной на искажения реликтового излучения [7-10], формирование спектров рентгеновских источников за счет комптонизации холодного излучения [11]. Обзоры некоторых из этих результатов содержатся в [2,12]. С помощью нелинейного уравнения изучался нагрев газа вблизи активных ядер галактик [13] и радиоисточников [14].

В настоящей работе сначала приводятся аналитические выражения для решений уравнения (3) и для средних частот и дисперсий частоты при исходном бесконечно узком спектре. Рассчитывается временная эволюция средних. Затем предлагается и опробуется численный метод решения уравнения (1).

2. *Точные решения линейного уравнения.* Решение уравнения (3) при произвольной начальной функции $n(x,0)$ выражается через эту функцию и функцию Грина:

$$n(x,t) = \int_0^{\infty} G(x, x_1, t) n(x_1, 0) dx_1. \quad (4)$$

Функцию $G(x, x_1, t)$ можно представить разложением по с.ф.

оператора, стоящего справа в (3). Полную систему функций на промежутке $[0, \infty)$ составляют две ортогональных и нормированных на единицу дискретных с.ф., а также набор с.ф. непрерывного спектра, нормированных на δ -функцию и ортогональных дискретным с.ф.:

$$\chi_0(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} e^{-x/2}, \quad \chi_2(x) = \frac{x-2}{\sqrt{2}} e^{-x/2}, \quad (5)$$

$$\chi_{9/4+\mu^2}(x) = \left[\frac{2}{\pi} \frac{\mu \operatorname{sh}(\pi\mu)}{(1/4 + \mu^2)(9/4 + \mu^2)} \right]^{1/2} \frac{1}{x} W_{2,t\mu}(x), \quad (6)$$

где $W_{2,t\mu}(x)$ - функция Уиттекера. Указанное разложение имеет вид

$$G(x, x_1, t) = \frac{x_1}{x} e^{(x_1-x)/2} \left[\chi_0(x)\chi_0(x_1) + \chi_2(x)\chi_2(x_1) e^{-2t} + \int_0^\infty \chi_{9/4+\mu^2}(x)\chi_{9/4+\mu^2}(x_1) e^{-(9/4+\mu^2)t} d\mu \right]. \quad (7)$$

При малых величинах аргументов x и x_1 функция Грина (7) близка к своему предельному значению

$$G_d(x, x_1, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha G(\alpha x, \alpha x_1, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_1}{\pi x^3 t}} e^{-\ln^2(x/x_1)/4t - 9t/4}. \quad (8)$$

Это выражение получается из интегрального слагаемого в (7). Оно является функцией Грина уравнения, в которое переходит (3), если в этом последнем во внутренней скобке оставить только слагаемое с производной. Выражение (8) было получено Я.Б.Зельдовичем и Р.А.Сюняевым [15] непосредственно из предельного уравнения.

В статье [16] был дан метод вычисления функций $W_{2,t\mu}(x)$ при любых положительных x и μ с пятью значащими цифрами. Вычисление по формуле (7) при малых t требует больших усилий по предотвращению потерь точности и поэтому весьма трудоемко. Для конкретных начальных распределений можно сначала вычислить интеграл по аргументу x_1 согласно (4), что упрощает последующее вычисление интеграла по μ .

Для степенно-показательных начальных спектров $n(x, 0) = x^p e^{-\alpha x}$ интегралы по x_1 можно вычислить аналитически. Интегралы с двумя дискретными модами элементарны, а для вычисления интеграла с непрерывными модами воспользуемся формулами 7.621.3 и 9.131.1 из справочника [17]. В результате получим

$$n(x, t) = e^{-x} \frac{\Gamma(p+2)}{2s^{p+3}} \left[p+2 + \left(1 - \frac{2}{x}\right) e^{-2t} (p+2-2s) \right] + \frac{2}{\pi x^2} e^{-x/2} e^{-9t/4} \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{-\mu^2 t} W_{2, i\mu}(x) \frac{\mu d \operatorname{ush}(\pi\mu)}{(\mu^2 + 1/4)(\mu^2 + 9/4)} \Gamma\left(p + \frac{3}{2} + i\mu\right) \Gamma\left(p + \frac{3}{2} - i\mu\right) V(p, \mu, s). \quad (9)$$

Здесь введено обозначение для функции, которая с точностью до множителя является гипергеометрической функцией Гаусса с двумя комплексными параметрами:

$$V(p, \mu, s) = \frac{s^{-p-3}}{\Gamma(p)} F(-3/2 + i\mu, -3/2 - i\mu; p, 1-s). \quad (10)$$

Для выбора оптимального численного метода нас интересует сравнение результатов, получаемых путем численного решения уравнения и по аналитической формуле. При этом желательно провести сравнение при всех временах. Между тем при малых t интегрирование в (9) необходимо доводить до достаточно больших μ . При таких μ становится трудно вычислять функцию (10) ввиду быстрого роста ее первых слагаемых. Однако указанное сравнение можно произвести на частных случаях. Поэтому мы возьмем начальный спектр в виде $n(x, 0) = x^p e^{-x}$. Тогда гипергеометрическая функция обращается в единицу и формула (9) сильно упрощается.

3. *Средние степени частоты.* Определим сначала среднюю l -тую степень излучаемой частоты при начальной частоте x_1

$$\bar{x}^l = \frac{1}{x_1^2} \int_0^{\infty} x^{l+2} G(x, x_1, t) dx. \quad (11)$$

Подставив сюда выражение (7), вычислив первые два интеграла по x для дискретных мод и воспользовавшись формулой 7.621.11 из [17] для непрерывных, получим ($W_2(x, \mu) = e^{-x/2} W_{2, i\mu}(x)$)

$$\bar{x}^l = \frac{1}{2} \Gamma(l+3) + \frac{l}{2} \left(1 - \frac{2}{x_1}\right) \Gamma(l+2) e^{-2t} + \frac{2}{\Gamma(l) x_1^2} e^{-9t/4} \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{-\mu^2 t} \frac{\mu d \operatorname{ush}(\pi\mu)}{(\mu^2 + 1/4)(\mu^2 + 9/4)} W_2(x_1, \mu) \Gamma(l+3/2 + i\mu) \Gamma(l+3/2 - i\mu). \quad (12)$$

При целых l можно воспользоваться формулой дополнения для гамма-функции, что позволяет представить интеграл в следующем виде:

$$\bar{x}^l = \frac{1}{2}(l+2)! + \frac{l}{2}\left(1 - \frac{2}{x_1}\right)(l+1)!e^{-2t} + \frac{2l}{l!} \frac{1}{x_1^2} e^{-9t/4} \int_0^\infty e^{-\mu^2 t} \mu d\mu \text{th}(\pi\mu) W_2(x_1, \mu) \prod_{j=2}^l \left[\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 + \mu^2 \right]. \quad (13)$$

Здесь, как обычно, пустое произведение (при $l < 2$) считается равным 1. В частности, для $l = 0, 1, 2$ получается $\bar{1} = \Gamma(3)/2 = 1$,

$$\bar{x} = 3 + \left(1 - \frac{2}{x_1}\right)e^{-2t} + \frac{2}{x_1^2} e^{-9t/4} \int_0^\infty e^{-\mu^2 t} \mu d\mu \text{th}(\pi\mu) W_2(x_1, \mu), \quad (14)$$

$$\bar{x}^2 = 12 + 6\left(1 - \frac{2}{x_1}\right)e^{-2t} + \frac{2}{x_1^2} e^{-9t/4} \int_0^\infty e^{-\mu^2 t} \mu d\mu \text{th}(\pi\mu) W_2(x_1, \mu) \left(\mu^2 + \frac{25}{4}\right). \quad (15)$$

Формула для \bar{x} была получена Компанейцем в виде комплексного интеграла.

Если x_1 достаточно мало, а время t не очень велико, то можно воспользоваться предельным выражением для функции Грина (8).

Подставив эту формулу в (11), найдем $\bar{x}^l = x_1^l e^{l(l+3)t}$. Экспоненциальный рост энергии фотонов (средней частоты, то есть приведенная формула при $l = 1$) был установлен в [5].

На рис.1 представлены результаты вычислений средних частот для

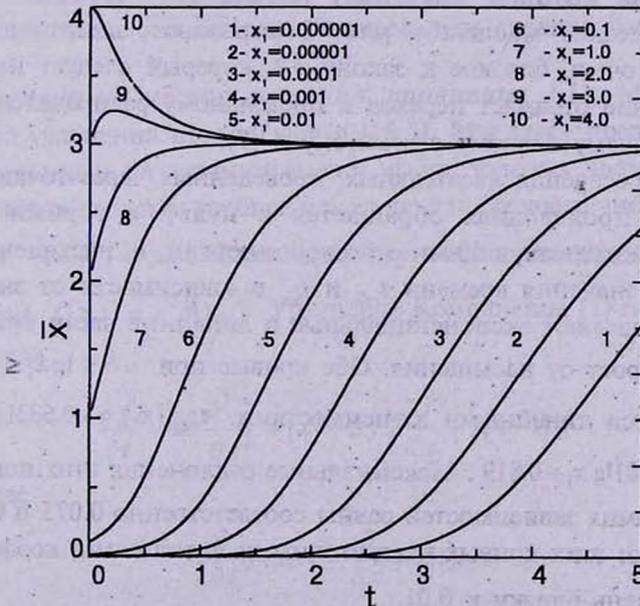


Рис. 1 Решения линейного уравнения Компанейца: эволюция средней частоты \bar{X} для функции Грина.

ряда значений начальных частот. Более подробная информация для малых x_1 и t дана на рис. 2. Из рисунков видно, что экспоненциальная часть

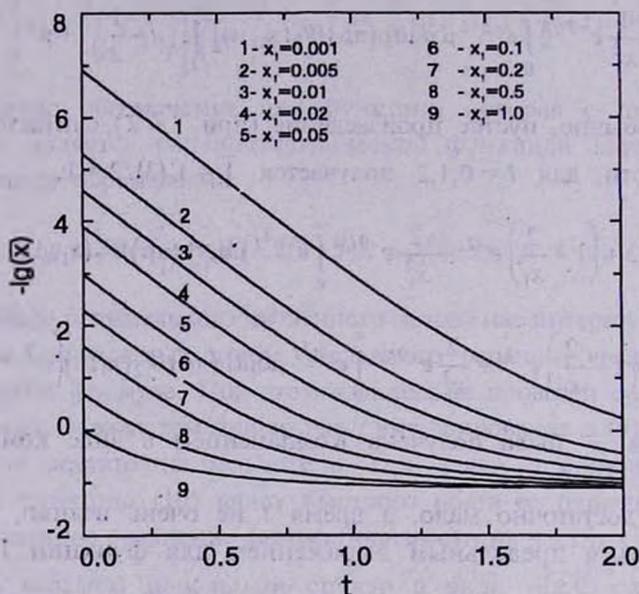


Рис. 2 То же, что и на рис.1, но при малых x_1 и t .

графиков, осуществляющаяся при $-\lg(\bar{x})$ и достаточно малых t , сменяется линейной, за которой наступает насыщение. Прямые линии в логарифмическом масштабе рис. 2 отражают экспоненциальное возрастание, очень близкое к закону e^{at} , который следует из решения (8). Насыщение отражает переход к предельному распределению Вина, соответствующему первому слагаемому в (7).

Точки пересечения касательных, проведенных через точки перегиба (где вторая производная обращается в нуль), с горизонтальными прямыми, соответствующими нулевой энергии и насыщению, дают характерные значения времени $t_{\text{сдн}}$ и $t_{\text{нас}}$ в зависимости от значения x_1 . Точки $t_{\text{сдн}}$ разделяют экспоненциальные и линейные части кривых, а $t_{\text{нас}}$ - линейный рост от насыщения. Обе кривые при $-6 \leq \lg x_1 \leq 0$ хорошо представляются линейными зависимостями: $t_{\text{сдн}}(x_1) = -0.633 \lg x_1 - 0.410$, $t_{\text{нас}}(x_1) = -0.901 \lg x_1 + 0.819$. Максимальные отклонения этих подгоночных формул от самих зависимостей равны соответственно 0.075 и 0.085. При представлении этих кривых квадратичными функциями, коэффициенты при $\lg^2 x_1$ очень близки к 0.01.

Рис. 3 отражает эволюцию корня из дисперсии частот $\sigma = \sqrt{x^2 - \bar{x}^2}$.

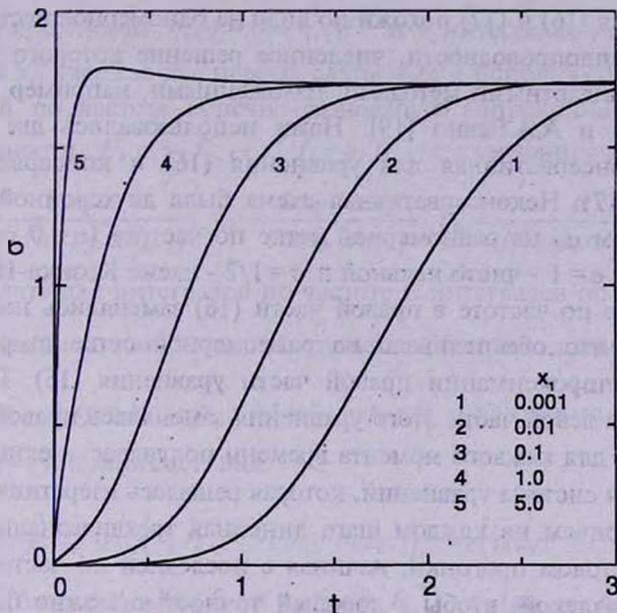


Рис. 3 Эволюция дисперсии частот.

При малых частотах и небольших временах $\sigma = x_1 e^{St} \sqrt{1 - e^{-2t}}$. Когда $t \rightarrow 0$ величина $\sigma \sim x_1 \sqrt{2t}$, а при $t \rightarrow \infty$ стремится к $\sqrt{3}$, причем на асимптотическое значение она выходит быстрее, чем средняя частота.

4. Численный метод решения уравнения (1). Метод решения линейного уравнения применялся в [18,5]. Мы здесь предложим метод, ориентированный на автоматический выбор узловых частот и времен.

Численные решения удобнее искать не для среднего числа заполнения состояний $n(x,t)$, а для безразмерной функции распределения фотонов по частотам $f(x,t) \equiv x^2 n(x,t)$. Уравнение Компанейца (1) переписывается тогда в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (x^2 + 2f) \frac{\partial f}{\partial x} + 2(x-1)f \quad (16)$$

или в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} g(x,t), \quad (17)$$

где

$$q(x, t) = x^2 \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) + (x^2 - 2x) f(x, t) + f^2(x, t). \quad (18)$$

Уравнения (16) и (17) похожи по виду на одномерное нестационарное уравнение теплопроводности, численное решение которого может быть получено стандартными методами, изложенными, например, в учебнике Н.М.Беляева и А.А.Рядно [19]. Нами использовались две численные схемы: неконсервативная для уравнения (16) и консервативная для уравнения (17). Неконсервативная схема была двухслойной и неявной (с параметром σ) на равномерной сетке по частоте ($\sigma = 0$ соответствует явной схеме, $\sigma = 1$ - чисто неявной и $\sigma = 1/2$ - схеме Крэнка-Никольсона). Производные по частоте в правой части (16) заменялись центральными разностями, что обеспечивало на равномерной сетке второй порядок локальной аппроксимации правой части уравнения (16). Производная по времени в левой части этого уравнения заменялась правой разностью. В результате для каждого момента времени получалась нелинейная трехдиагональная система уравнений, которая решалась итеративным методом Ньютона, причем на каждом шаге линейная трехдиагональная система решалась методом прогонки, начиная с последней по частоте точки x_N , достаточно далекой, чтобы с хорошей точностью можно было считать, что $f(x_N, t) = 0$. Эта схема использовалась нами, в основном, в случае слабой нелинейности или в линейном приближении (с отброшенным нелинейным слагаемым в правой части (16)). В случае же сильной нелинейности, когда решение может очень резко меняться со временем и с частотой, приходится использовать адаптивную частотно-временную сетку, которая по необходимости оказывается неравномерной, а на неравномерной сетке порядок локальной аппроксимации по частоте в описанной выше схеме снижается на 1.

От этого недостатка свободна консервативная разностная схема, которая строится следующим интегро-интерполяционным методом (см., например, тот же учебник [19]). На произвольно выбранной частотно-временной сетке $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}, \{t_0, t_1, \dots, t_I\}$ выберем ячейку $(x_{k-1/2} \leq x \leq x_{k+1/2}, t_i \leq t \leq t_{i+1})$ (здесь $x_{k-1/2} = (x_k + x_{k-1})/2, x_{k+1/2} = (x_k + x_{k+1})/2$) и проинтегрируем уравнение (17) по этой ячейке:

$$\int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} [f(x, t_{i+1}) - f(x, t_i)] dx = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [q(x_{k+1/2}, t) - q(x_{k-1/2}, t)] dt, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (19)$$

При $k = 0$ вместо (19) имеем

$$\int_0^{x_{1/2}} [f(x, t_{i+1}) - f(x, t_i)] dx = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [q(x_{1/2}, t) - q(0, t)] dt, \quad (20)$$

причем $q(0, t) = f^2(0, t)$ согласно (18).

Разложим подинтегральные функции в ряд Тейлора в интегралах по времени в окрестности $t_{i+1/2} = (t_i + t_{i+1})/2$ и в интегралах по частоте - в окрестности x_k , удержав два первых слагаемых и использовав для первой производной по частоте конечно-разностную аппроксимацию второго порядка точности $f'_k = w_k f_{k-1} + v_k f_k + u_k f_{k+1}$ с коэффициентами

$$w_k = -\frac{\Delta x_k}{\Delta x_{k-1}(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})}, \quad v_k = \frac{\Delta x_k - \Delta x_{k-1}}{\Delta x_k \Delta x_{k-1}}, \quad u_k = \frac{\Delta x_{k-1}}{\Delta x_k(\Delta x_k + \Delta x_{k-1})}. \quad (21)$$

В результате для интегралов по частоте и интегралов по времени получаются оценки с точностью до слагаемых соответственно $O(\Delta x_k^3)$ и $O(\Delta t^3)$, где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ и уравнение (19) (при $k = 1, 2, \dots, N-1$) принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{f}_k + \frac{1}{4}(\Delta x_k - \Delta x_{k-1})(w_k \hat{f}_{k-1} + v_k \hat{f}_k + u_k \hat{f}_{k+1}) - \varkappa_k(\hat{q}_{k+1/2} - \hat{q}_{k-1/2}) = \\ = f_k + \frac{1}{4}(\Delta x_k - \Delta x_{k-1})(w_k f_{k-1} + v_k f_k + u_k f_{k+1}) + \varkappa_k(q_{k+1/2} - q_{k-1/2}), \end{aligned} \quad (22)$$

а уравнение (20) - вид

$$\hat{f}_0 + \frac{1}{3}\hat{f}_1 - \varkappa_0(\hat{q}_{1/2} - \hat{q}_0) = f_0 + \frac{1}{3}f_1 + \varkappa_0(q_{1/2} - q_0), \quad (23)$$

где

$$\varkappa_k = \frac{\Delta t}{\Delta x_k + \Delta x_{k-1}}, \quad \varkappa_0 = \frac{4\Delta t}{3\Delta x_0}. \quad (24)$$

В уравнениях (22) и (23) мы ввели для краткости следующие обозначения: $f_k = f(x_k, t_i)$, $\hat{f}_k = f(x_k, t_{i+1})$ (и аналогично для $q(x, t)$), считая, что t_i и t_{i+1} - предыдущий и текущий моменты времени. Далее, в целых точках $x_{k-1/2}$ имеем $f_{k-1/2} = (f_k + f_{k-1})/2$, $f'_{k-1/2} = (f_k - f_{k-1})/\Delta x_{k-1}$ с точностью до слагаемых $O(\Delta x_{k-1}^2)$. Подстановка этих аппроксимаций

в (18) дает для $\hat{q}_{k\pm 1/2}$ и $q_{k\pm 1/2}$, входящих в уравнения (22) и (23), представления с локальной точностью второго порядка. В итоге из (22) и (23) получается следующая нелинейная трехдиагональная система уравнений:

$$\hat{a}_k \hat{f}_{k-1} + \hat{b}_k \hat{f}_k + \hat{c}_k \hat{f}_{k+1} = d_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (25)$$

где (при $k = 1, 2, \dots, N-1$)

$$\hat{a}_k = \varepsilon_k \left(-y_{k-1/2} + z_{k-1/2} + \frac{1}{2} \hat{f}_k + \frac{1}{4} \hat{f}_{k-1} \right) + \frac{1}{4} (\Delta x_k - \Delta x_{k-1}) w_k, \quad (26)$$

$$\hat{b}_k = 1 + \varepsilon_k (y_{k+1/2} + y_{k-1/2} - z_{k+1/2} + z_{k-1/2}) + \frac{1}{4} (\Delta x_k - \Delta x_{k-1}) u_k, \quad (27)$$

$$\hat{c}_k = -\varepsilon_k \left(y_{k+1/2} + z_{k+1/2} + \frac{1}{2} \hat{f}_k + \frac{1}{4} \hat{f}_{k+1} \right) + \frac{1}{4} (\Delta x_k - \Delta x_{k-1}) w_k, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} d_k = & -\varepsilon_k \left(-y_{k-1/2} + z_{k-1/2} + \frac{1}{2} f_k + \frac{1}{4} f_{k-1} \right) f_{k-1} + \\ & + f_k \left[1 - \varepsilon_k (y_{k+1/2} + y_{k-1/2} - z_{k+1/2} + z_{k-1/2}) \right] + \\ & + \varepsilon_k \left(y_{k+1/2} + z_{k+1/2} + \frac{1}{2} f_k + \frac{1}{4} f_{k+1} \right) f_{k+1} + \\ & + \frac{1}{4} (\Delta x_k - \Delta x_{k-1}) (w_k f_{k-1} + u_k f_k + u_k f_{k+1}) \end{aligned} \quad (29)$$

(где обозначено $y_k = x_k^2 / \Delta x_k$, $z_k = x_k (x_k - 2) / 2$), а при $k=0$ имеем $\hat{a}_0 = 0$,

$$\hat{b}_0 = 1 + \frac{1}{8} \varepsilon_0 [\Delta x_0 (6 - \Delta x_0) + 6 \hat{f}_0], \quad \hat{c}_0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \varepsilon_0 [\Delta x_0 (\Delta x_0 - 2) + 4 \hat{f}_0 + 2 \hat{f}_1], \quad (30)$$

$$\begin{aligned} d_0 = & f_0 \left[1 - \frac{1}{8} \varepsilon_0 (\Delta x_0 (6 - \Delta x_0) + 6 f_0) \right] + \\ & + f_1 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{8} \varepsilon_0 (\Delta x_0 (\Delta x_0 - 2) + 4 f_0 + 2 f_1) \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Следует отметить, что уравнение (25) с коэффициентами (26-31) аппроксимирует уравнения (19) и (20) с локальной точностью второго порядка как по частоте, так и по времени.

Поскольку очевидно, что $f(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то последняя по частоте точка x_N выбирается достаточно далекой, чтобы положить $f(x_N, t) = 0$. При этом (учитывая сохранение числа фотонов) необходимо, чтобы с заданной точностью выполнялось равенство, являющееся следствием (2):

$$\int_0^{x_N} f(x, t) dx = \int_0^{\infty} f(x, 0) dx \equiv C, \quad (32)$$

где $f(x, 0) = x^2 n(x, 0)$ - начальное распределение фотонов. Для вычисления интегралов использовался аналог квадратурной формулы Симпсона на неравномерной частотной сетке: интегралы по трем соседним точкам

x_{k-1}, x_k, x_{k+1} ($k = 1, 3, \dots, N-1$, где N - четное число) рассчитывались по формуле парабол и затем суммировались.

5. *Результаты решения системы (25)*. Для решения нелинейной системы (25) мы применяем итерационную процедуру Ньютона: на s -ом итерационном шаге представляем решение в виде $\hat{f}_k = \hat{f}_k^{(s)} + \delta \hat{f}_k^{(s)}$ и линеаризуем систему (25), получив для приращений $\delta \hat{f}_k^{(s)}$ линейную трехдиагональную систему уравнений. Эту систему решаем методом прогонки, начиная с последней точки, в которой полагаем $\delta \hat{f}_N^{(s)} = 0$. При этом начальное решение системы (25) берется в линейном приближении, т.е. с коэффициентами (26)-(31), в которых текущие значения (\hat{f}_k) заменены на предыдущие (f_k) . Итерации заканчивались при выполнении условия $\max_k |\delta \hat{f}_k^{(s)}| < \varepsilon$ (обычно полагалось $\varepsilon = 10^{-5}$).

Использовалась адаптивная частотно-временная сетка: во-первых, после определения текущего решения проводилось его сравнение с решением на предыдущем шаге, а именно вычислялось $D = \max_k |\hat{f}_k - f_k| / \hat{f}_k$, и если оказывалось, что $D > D_{\max}$, то временной шаг уменьшался в 2 раза и процесс вычисления текущего решения повторялся до выполнения условия $D < D_{\max}$. Если же оказывалось, что $D < D_{\min}$, то временной шаг увеличивался в 2 раза и процесс решения продолжался. Во-вторых, на каждом временном шаге вычислялось относительное изменение решения $d_k = |\hat{f}_k - \hat{f}_{k-1}| / \hat{f}_{k-1}$ на каждом частотном интервале, и если на некотором интервале оказывалось $d_k > d_{\max}$, то посередине интервала вводилась дополнительная точка, в которой решение определялось посредством параболической интерполяции. Если же на двух соседних интервалах получалось $d_k < d_{\min}$ и $d_{k+1} < d_{\min}$, то граничная между интервалами точка x_k отбрасывалась. При этом обычно полагалось $D_{\max} = 0.5$, $d_{\max} = 0.1$, $D_{\min} = d_{\min} = 10^{-4}$.

В качестве начального распределения использовалась либо показательная функция

$$f(x, 0) = \frac{sC}{\Gamma(p+1)} (sx)^p e^{-sx}, \quad (33)$$

либо функция вида

$$f(x,0) = \frac{C}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-(x-x_1)^2/\pi^2}, \quad (34)$$

которая стремится к $C\delta(x-x_1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для линейного уравнения Компанейца проведено сравнение численного решения с решением, найденным по явным формулам (см. выше пункт 2). При начальном распределении (33) с $p=3$ и $s=1$ получено совпадение этих решений почти везде с пятью значащими цифрами, и даже в случае распределения вида (34), которое при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $C=1$ является начальным для функции Грина $G(x, x_1, t)$, численное решение при $\varepsilon = 0.01$, $C = 1$, $x_1 = 1$ и $t > 0.01$ отличалось от функции Грина, рассчитанной по явным формулам в [16], лишь в четвертом знаке.

Наибольший интерес, однако, представляет получение численного решения нелинейного уравнения Компанейца. В качестве иллюстрации влияния нелинейности мы приводим решения для начального распределения вида (34) при $\varepsilon = 0.01$, $x_1 = 1$ и $C = 1$, 10 и 50 (рис.4-6).

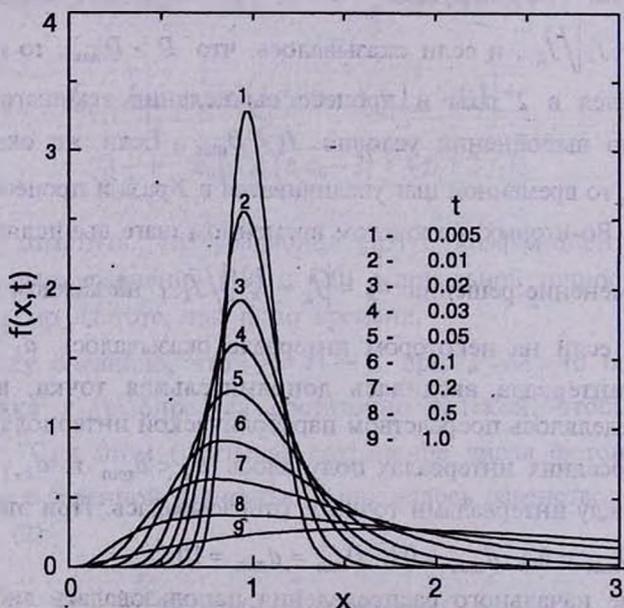
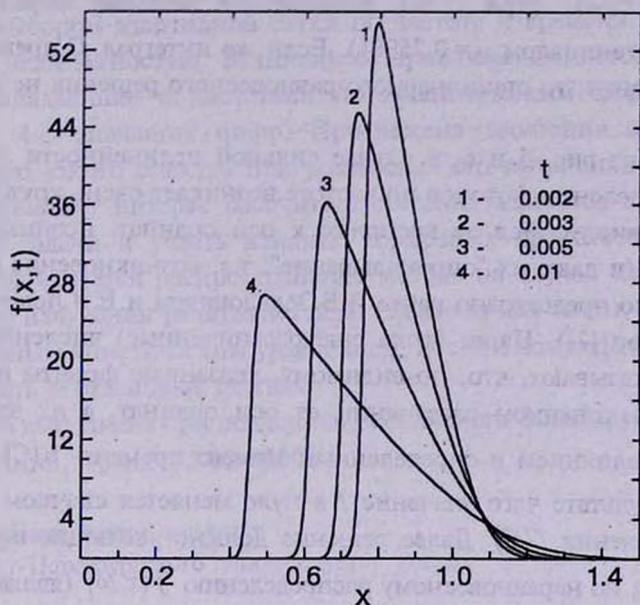
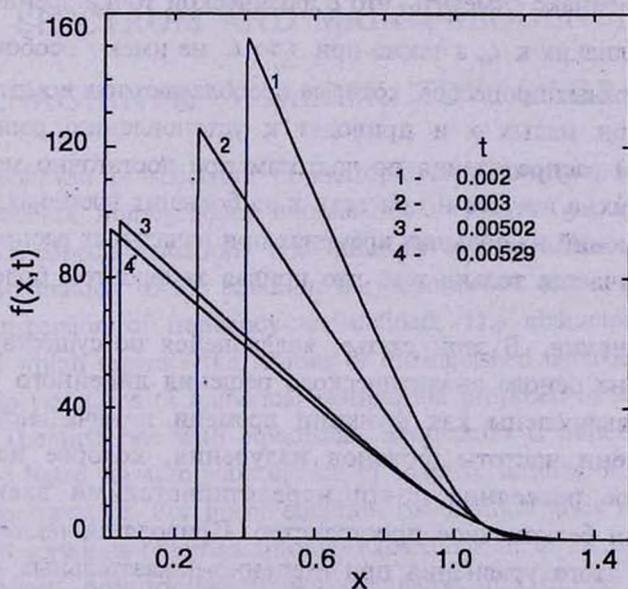


Рис. 4 Решения нелинейного уравнения Компанейца: эволюция начального спектра (34) при $\varepsilon = 0.01$, $x_1 = 1$, $C = 1$.

Следует отметить, что если $C \leq \zeta(3) \approx 2.404$ ($\zeta(z)$ - ζ функция Римана), решения нелинейного уравнения при $t \rightarrow \infty$ стремятся к предельному, равновесному распределению Бозе-Эйнштейна

Рис. 5 То же, что и на рис. 4, но при $C = 10$.Рис. 6 То же, что и на рис. 4, но при $C = 50$.

$f = x^2 / [\exp(\mu + x) - 1]$ (при $C = 1$ равновесное решение определяется химическим потенциалом $\mu = 0.75961$). Если же интеграл C превосходит указанное значение, то стационарного равновесного решения не существует.

Как видно из рис. 5 и 6, в случае сильной нелинейности за малое время в распределении фотонов по частоте возникает очень крутой передний фронт, движущийся со временем к оси ординат. Возникновение таких фронтов (и даже их "опрокидывание", т.е. возникновение неоднозначности) было предсказано ранее Я.Б.Зельдовичем и Е.В.Левичем [20] (см. также обзор [2]). Наши (пока еще ограниченные) численные эксперименты показывают, что, по-видимому, указанные фронты не опрокидываются на конечном расстоянии от оси ординат, а их эволюция заканчивается слиянием в определенный момент времени $t_*(C)$ с осью ординат, в результате чего значение f в нуле меняется скачком от 0 до некоторого значения $f_*(C)$. Далее решение должно эволюционировать к стационарному, но неравновесному распределению $f(x, \infty)$ (являющемуся решением уравнения $q(x, \infty) = \text{const} \neq 0$, где $q(x, t)$ определено выше формулой (18), а константа зависит от величины интеграла C), которое, как легко показать, отлично от 0 в нуле и убывает на бесконечности $\propto x^{-2}$. Следует однако отметить, что с физической точки зрения расчеты при t , очень близких к t_* , а также при $t \gg t_*$ не имеют особого смысла без учета тормозных процессов, которые преобладают над комптоновским рассеянием при малых x и приводят к установлению равновесного (планковского) распределения по частотам при достаточно малых x на любых временах, а в итоге и при всех x на больших временах. Характер поведения решений на больших временах при начальных распределениях вида (33) отличается только тем, что кривая за фронтом более пологая.

6. Заключение. В этой статье, являющейся по-существу продолжением [16], на основе аналитического решения линейного уравнения Компанейца вычислены как функции времени и начальной частоты средние степени частоты фотонов излучения, которое испытывает комптоновское рассеяние почти нерелятивистскими электронами, заполняющими бесконечное пространство. Приводятся также формулы для решений этого уравнения при степенно-показательных начальных спектрах.

Предложены две модификации неявного численного метода (неконсервативная и консервативная) решения нелинейного уравнения Компанейца. Неконсервативная схема применима для слабо нелинейного

случая и использует равномерную сетку по частоте. Консервативная схема с выбором адаптивной сетки по частоте и времени справляется с сильной нелинейностью. В линейном приближении метод дает результаты, совпадающие с расчетами по аналитическим формулам [16] в пределах 4-5 значащих цифр. Прослежена эволюция первоначально бесконечно узкого спектра при различных его интенсивностях.

Представляет интерес рассчитать средние величины с учетом нелинейности задачи и учесть влияние тормозных процессов. Интересной проблемой является распространение метода на случай комптоновского рассеяния излучения релятивистским электронным газом, описываемого интегральным кинетическим уравнением. Все эти вопросы предполагается рассмотреть в отдельных статьях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 95-02-05004-а.

Астрономический институт

Санкт-Петербургского университета, Россия

ANALITICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS OF KOMPANEETS EQUATION: THE EVOLUTION OF SPECTRUM AND MAIN FREQUENCIES

D.I.NAGIRNER, V.M.LOSKUTOV, S.I.GRACHEV

The evolution of spectrum of isotropic and homogeneous radiation in infinite space of homogeneous nonrelativistic electron gas is calculated by solving Kompaneets equation. For infinitely narrow initial spectrum in a linear approximation of the equation the dependence of the mean frequency and the dispersion of frequency are defined. The characteristic times are introduced which separate the regions of distinguished behaviour of the main values. Two variations of numerical method are proposed to solve the general equation. The first one with equidistant frequencies is nonconservative. The second one based on automatic choice of adaptive meshes of frequencies and times is conservative. For linear equation the method gives results in accordance with solutions obtained through expansions in terms of eigenfunctions of Kompaneets operator which was calculated in [16]. As an example of application of the method the effects of nonlinearity on the evolution of the spectrum of initially monochromatic radiation are watched.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С.Компанец, Ж. эксперим. и теор. физ., 31, 876, 1956.
2. Я.Б.Зельдович, Успехи физ. наук, 115, 161, 1975.
3. Л.А.Поздняков, И.М.Соболь, Р.А.Сюняев, Итоги науки и техн., сср. Астрономия, ВИНТИ, М, 31, 265, 1986.
4. G. Charline, J. Stevens, Astrophys. J., 184, 1041, 1973.
5. А.Ф.Илларионов, Р.А.Сюняев, Астрон. ж., 51, 698, 1974.
6. Р.А.Сюняев, Письма в Астрон. ж., 6, 387, 1980.
7. R. Weutann, Astrophys. J., 145, 560, 1966.
8. Я.Б.Зельдович, А.Ф.Илларионов, Р.А.Сюняев, Ж. эксперим. и теор. физ., 62, 1217, 1972.
9. А.Ф.Илларионов, Р.А.Сюняев, Астрон. ж., 51, 1162, 1974.
10. J. Bartlett, J. Silk, Astrophys. J., 353, 399, 1990.
11. А.Ф.Илларионов, Р.А.Сюняев, Астрон. ж., 49, 58, 1972.
12. R.A. Sunyaev, Ya. B. Zel'dovich, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 18, 537, 1980.
13. Е.В.Левич, Р.А.Сюняев, Астрон. ж., 48, 461, 1971.
14. Р.А.Сюняев, Астрон. ж., 48, 244, 1971.
15. Ya. B. Zel'dovich, R.A. Sunyaev, Astrophys. Space Sci., 4, 301, 1969.
16. Д.И.Нагирнер, В.М.Лоскутов, Астрофизика, 40, 97, 1997.
17. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971.
18. S. Miyamoto, Astron. Astrophys., 63, 69, 1978.
19. Н.М.Беляев, А.А.Рядно, Методы теории теплопроводности, часть 2, Высшая школа, М., 1982.
20. Я.Б.Зельдович, Е.В.Левич, Ж. эксперим. и теор. физ., 55, 2433, 1968.