УДК: 524.8: 520.8

СТАТУС ФИЗИЧЕСКИХ НАБЛЮДАЕМЫХ ФРИДМАНОВСКОЙ ВСЕЛЕННОЙ В КЛАССИЧЕСКОМ И КВАНТОВОМ ГАМИЛЬТОНОВОМ ФОРМАЛИЗМЕ

Ю.П.ПАЛИЙ, В.В.ПАПОЯН, В.Н.ПЕРВУШИН

Поступила 26 ноября 1996

Принята к печати 15 января 1997

Статья посвящена исследованию соотношений между классической фридмановской космологией и дираковским гамильтоновым подходом к квантованию Вселенной на простом, но важном примере однородной Вселенной, заполненной возбуждениями скалярного поля. Для полного отделения сектора физических переменных от чисто калибровочного сектора применяется метод безкалибровочной редукции, что дает возможность найти связь космологических наблюдаемых в смысле Фридмана-Эйнштейна с наблюдаемыми дираковского гамильтонова формализма в конформной системе отсчета Нарликара. Безкалибровочная редукция позволила установить, что одна из переменных нефизического сектора в процессе редукции превращается в инвариантный параметр времени и не может рассматриваться как динамическая переменная ни в функциональном, ни в операторном подходе к квантованию. Показано, что в этом превращении переменной в параметр времени причина ненормируемости волновой функции уравнения Уиллера-Де Витта (УДВ) и причина возникновения бесконечного калибровочного фактора в функциональном интеграле Хартли-Хокинга. Безкалибровочная редукция дает определенный рецепт математического и физического осмысления уравнения и волновых функций УДВ, использование которого делает ясным и прозрачным их отношение к наблюдательной космологии. Показано, в частности, как волновая функция УДВ описывает фридмановскую эволюцию относительно собственного времени.

1. *Введение и постановка задачи.* Необходимость привлечения квантовой теории для решения фундаментальных проблем классической космологии стимулировала разработку гамильтонова подхода к теории гравитации и космологическим моделям Вселенной [1-5].

Гамильтоновому описанию космологических моделей посвящено большое количество журнальных статей и несколько монографий [6,7]. Основной задачей большинства этих работ является построение волновой функции Вселенной.

Вместе с тем, вопрос об отношении физических наблюдаемых классической фридмановской космологии к дираковским наблюдаемым гамильтонового формализма остается до конца не выясненным.

Согласно Дираку, главной трудностью в определении "наблюдаемых" при гамильтоновом описании сингулярных систем со связями являются, во-первых, "лишние" переменные и, во-вторых, наличие связей первого рода, отражающих высокую симметрию исходной теории относительно

группы преобразований, которую обычно называют "калибровочной".

Корректное решение вопроса о наблюдаемых, по-видимому, возможно лишь при полном отделении сектора физических переменных от чисто калибровочного сектора "лишних" степеней свободы. Строго говоря, такая задача полного отделения физического и нефизического секторов не рассматривалась ни для одной космологической модели.

Общий метод гамильтоновой редукции сингулярных систем с отделением калибровочного сектора был развит недавно в [8,9]. В настоящей работе мы используем этот метод в случае простой, но очень важной модели Вселенной со скалярным полем для выяснения статуса космологических наблюдаемых фридмановской Вселенной в классическом и квантовом гамильтоновом формализме.

Мы попытаемся показать, как в таком подходе, в контексте квантования в редуцированном фазовом пространстве, разрешить проблемы "ненормируемости" волновой функции Вселенной и ее "стационарности".

Изложение ведется следующим образом: в разделе 2 резюмированы сведения о некоторых наблюдаемых космологических величинах. В разделе 3 приводится лагранжева модель, уравнения движения которой совпадают с уравнениями фридмановской модели радиационно - доминантной Вселенной. Раздел 4 посвящен безкалибровочной- версии дираковского гамильтонова описания [8,9] рассматриваемой модели, что позволяет отделить физический и нефизический (калибровочный) секторы. В разделе 5 конструируются физические наблюдаемые в гамильтоновом подходе, соответствующие понятию "наблюдаемых" во фридмановской космологии (см. раздел 2). В разделе 6 проводится классическое квантование предложенной модели в редуцированном фазовом пространстве и описываются космологические наблюдаемые в квантовой теории. В разделе 7 строится функциональный интеграл, адекватный безкалибровочному гамильтонову квантованию, выясняется соответствующий этому квантованию способ упорядочения операторов в уравнении Уиллера-Де Витта (УДВ) и показано, как в подходе УДВ модифицировать волновую функцию радиационно - доминантной Вселенной таким образом, чтобы она описывала космологические фридмановские наблюдаемые: эволюцию Вселенной и красное смещение "наблюдаемой энергии". В заключении обсуждаются полученные результаты.

2. Наблюдательная космология. 2.1 Основой наблюдательной космологии является факт расширения Вселенной, сформулированный в виде закона Хаббла, который устанавливает линейную зависимость скорости (V) удаления астрономического "объекта" от расстояния (R_r)

до него: $V=H_0 R_F$. Коэффициент пропорциональности этой связи известен как постоянная Хаббла

$$H_0 = (50 + 100) \frac{\text{км}}{\text{с Мпк}} \approx 10^{41} + 10^{42} \text{ Гэ В}^{-1},$$

которая задает шкалу наблюдательной космологии.

Основным объектом независимых измерений расстояний и скоростей являются фотоны, испускаемые наблюдаемыми "объектами".

За время пролета такого фотона до земного наблюдателя (R_F/c) длина волны фотона λ_0 увеличивается. В результате, спектр атомов космического "объекта" по сравнению с аналогичным спектром земных атомов (с длиной волны λ) смещается в красную область на величину

$$z = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad (1)$$

которая, согласно эффекту Доплера, определяет скорость космологического объекта относительно Земли. Корреляция большого числа наблюдаемых (R_F) и (z) позволяет установить факт расширения Вселенной.

2.2 Теоретической основой современной космологии является фридмановское решение уравнений общей теории относительности для случая однородного и изотропного распределения вещества во Вселенной [10]. Важно подчеркнуть здесь, что, как работы Фридмана, так и другие работы по классической космологии выполнены в синхронной системе отсчета с метрикой Робертсона-Уокера

$$(ds_F)^2 = dT_F^2 - a^2(T_F) \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2)$$

где $\gamma_{ij} dx^i dx^j$ - метрика трехмерного пространства постоянной кривизны:

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1 - (kr^2/r_0^2)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2); \quad k = 0, \pm 1$$

$${}^{(3)}R(\gamma_{ij}) = -6k/r_0^2. \quad (3)$$

Предполагается, что физически измеряемыми в космологии оказываются величины, которые эволюционируют во фридмановском собственном времени T_F . Такой выбор системы отсчета является типичной "конвенцией о наблюдателе" в ОТО и непосредственно никак не следует из вариационного принципа.

Единственной измеримой в метрике (2) является эволюция масштабного фактора $a(T_F)$ или изменение расстояния между космологическими объектами в собственном времени:

$$R_F(T_F) = a(T_F) \int_0^r dR_c(r') = a(T_F) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2 / r_0^2}} \quad (4)$$

2.3 Другой альтернативной конвенцией, которая используется при решении космологических моделей как эффективный технический прием, является выбор конформного времени T_c в соответствии с

$$dT_F(T_c) = a(T_c) dT_c. \quad (5)$$

Конформное время возникает при описании движения фотонов со светоподобным интервалом (2)

$$(ds_F)^2 = 0 \Rightarrow R_c = \int_0^{T_c(T_F)} \frac{dT_F}{a(T_c)} = T_c(T_F) \quad (6)$$

как расстояние в конформном пространстве R_c , которое фотон проходит за время T_F (при фиксированных θ и ϕ).

Выбор эквивалентного набора величин (5), (6) R_c , T_c и конформной энергии фотона E_c , связанной с наблюдаемой по Фридману энергией E_F формулой

$$E_F = \frac{E_c}{a(T_c)}, \quad (7)$$

часто является более предпочтительным для радиационно - доминантной Вселенной как в классической, так и в квантовой теории, поскольку этот набор содержит большее число сохраняющихся величин.

В общей теории относительности конвенция (2) есть следствие эйнштейновского определения наблюдаемого интервала физического пространства

$$(ds_E)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (8)$$

Нарликар (см. обзор [11] и указанную там литературу) называет конвенцию (2) выбором "эйнштейновской системы отсчета" и обсуждает другую конвенцию - выбор "конформной системы отсчета" с интервалом

$$(ds_c)^2 = dT_c^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{ds_F^2}{a^2(T_F)}, \quad (9)$$

конформно эквивалентным (2).

В конформной системе отсчета "объекты" неподвижны, но переменны их массы

$$m_c(T_c) = a(T_c) \cdot m_F. \quad (10)$$

Смещение спектральных линий атомов с массой (10) имеет место

также и в этом случае, но определяется эволюцией масс на Земле за время пролета фотона от "объекта" до Земли:

$$z = 1 - \frac{m_c}{m_{co}}$$

Эволюция Вселенной начинается с "поверхности" нулевой массы всех частиц. Аномалии этой поверхности могут вести к аномалиям в законе смещения [11].

3. *Модель.* В настоящей работе исходным является действие Эйнштейна-Гильберта с конформно связанным скалярным полем

$$W = \int d^4 x \sqrt{-g} \left[-\frac{({}^4 R(g_{\mu\nu}))}{16\pi G} \left(1 - \frac{16\pi G}{12} \Phi^2 \right) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} a_\mu \Phi a_\nu \Phi \right]. \quad (11)$$

В гамильтоновой формулировке теории удобно выбрать метрику в форме АДМ [2]

$$(ds_E)^2 = N^2 dt^2 - g_{ij} \tilde{dx}^i \tilde{dx}^j; \quad (12)$$

$$\tilde{dx}^i = dx^i + N^i dt.$$

Метрики (8) и (12) содержат по 10 компонент $g_{\mu\nu}$, из которых только 2 соответствуют независимым физическим степеням свободы, остальные исключаются связями, так как являются или нефизическими (с нулевыми импульсами), или чисто калибровочными - подобно продольной компоненте электромагнитного поля.

С точки зрения вариационных принципов, такое действие описывает теорию тензорного поля $g_{\mu\nu}(x)$ в пространстве с координатами x^μ , которые имеют смысл наблюдаемых только в случае, когда возможен переход к асимптотически плоскому пространству - времени (островные системы):

$$g_{\mu\nu}(x \rightarrow \infty) = (+1, -1, -1, -1).$$

Такой смысл для координат x^μ теряется в космологических моделях однородной Вселенной, которые не относятся к классу островных систем. Одна из них, а именно, однородная модель Фридмана, будет рассматриваться в настоящей работе. Предположение Фридмана об однородном расширении материи означает здесь, что скалярное поле $\Phi(x, t)$ зависит только от времени t , а пространство описывается метрикой Робертсона-Уокера (2), (3)

$$(ds)^2 = a^2(t) \left[N_c^2 dt^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j \right] \quad (13)$$

В отличие от Фридмана здесь оставлена лишняя компонента метрики N_c , что вызвано потребностями гамильтонова описания. Согласно такой

постановке вместо уравнений движения рассматривается действие, в котором необходимо оставить ровно столько переменных, чтобы система уравнений, которым они удовлетворяют, была бы полностью эквивалентной системе уравнений Фридмана-Эйнштейна для известных космологических моделей.

В нашем случае вместо (11) мы получаем действие для фридмановской модели

$$W^F = \int_1^2 dt \left[-\beta \left(\frac{\dot{a}^2}{2N_c} - \frac{ka^2}{2r_0^2} N_c \right) + V_{(3)} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2N_c} - \frac{k\phi^2}{2r_c^2} N_c \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}a}{N_c} \right) \right]. \quad (14)$$

Опущены поверхностные члены, которые не дают вклада в уравнения движения, но сохранена полная производная от гравитационной части действия (11); $V_{(3)}$ - объем трехмерного пространства с постоянной кривизной (3), β - константа

$$\beta = V_{(3)} \frac{6}{2\pi G}; \quad V_{(3)k+1} = 2\pi^2 r_0^3. \quad (15)$$

Новое поле $\phi(t)$ связано с Φ соотношением

$$\Phi \equiv \frac{\phi}{a}. \quad (16)$$

Можно убедиться, что совокупность уравнений движения модели (14) эквивалентна фридмановской радиационно - доминантной Вселенной [12].

Вариация действия (14) по полю материи ϕ

$$\frac{\delta W}{\delta \phi} = 0 \Rightarrow + \frac{d}{N_c dt} \left(\frac{d\phi}{N_c dt} \right) + \frac{k\phi}{r_0^2} = 0 \quad (17)$$

ведет к интегралу движения

$$E_c(\phi) = V_{(3)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{N_c dt} \right)^2 + \frac{k\phi^2}{2r_0^2} \right]; \quad \frac{d}{dt} E_c(\phi) = 0, \quad (18)$$

который играет роль конформной энергии E_c (7) для безмассового скалярного поля.

Вариация по переменной N_c ведет к известному уравнению эйнштейновского баланса энергии расширяющегося пространства и материи

$$\frac{\delta W}{\delta N_c} = 0 \Rightarrow \beta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{da}{N_c dt} \right)^2 + \frac{ka^2}{2r_0^2} \right] = E_c(\phi). \quad (19)$$

Фридмановская эволюция Вселенной возникает из уравнений (17), (18), (19) в том случае, когда эти уравнения дополняются определением

собственного времени (5).

$$\boxed{dT_F = aN_c dt = adT_c} \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19) и решая это уравнение относительно T_F , получим закон эволюции заполненной излучением Вселенной в параметрической форме

$$a(T_c) = \sqrt{\frac{2E_c r_0^2}{\beta}} S_k\left(\frac{T_c}{r_0}\right); \quad T_F(T_c) = \int_0^{T_c} dT_c a(T_c), \quad (21)$$

где

$$S_{k=1}(\eta) = \sin\eta; \quad S_{k=-1}(\eta) = \sinh\eta; \quad S_{k=0}(\eta) = \eta \quad (22)$$

Для фридмановского наблюдателя энергия красного смещения E_F , вызванного расширением Вселенной, определяется формулой (7).

Наша задача выяснить, как связаны космологические наблюдаемые (7), (20) с дираковскими наблюдаемыми в гамильтоновом подходе к модели (14) и с квантовой волновой функцией Вселенной, удовлетворяющей уравнению УДВ [3,4],

$$\left[-\frac{1}{2\beta} \frac{1}{a} \frac{d^2}{da^2} + \beta \frac{ka}{2r_0^2} - \frac{E_c(\varphi)}{a} \right] \Psi_{WDW}(a, \varphi) = 0, \quad (23)$$

являющимся квантовым аналогом условия баланса энергии (17).

4. *Бескалибровочная гамильтонова редукция.* Действие (14), согласно классификации Дирака [13], относится к классу сингулярных. Следуя дираковской канонической теории, действие (14) можно переписать в следующей гамильтоновой форме:

$$W^F[p_\varphi, \varphi; p_a, a] = \int dt \left\{ p_\varphi \dot{\varphi} - \left[p_a \dot{a} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (p_a a) \right] - N_c H_{Ec} \right\}, \quad (24)$$

где

$$H_{Ec} = -\left(\frac{p_a^2}{2\beta} + \frac{ka^2}{2r_0^2} \beta \right) + H_\varphi \quad (25)$$

конформная энергия, а

$$H_\varphi = \left(\frac{p_\varphi^2}{2V_{(3)}} + \frac{k\varphi^2}{2r_0^2} V_{(3)} \right)$$

ее часть, описывающая скалярное поле (материю).

Рассматриваемая модель (24), как и следовало ожидать, содержит те же принципиальные трудности, с которыми сталкивается теория тяготения. Главная из них в наличии нефизических переменных. В фазовом

пространстве:

$$p_\varphi, \varphi; p_a, a$$

один из импульсов является зависимой (игнорируемой) переменной в силу уравнения связи:

$$\frac{\delta W}{\delta N_c} = 0 \Rightarrow H_{E_c} = 0$$

Существуют две возможности выбора игнорируемого импульса: p_φ или p_a .

Обсудим в начале случай, когда в качестве независимой переменной выбран импульс материи, что позволяет использовать принцип соответствия с теорией без гравитации в плоском пространстве - времени.

Согласно методу [8,9] физические переменные отделяются от нефизических, если перейти к новым каноническим переменным

$$(p_a, a) \rightarrow (\Pi_a, \eta_a); \quad \{p_a, a\}_{(\Pi_a, \eta_a)} = 1 \quad (26)$$

так, чтобы связь для них стала новым импульсом

$$\frac{p_a^2}{2\beta} + \frac{ka^2}{2r_0^2} \beta = \Pi_a. \quad (27)$$

Для $k=+1$ это уравнение описывает отображение окружности на прямую линию. Существуют две карты такого отображения, соответствующие двум возможным решениям уравнений (26), (27):

$$p_a = \pm \sqrt{2\beta \Pi_a} C_k(\eta_a); \quad (C_{+1}(\eta_a) = \cos \eta_a; C_{-1}(\eta_a) = \cosh \eta_a; C_0(\eta_a) = 1), \quad (28)$$

$$a_{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{2\Pi_a r_0^2}{\beta}} S_k(\eta_a). \quad (29)$$

Поверхностный член гравитационной части действия Эйнштейна-Гильберта (17) полностью поглощается новой канонической структурой [14]

$$-\left(p_a \dot{a} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (p_a a) \right) = \mp \Pi_a \dot{\eta}_a r_0. \quad (30)$$

Система, описываемая действием (24), в терминах новых переменных (28) эквивалентна системе, описываемой двумя действиями

$$W_{(\pm)}^F(\Pi_a, \eta_a, p_\varphi, \varphi, N_c) = \int dt \left[p_\varphi \dot{\varphi} \mp \Pi_a \dot{\eta}_a r_0 - N_c (-\Pi_a + H_\varphi) + \dots \right]. \quad (31)$$

Выражение (31) приводит к гамильтоновым уравнениям, как для переменных нефизического сектора:

$$\frac{\delta W_{(\pm)}^F}{\delta \eta_a} = 0 \Rightarrow \pm \dot{\Pi}_a = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\delta W_{(\pm)}^F}{\delta \Pi_a} = 0 \Rightarrow r_o d \eta_a = \pm N_c dt, \quad (33)$$

так и для физических переменных:

$$\frac{\delta W_{(\pm)}^F}{\delta p_\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{N_c dt} = \pm \{H_\varphi, p_\varphi\}. \quad (34)$$

$$\frac{\delta W_{(\pm)}^F}{\delta \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{dp_\varphi}{N_c dt} = \pm \{H_\varphi, p_\varphi\}. \quad (35)$$

Из этих уравнений видно, что новая нефизическая переменная η_a берет на себя функцию времени эволюции физических переменных в редуцированном фазовом пространстве p_φ, φ , а роль гамильтониана эволюции в этом пространстве играет материальная часть "эйнштейновской энергии" H_E (25).

Для полного описания физического сектора, эквивалентного описанию исходной теории (17), мы можем ограничиться действием, которое получается из действия (31) прямой подстановкой связи

$$\Pi_a = H_\varphi. \quad (36)$$

В результате получим редуцированное действие

$$W_{\pm}^F |_{\Pi_a = H_\varphi} = W_{\pm}^{Red} = \int_{t_1}^{t_2} (p_\varphi d\varphi \mp H_\varphi r_o d\eta_a), \quad (37)$$

которое описывает возбуждение скалярного поля в полости конформного пространства с постоянной метрикой γ_{ij} . Дираковскими наблюдаемыми в редуцированном фазовом пространстве оказывается конформная энергия H_φ , которая совпадает с редуцированным гамильтонианом, описывающим эволюцию скалярного поля в стационарном (конформном) пространстве (9) относительно конформного времени (5).

Таким образом, безкалибровочная гамильтонова редукция ведет к конформной системе отсчета Нарликара [11], в которой пространство выглядит стационарным, а время $(T_c = r_o \eta_a)$ монотонным [15,16].

5. Построение фридмановских эволюционных наблюдаемых в гамильтоновом методе. У нас два пути описания фридмановской эволюции в гамильтоновом подходе, когда в дираковский физический сектор входят или материя p_φ, φ , или метрика p_a, a .

На первом пути для того, чтобы из дираковских наблюдаемых построить обычные фридмановские наблюдаемые необходимо перейти к эйнштейновской системе отсчета (2), где фридмановская эволюция Вселенной связана с геометрической конвенцией σ : а) наблюдаемом собственном времени

$$dT_F = a(t) N_c dt = a(\eta_a) r_o d\eta_a, \quad (38)$$

б) собственном расстоянии

$$R_F = a(\eta_a) R_c, \quad (39)$$

в) собственной энергии

$$E_F = \frac{E_c}{a(\eta_a)}. \quad (40)$$

В этом случае можно говорить о "геометрической эволюции", так как переменная $a(\eta_a)$ не входит в число дираковских наблюдаемых и фиксируется видом канонических преобразований (28) на поверхности связи (36)

$$a_{(\pm)} = \sqrt{\frac{2 H_{\phi} r_o^2}{\beta}} S_k(\eta_a), \quad (41)$$

а не динамическим уравнением движения в дираковском секторе, которые получаются из действия (37).

Выбор канонических преобразований (приводящих к отделению калибровочного сектора от физического) в отличие от решений динамических уравнений не однозначен. Чтобы зафиксировать эти преобразования необходимо привлечь дополнительные принципы, например, принцип соответствия с описанием безмассовых полей в пространстве Минковского (в пределе, когда гравитация исчезает). Нетрудно убедиться, что такое соответствие выполняется, т.к. полученная энергия в (37) действительно совпадает с определением энергии материи.

Такая же ситуация имеет место в СТО при описании релятивистской частицы. Имеется много возможностей выбора переменных, для которых происходит полное отделение физического и нефизического секторов, но лишь для одного из них энергия $\sqrt{p^2 + m^2}$ удовлетворяет принципу соответствия с нерелятивистской механикой

$$\sqrt{p^2 + m^2} = m + \frac{p^2}{2m} + \dots$$

Итак, первый путь гамильтоновой редукции ведет к фридмановской эволюции Вселенной, которая является следствием не столько динамики,

сколько геометрической конвенции о фридмановских наблюдаемых в космологии.

В рассматриваемой модели, в силу симметрии $\varphi \leftrightarrow a$, можно материя (скалярное поле), эволюция Вселенной становится следствием динамических уравнений, однако ценой того, что энергия меняет знак (может стать знакопеременной в случае нескольких материальных полей) и из фазового пространства исчезают поля материи, т.е. сам объект применения принципа соответствия.

6. *Квантование в редуцированном пространстве.* Как и в случае релятивистской частицы, два решения, ведущие к двум редуцированным действиям, означают, что полная волновая функция системы представляет собой суперпозицию двух волновых функций, каждая из которых соответствует одному из двух: W_+^{Red}, W_-^{Red} .

$$\psi_{Red}(\eta_a, \varphi) = A^+ \psi_{Red}^{(+)}(\eta_a, \varphi) + A^- \psi_{Red}^{(-)}(\eta_a, \varphi). \quad (42)$$

Интерпретация коэффициентов A^+, A^- как операторов рождения Вселенной и анти-Вселенной означает выход на так называемое третичное квантование [17]. Функции $\psi^{(\pm)}$ удовлетворяют уравнениям Шредингера

$$\pm \frac{d}{i\tau_0 d \eta_a} \psi_{Red}^{(\pm)} = \hat{H}_\varphi \psi_{Red}^{(\pm)}(\eta_a, \varphi). \quad (43)$$

Волновые функции $\psi^{(\pm)}(\eta_a, \varphi)$ можно представить в виде спектрального разложения по полному набору ортонормированных собственных функций редуцированного гамильтониана $\langle \varphi | n \rangle$

$$\psi_{Red}^{(+)}(\eta_a, \varphi) = \sum_{\alpha(n)} e^{-i\alpha(n)\eta_a \tau_0} \langle \varphi | n \rangle^* \quad (44)$$

$$\psi_{Red}^{(-)}(\eta_a, \varphi) = \sum_{\alpha(n)} e^{+i\alpha(n)\eta_a \tau_0} \langle \varphi | n \rangle, \quad (45)$$

причем $\langle \varphi | n \rangle$ удовлетворяют уравнениям

$$\hat{H}_\varphi \langle \varphi | n \rangle = \varepsilon(n) \langle \varphi | n \rangle, \quad (46)$$

$$\int d\varphi \langle n_1 | \varphi \rangle \langle \varphi | n_2 \rangle^* = \delta_{n_1 n_2}, \quad (47)$$

n_1, n_2 - наборы сохраняющихся квантовых чисел.

Поскольку переменная η_a рассматривается как временной параметр, условия нормируемости накладываются только на переменные редуцированного фазового пространства.

В дальнейшем, без ограничения общности, будем рассматривать случай замкнутого пространства $k=+1$, где $\langle \varphi | n \rangle$ являются полиномами Эрмита, а

$$\varepsilon(n) = \frac{1}{r_0} \left(n + \frac{1}{2} \right); \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (48)$$

Масштабный фактор a выражается через переменную η_a согласно

$$a_{(\pm)}(\eta_a) = \pm \sqrt{\frac{2\varepsilon(n) r_0^2}{\beta}} \sin(\eta_a) \quad (49)$$

для каждого члена спектрального разложения (44).

Найденная волновая функция (44), (45) имеет простой смысл: она описывает эволюцию квантовых возбуждений скалярного поля относительно конформного времени в замкнутой (конечной) полости конформного пространства.

Для каждого члена спектрального разложения (44) можно перейти к "эйнштейновской системе отсчета" или к собственному времени

$$dT_F^{\pm} = a_{(\pm)}(\eta_a) = r_0 d\eta_a. \quad (50)$$

Учитывая связь фридмановского времени с конформным (5), где $T_c = \eta_a r_0$, легко показать, что вариация волновой функции Вселенной по T_F

$$\frac{d}{idT_F^{\pm}(a)} \Psi_{Red}^{(\pm)}(\eta_a, \varphi) = \frac{1}{\left(\frac{dT_F(a)}{d\eta_a(a)} \right)} \frac{d}{id\eta_a} \Psi_{Red}^{(\pm)}(\eta_a, \varphi) = \pm \frac{\varepsilon(n)}{a_{\pm}} \Psi_{Red}^{(\pm)}(\eta_a, \varphi) \quad (51)$$

определяет "наблюдаемую" по Фридману-Эйнштейну физическую энергию (7) $E_F = \pm \varepsilon(n) / a_{\pm}$, которая описывает красное смещение в процессе фридмановской эволюции.

Можно сказать, что волновая функция в редуцированном фазовом пространстве (44) (в отличие от волновой функции УДВ) имеет непосредственное отношение к классической фридмановской эволюции Вселенной, заполненной "радиацией". Принцип соответствия с классической теорией (51) диктует вполне определенные рецепты доопределения уравнения УДВ (23), которые рассматриваются в следующем разделе.

7. Функциональный интеграл и математический статус

уравнения УДВ. 7.1 Для того, чтобы связать найденное решение с решением уравнения УДВ (23) и выяснить смысл последнего, полезно записать функцию Грина

$$G(\eta_1, \eta_2 | \varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\alpha(n)} \left[e^{i\epsilon(n)(\eta_1 - \eta_2)} \langle \varphi_1 | n \rangle \langle n | \varphi_2 \rangle^* + \right. \quad (52)$$

$$\left. + e^{-i\epsilon(n)(\eta_1 - \eta_2)} \langle \varphi_1 | n \rangle^* \langle n | \varphi_2 \rangle \right] \quad (53)$$

в виде функционального интеграла по переменным физического сектора фазового пространства

$$G(\eta_1, \eta_2 | \varphi_1, \varphi_2) = \int_{\varphi_{n1}=\varphi_1}^{\varphi_{n2}=\varphi_2} D\varphi Dp_\varphi \left[e^{+iW_\pm^{Red}}(p_\varphi, \varphi) + e^{iW_\pm^{Red}}(p_\varphi, \varphi) \right], \quad (54)$$

где

$$W_\pm^{Red} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta_a \left(p_\varphi \frac{d\varphi}{d\eta_a} \mp H_\varphi r_0 \right), \quad (55)$$

а роль времени играет η_a , принадлежащая расширенному фазовому пространству. Формально, можно вернуться к временному параметру t , так, чтобы $\varphi_1 = \varphi(t_1)$, $\varphi_2 = \varphi(t_2)$ и переписать действие (55) в виде:

$$W_\pm^{Red} = \int_{\eta_a(t_1)=\eta_1}^{\eta_a(t_2)=\eta_2} dt \left(p_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \mp H_\varphi r_0 \frac{d\eta_a}{dt} \right). \quad (56)$$

При этом нужно помнить, что η_a является не переменной, а параметром. Используя функциональные δ -функции

$$\int D\Pi_a \delta(-\Pi_a + H_\varphi) = \int DN_c D\Pi_a \exp \left(i \int_{t_1}^{t_2} dt N_c (-\Pi_a + H_\varphi) \right), \quad (57)$$

можно ввести также дополнительное интегрирование и восстановить в функциональном интеграле все переменные расширенного фазового пространства, за исключением переменной η_a :

$$G(\eta_1, \eta_2 | \varphi_1, \varphi_2) = \int_{\eta_1, \varphi_1}^{\eta_2, \varphi_2} D\varphi Dp_\varphi D\Pi_a DN_c \left[e^{+iW_\pm^F} + e^{iW_\pm^F} \right], \quad (58)$$

где действия $W_\pm^F$ определяются (31).

Включение оставшегося интеграла по "игнорируемой" переменной η_a должно сопровождаться делением на бесконечный калибровочный фактор

$$\int_{t_1 < t < t_2} D\eta_a(t) = \Delta, \quad (59)$$

или введением δ - функции

$$\int_{t_1 < t < t_2} D \eta_a(t) \delta(\eta_a(t)) \quad (60)$$

(последнюю будем называть "канонической" калибровкой). Подставим (60) в (58) и преобразуем к исходным переменным (p_a, a)

$$\Pi_a(p_a, a) = \left(\frac{p_a^2}{2\beta} + \frac{ka^2}{2r_0^2} \beta \right); \quad \eta_a(p_a, a) = \arctan \left(\frac{\beta a}{r_0^2 p_a} \right). \quad (61)$$

Слагаемые в (58) можно объединить, учитывая, что

$$\delta \left(\frac{p_a^2}{2\beta} - \left(\Pi_a - \frac{a^2}{2r_0^2} \beta \right) \right) = \sqrt{2\beta} \left[\delta \left(p_a - \sqrt{\Pi_a - \frac{a^2}{2r_0^2} \beta} \right) + \delta \left(p_a + \sqrt{\Pi_a - \frac{a^2}{2r_0^2} \beta} \right) \right].$$

В результате получим функциональный интеграл в форме Фадеева-Попова [5] в канонической калибровке (60)

$$G(\eta_1, \eta_2 | \Phi_1, \Phi_2) = \int_{\eta_1, \Phi_1}^{\eta_2, \Phi_2} D\varphi Dp_\varphi Dp_a Da DN_c \times \delta \left[\arctan \left(\frac{\beta a}{r_0^2 p_a} \right) \right] e^{iW^F(p_a, \varphi; p_a, a; N_c)}. \quad (62)$$

Здесь W^F - исходное действие (24), включающее поверхностный член

$$- \overline{W}^F + W^F = \int dt \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (p_a, a) \right]. \quad (63)$$

Напомним, что наивный функциональный интеграл по всему фазовому пространству имеет вид

$$G(a_1, a_2 | \Phi_1, \Phi_2) = \int_{\Phi_1, a_1}^{\Phi_2, a_2} Dp_\varphi D\varphi DN_c Dp_a Da e^{i\overline{W}^F} \quad (64)$$

и отличается от канонического (62) следующим:

- i) бесконечным калибровочным фактором (59),
- ii) поверхностным членом (63).

Этот наивный функциональный интеграл, содержащий бесконечный калибровочный фактор, использован в работе Хартли-Хокинга [18] и вслед за ними многими авторами (см., например, [19]).

7.2 Рассмотрим теперь, каким образом из уравнения УДВ (23) можно получить волновую функцию (44), описывающую связь фридмановского собственного времени с наблюдаемой энергией в сопутствующей системе отсчета.

Конформная версия уравнения УДВ имеет вид

$$\left[-\left(\frac{p_a^2}{2\beta} + \frac{ka^2}{2r_0^2\beta} \right) + \hat{H}_p \right] \Psi_{WDW}(\varphi, a) = 0. \quad (65)$$

Предположим, что волновая функция факторизована

$$\Psi_{WDW}(\varphi, a) = \sum_{\varepsilon(n)} \Psi_{\varepsilon}(a, \varepsilon(n)) \langle n | \varphi \rangle, \quad (66)$$

в результате интеграла движения в классической теории (H_p) соответствует сохраняющееся квантовое число $\varepsilon(n)$, а $\Psi(a, \varepsilon(n))$ удовлетворяет уравнению

$$\left[-\left(\frac{p_a^2}{2\beta} + \frac{ka^2}{2r_0^2\beta} \right) + \varepsilon(n) \right] \Psi(a, \varepsilon(n)) = 0. \quad (67)$$

Для того, чтобы решения этого уравнения совпали с волновыми функциями (44) необходимо

- i) принять правила упорядочения операторов в выражении (67), согласно которым импульс $\hat{p}$ действует позднее, чем переменная a ;
- ii) добавить фазовый множитель, обусловленный поверхностным членом (63), как следствие канонического преобразования к "канонической калибровке".

Правило упорядочения операторов i) является следствием устранения переменной a из фазового пространства и ведет к решению

$$\Psi_{WDW} = A^+ \Psi_{WDW}^+ + A^- \Psi_{WDW}^-, \quad (68)$$

$$\Psi_{WDW}^{\pm}(a, \varepsilon(n)) = \exp \left[\pm i \int_0^a da' \sqrt{\varepsilon(n) - \frac{a'^2}{2r_0\beta}} \right] \quad (69)$$

$$\hat{p}_a \Psi_{WDW}^{\pm} = \pm \sqrt{\varepsilon(n) - \frac{a^2}{2r_0\beta}} \Psi_{WDW}^{\pm}. \quad (70)$$

А учет фазового множителя с фазой (63)

$$S(a) = \mp \frac{1}{2} a \sqrt{\varepsilon(n) - \frac{a^2}{2r_0\beta}} \quad (71)$$

приводит к тождественному равенству волновых функций: редуцированной (44) и УДВ (23)

$$\Psi_{Red}^{\pm}(a, \varphi) = e^{\pm i\varepsilon(n)r_0\eta_0(a)} \langle \varphi | n \rangle = e^{\mp iS(a)} \Psi_{WDW}^{\pm}(a, \varepsilon(n)) \langle \varphi | n \rangle. \quad (72)$$

Поскольку переменная a превратилась в параметр, то мы можем требовать нормируемости этих функций только для переменных реду-

цированного фазового пространства, в данном случае для переменной φ .

Итак, можно считать, что существует рецепт как решения, так и интерпретации уравнения УДВ (согласованный с каноническим квантованием в редуцированном фазовом пространстве), причем волновая функция Вселенной нормируема и описывает эволюцию Вселенной в сопутствующей системе отсчета в соответствии с уравнением (51):

$$\frac{d}{idT_F(a)} \left[\Psi_{WDW}^{\pm}(a, \varepsilon(n)) e^{\mp iS(a)} \right] = \frac{\varepsilon(n)}{a(T_F)} \left[\Psi_{WDW}^{\pm}(a, \varepsilon(n)) e^{\mp iS(a)} \right]. \quad (73)$$

Заметим, что вариация такой функции УДВ по фридмановскому времени T_F дает "наблюдаемую" по Эйнштейну-Фридману энергию красного смещения.

8. *Заключение.* Статья посвящена исследованию соотношений между классической фридмановской космологией и дираковским гамильтоновым подходом к квантованию Вселенной на простом, но важном примере однородной Вселенной, заполненной возмущениями скалярного поля.

Существует два принципиальных отличия приведенного здесь исследования от аналогичных работ в этом направлении:

1) нам кажется важным, что определение сопутствующей системы отсчета является дополнительным к вариационному принципу, но никак не следует из него;

2) для полного отделения сектора физических переменных от чисто калибровочного сектора применяется безкалибровочная редукция.

Первое дало возможность найти связь космологических наблюдаемых в смысле Фридмана-Эйнштейна с наблюдаемыми дираковского гамильтонова подхода посредством конформного преобразования Нарликара [11].

Безкалибровочная редукция [8,9] позволила установить, что одна из переменных нефизического сектора в процессе редукции превращается в параметр времени и не может рассматриваться как динамическая переменная ни в функциональном, ни в операторном подходе к квантованию. Мы показали, что в этом превращении переменной в параметр причина ненормируемости волновой функции УДВ и причина бесконечного калибровочного фактора в наивном функциональном интеграле. Безкалибровочная редукция дает определенный рецепт математического и физического осмысления уравнения и волновых функций УДВ, использование которого проясняет их отношение к классической космологии.

Распространенное утверждение о стационарности волновой функции УДВ относительно исходного времени t не имеет физического смысла в силу инвариантности теории относительно репараметризации этого

времени, указывающей, что это время не наблюдаемо. Наблюдаемым временем оказывается именно та "игнорируемая" динамическая переменная из расширенного фазового пространства, которая в процессе безкалибровочной гамильтоновой редукции превратилась в параметр. "Игнорируемая" переменная и отвечает за эволюцию фридмановской Вселенной как в классической, так и в квантовой теориях. В частности, мы показали, что вариация волновой функции Вселенной относительно собственного времени эйнштейновского наблюдателя ведет к энергии красного смещения для безмассовых скалярных возмущений.

Другими словами, с точки зрения гамильтоновой редукции, фридмановское расширение Вселенной для эйнштейновского наблюдателя является формой существования физического времени. Поэтому вопрос о причине расширения Вселенной теряет свой смысл в контексте рассмотренной выше гамильтоновой редукции.

К каким новым следствиям может привести такая гамильтонова интерпретация модели Фридмана?

Гамильтонов подход с двумя решениями редукции указывает на одновременное сосуществование расширяющейся Вселенной и сжимающейся анти-Вселенной, аналогично приходящей и уходящей волне в СТО. Из ничего могут родиться сразу только Вселенная и анти-Вселенная.

Для реальной Вселенной, заполненной протонами, в области пространства $ar_0 \ll m_p^{-1} (a \ll 10^{-42})$ квантовая кинетическая энергия протона становится много больше энергии его массы и квантовые возбуждения таких протонов ничем не отличимы от возбуждения безмассовых частиц (нейтрино). В такой Вселенной нет смысла говорить об эйнштейновском наблюдателе и собственном времени (нарушающем причинность), связанном с системой покоя массивных частиц. Все наблюдатели превращаются в светоподобные состояния. Для таких наблюдателей "собственным" временем становится конформное время, а "собственным" расстоянием - конформное расстояние.

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия
Ереванский государственный университет, Армения.

STATUS OF FRIEDMANN UNIVERSE PHYSICAL OBSERVABLES IN CLASSICAL AND QUANTUM HAMILTONIAN APPROACH

Yu.PALIY, V.PAPOYAN, V.PERVUSHIN

A cosmological Lagrangian models of the Universe with the field excitations imitating dust and radiation are considered. The main problem is researching possibilities of description the Friedmann classical evolution by the Dirac Hamiltonian approach to establish relations between the Friedmann observables of classical evolution and the Dirac observables in the extended Hamiltonian approach to quantization of considered models.

To solve this problem we use the method of gaugeless Hamiltonian reduction where the gravitational part of the energy constraint is considered as new momentum. In the process of the reduction, the conjugate (to the new momentum) dynamical variable transforms into invariant time parameter. We show that this transformation of the metric variable to time parameter removes an infinite factor from the Hartle-Hawking naive functional integral and provides the normalizability of the Wheeler-DeWitt (WDW) wave function with respect the Dirac invariant variables.

The reduced Hamiltonian is split on two parts describing evolutions for the Universe and anti-Universe and satisfies the correspondence principle with field theory in a flat space. The considered Hamiltonian dynamics, after reduction, contains the expanding Universe and contracting anti-Universe. They simultaneously co-existence, in the space, similar to in- and outwaves in special relativity.

The classical evolution (with the Hubble law and the red shift formula) can be considered as the Hamiltonian one only for the Narlikar (conformal) frame of reference. The Friedmann evolution of the expanding Universe goes out from the framework of the Dirac dynamics, and it looks as the consequence of the Einstein convention which is additional to the variation principles of the Dirac scheme, in both the classical and quantum theories.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P.A.M.Dirac*, Proc.Roy.Soc., A246, 333, 1958, Phys.Rev. 114, (1959) 924.
2. *R.Arnowitz, S.Deser, C.W.Misner*, Phys.Rev., 117, 1595, 1960.
3. *J.A.Wheeler*, In Batelle Recontres: 1967 Lectures in Mathematics and Phys-

- ics, C. DeWitt, J.A. Wheeler, Benjamin, New York, 1968.
4. *B.S.DeWitt*, *Phys.Rev.*, **160**, 1113, 1967.
 5. *L.D.Faddeev*, *V.N.Popov*, *Usp. Fiz. Nauk*, **111**, 427, 1973.
 6. *M.P.Ryan, Jr., L.C.Shapley*, *Homogeneous relativistic Cosmologies*, Princeton Series on Physics, Princeton Univ. Press, Princeton, N.Y., 1975.
 7. *M.P.Ryan*, *Hamiltonian Cosmology*, *Lecture Notes in Physics N 13* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
 8. *S.A.Gogilidze, A.M.Khvedelidze, V.N.Pervushin*, *On Admissible Gauges For Constrained Systems*, *JINR Prepr. E2-95-203*, 1995, *Prepr. ZU-TH-4/95*, 1995 (hep - th 9504154), *Phys.Rev.D*, **53**, 2160, 1996.
 9. *S.A.Gogilidze, A.M.Khvedelidze, V.N.Pervushin*, *On Abelization of First Class Constraints*, *JINR Prepr. E2-95-131*, 1995 (hep - th 9504153), *J.Math.Phys.* **37**, 1760, 1996.
 10. *A.A.Friedmann*, *Z. Phys.*, **10**, 377, 1922.
 11. *J.V.Narlikar*, in *"Astrofizika e Cosmologia, Gravitazione, Quanti e Relativita"*, G. Barbera, Firenze, 1979.
 12. *К.П.Станюкович, В.Н.Мельников*, *Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации*, Энергоатомиздат, М., 1973, с. 105.
 13. *P.A.M.Dirac*, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer graduate School of Science Yeshiv University, New York.
 14. *V.Pervushin, V.Papoyan, S.Gogilidze et al*, *Phys.Lett.*, **B365**, 35, 1996.
 15. *V.Pervushin, T.Towmasjan*, *Int.J.Mod.Phys.*, **D4**, N1, 105-113, 1995.
 16. *A.M.Khvedelidze, V.V.Papoyan, V.N.Pervushin*, *Phys.Rev.D* **51**, 5654, 1995.
 17. *G.Lavrelashvili, V.A.Rubakow, P.G.Tinyakov*, *Proceed. of the 5 seminar Quantum Gravity, Moscov, USSR, 28 May-1 June 1990*, eds. M.A. Markov et al.
 18. *J.B.Hartle, S.W.Hawking*, *Phys.Rev. D* **28**, 1983.
 19. *S.A.Hayward*, *Phys.Rev.*, **D 53**, 5664, 1996.