АСТРОФИЗИКА

ТОМ 40 МАЙ, 1997 ВЫПУСК 2

УДК: 52-423:51

О ТЕОРЕМЕ БИРКГОФА В БСТТ

П.Ф.КАЗАРЯН, А.А.СААРЯН

Поступила 20 ноября 1996
Принята к печати 15 января 1997

Показано, что в наиболее общем варианте биметрической скалярно-тензорной теории гравитации сферически-симметричное вакуумное поле тяготения является статическим, если гравитационный скаляр не зависит от времени. Этот результат обобщен на некоторые случаи наличия источника, включая электромагнитное поле. Рассмотрены обе ветви решений с переменным.и постоянным скалярным полем.

1. *Введение*. В ОТО утверждение о статичности сферически-симметричного вакуумного поля тяготения известно под названием теоремы Биркгофа (см, например, [1]). Этот результат обобщен рядом авторов на системы с некоторыми типами источников (космологическая постоянная, электромагнотное поле и т.д.) [2-4].

В скалярно-тензорных теориях гравитации поле тяготения помимо метрики характеризуется также дополнительным скалярным полем. Вследствие наличия сферически-симметричных скалярных волн, в этих теориях теорема Биркгофа, вообще говоря, неверна. В работах [5-8] показано, что она имеет место на классе сферически-симметричных решений с независящим от времени скалярным полем. Здесь мы докажем справедливость обобщенной теоремы Биркгофа в биметрической скалярно - тензорной теории гравитации (БСТТ) при некоторых ограничениях на гравитационный скаляр, фоновую метрику, вещество и негравитационные поля. В разделе 2 выписаны уравнения гравитационного поля в наиболее общем варианте БСТТ. Условия выполнения теоремы Биркгофа для решений с переменным скаляром выявлены в разделе 3. Решения с постоянным скалярным полем рассматриваются в следующем разделе.

2. БСТТ [9-11] относится к классу метрических теорий с предпочтительной геометрией. Кроме метрики g_{ik} искривленного пространства-времени она содержит динамическое скалярное поле φ и нединамическую плоскую метрику γ_{ik}. Действие теории задается выражением

$$S = \int \left[-\frac{1}{2}\varphi\Lambda_g + \frac{1}{2}\varsigma(\varphi)\, g^{ik}\, \varphi_{,i}\varphi_{,k} \,/\, \varphi - \Lambda(\varphi) + L_m \right] \sqrt{-g}\, d^4 x, \qquad (1)$$

где $\varphi_{,l} = \partial\varphi / \partial x^l, \varsigma(\varphi)$ - безразмерная функция связи, $\Lambda(\varphi)$ - космологическая функция, L_m - плотность лагранжиана материи и негравитационных полей,

$$\Lambda_g = g^{ik}\left(\overline{\Gamma}^l_{in}\overline{\Gamma}^n_{kl} - \overline{\Gamma}^l_{ik}\overline{\Gamma}^n_{ln}\right), \quad \overline{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} - \breve{\Gamma}^l_{ik}, \tag{2}$$

Λ_g - тензор афинной деформации, Γ^l_{ik} и $\breve{\Gamma}^\lambda_{ik}$ - символы Кристоффеля для метрик g_{ik} и γ_{ik} соответственно. При $\varphi = \text{const} = 1/8\pi G$, где G - ньютоновская гравитационная постоянная, скорость света $c = 1$, (1) переходит в действие ОТО в биметрической формулировке. В обычных скалярно-тензорных теориях вместо Λ_g фигурирует скалярная кривизна риманова пространства-времени (см., например,[12]).

Из условия экстремальности действия (1) по отношению к вариациям g_{ik} и φ приходим к следующим уравнениям гравитационного поля [9,10]:

$$\varphi R_{ik} + \varphi_{,n}\overline{\Gamma}^n_{ik} - \varphi_{,(l}\overline{\Gamma}^n_{k)n} - \varsigma(\varphi)\varphi_{,i}\varphi_{,k} / \varphi = T_{ik} - g_{ik}T/2 - \Lambda g_{ik}, \tag{3а}$$

$$2\varsigma\varphi^{;n}_{;n} + \left[\varsigma'(\varphi) - \varsigma/\varphi\right]\varphi^{,n}\varphi_{,n} + \varphi\left[\Lambda_g + 2\frac{\delta\Lambda}{\delta\varphi}\right] = 0, \tag{3б}$$

где в индексах круглые скобки означают симметризацию по индексам i и k . Эту систему нужно дополнить уравнениями баланса энергии-импульса ($T^k_{i;k} = 0$) негравитационной материи. В БСТТ вследствие наличия абсолютной переменной γ_{ik} эти уравнения не являются следствиями (3). С помощью свертки уравнения (3а) и с учетом соотношений

$$\Lambda_g = R - \overline{W}^n_{;n} \quad ,\overline{W}^n \equiv g^{ik}\overline{\Gamma}^n_{ik} - g^{nl}\overline{\Gamma}^k_{lk} \tag{4}$$

уравнение (3б) можно записать также в виде

$$\left(2\varsigma\varphi^{,\nu} - \varphi\overline{W}^\nu\right)_{;\nu} - \varsigma'(\varphi)\varphi_{,n}\varphi^{,n} = T + 4\Lambda - 2\varphi\frac{d\Lambda}{d\varphi}, \tag{5}$$

которое будет использовано ниже при анализе решений с постоянным скалярным полем.

3. Рассмотрим сферически-симметричное гравитационное поле в БСТТ. Фоновую метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \tag{6}$$

Ниже мы будем предполагать, что в этой координатной системе недиагональная компонента $g_{01}=0$, и метрику искривленного пространства-времени можно записать в виде, согласованном с симметрией гравитационного поля:

$$ds^2 = e^{2n}dt^2 - e^{2l}\,dr^2 - e^{2\mu}\left(d\,\theta^2 + \sin^2\theta\,d\,\varphi^2\right), \tag{7}$$

где показатели ν, λ, μ, являются функциями радиальной и временной координат.

Для этих метрик уравнения поля (3) , записанные с помощью тензора Эйнштейна, непосредственными вычислениями приводятся к следующей системе уравнений:

$$\left(2\dot\lambda\dot\mu + \dot\mu^2 - \frac{\varsigma\dot\varphi^2}{2\varphi^2}\right)e^{-2n} + \left(-2\mu'' - 3\mu'^2 + 2\lambda'\mu' - 2\mu'\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\varphi'}{r\varphi} - \frac{\varsigma\varphi'^2}{2\varphi^2}\right)e^{-2\lambda}$$
$$+\left(r\frac{\varphi'}{\varphi} + 1\right)e^{-2\mu} = \frac{1}{\varphi}\left(T_0^0 + \Lambda\right), \tag{8а}$$

$$\left(2\ddot\mu + 3\dot\mu^2 - 2\dot\nu\dot\mu + 2\dot\mu\frac{\dot\varphi}{\varphi} + \frac{\varsigma\dot\varphi^2}{2\varphi^2}\right)e^{-2n} + \left(-\mu'^2 - 2\nu'\mu' - \frac{\varphi'}{r\varphi} + \frac{\varsigma\varphi'^2}{2\varphi^2}\right)e^{-2\lambda}$$
$$+\left(r\frac{\varphi'}{\varphi} + 1\right)e^{-2\mu} = \frac{1}{\varphi}\left(T_1^1 + \Lambda\right). \tag{8б}$$

$$\left(\ddot\lambda + \ddot\mu + \dot\lambda^2 + \dot\mu^2 - \dot\nu\dot\lambda - \dot\nu\dot\mu + \dot\lambda\dot\mu + \dot\lambda\frac{\dot\varphi}{\varphi} + \dot\mu\frac{\dot\varphi}{\varphi} + \varsigma\frac{\dot\varphi^2}{2\varphi^2}\right)e^{-2\nu} +$$
$$\left(-\nu'' - \mu'' - \nu'^2 - \mu'^2 + \nu'\lambda' - \nu'\mu' + \lambda'\mu' + \frac{\varphi'}{r\varphi} - \mu'\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\varsigma\varphi'^2}{2\varphi^2}\right)e^{-2\lambda} =$$
$$= \frac{1}{\varphi}\left(T_2^2 + \Lambda\right), \tag{8в}$$

$$\dot\mu' + \dot\mu\mu' - \nu'\dot\mu - \dot\lambda\mu' - \left(\nu' - \lambda' - 2\mu' + \frac{2}{r}\right)\frac{\dot\varphi}{4\varphi} - \frac{\varphi'}{4\varphi}\left(\dot\lambda - \dot\nu - 2\dot\mu\right) +$$
$$\frac{\varsigma\dot\varphi\varphi'}{2\varphi^2} = \frac{1}{\varphi}T_0^1\,e^{2\lambda}, \tag{8г}$$

$$\left[\varsigma\ddot\varphi + \varsigma\dot\varphi\left(\dot\lambda + 2\dot\mu - \dot\nu\right) + \left(\frac{\varsigma'}{2} - \frac{\varsigma}{2\varphi}\right)\dot\varphi^2 + \varphi\left(\dot\mu^2 + 2\dot\mu\dot\lambda\right)\right]e^{-2\nu} +$$
$$\left[-\varsigma\varphi'' - \varsigma\varphi'(\nu' + 2\mu' - \lambda') - \left(\frac{\varsigma'}{2} - \frac{\varsigma}{2\varphi}\right)\varphi'^2 + \right.$$
$$\left. + \varphi\left(-2\mu'\nu' - \mu'^2 + \frac{1}{r}(\nu' + 2\mu' - \lambda') - \frac{1}{r^2}\right)\right]e^{-2\lambda} + \tag{8д}$$
$$+ r\,\varphi(\nu' + \lambda')\,e^{-2\mu} + \varphi\frac{d\,\Lambda}{d\,\varphi} = 0,$$

в которой последнее уравнение следует из (3б), точка означает производную по времени, а штрих - по радиальной координате. Ниже мы будем предполагать, что выполняются следующие условия:

$$\dot{\mu} = 0 \ , \dot{\varphi} = 0 \ \ , T_0^1 = 0. \tag{9}$$

Из (8г) теперь получим

$$\mu'\dot{\lambda} = \frac{\varphi'}{4\varphi}\left(\dot{\nu} - \dot{\lambda}\right). \tag{10}$$

Рассмотрим сначала случай $\varphi' \neq 0$ (о решениях БСТТ с постоянным скалярным полем см. [13-15]). Тогда из (10) следует, что

$$\nu = h(r)\lambda + \omega(r) \ , \ h(r) = 1 + 4\mu'\varphi \,/\, \varphi' , \tag{11}$$

где $\omega(r)$- функция интегрирования. С учетом условий (9) первые два уравнения системы (8) при $\mu'\neq 0$ можно записать в виде

$$\lambda' = f(r) + a(r)\,e^{2\lambda} + \frac{e^{2\lambda}}{2\mu'\varphi}T_0^0 \ , \nu' = g(r) - a(r)\,e^{2\lambda} - \frac{e^{2\lambda}}{2\mu'\varphi}T_1^1 , \tag{12}$$

где введены следующие обозначения:

$$g(r) = -\frac{1}{2}\mu' + \frac{\varphi'}{\varphi}\left(\frac{\varsigma\varphi'}{4\mu'\varphi} - \frac{1}{2\,r\,\mu'}\right), f(r) = \frac{\mu''}{\mu'} + 2\mu' + \frac{\varphi'}{\varphi} + g(r),$$
$$a(r) = \frac{1}{2\mu'\varphi}\left[\Lambda - (r\,\varphi)'\,e^{-2\mu}\right]. \tag{13}$$

Рассмотрим сначала случай поля в вакууме вне небесного тела, когда T_{ik}=0 (последнее условие (9) выполняется тождественно). Комбинируя (11) и (12), приходим к следующему уравнению:

$$\dot{\lambda}\left[h'(r) + 2(h+1)\,ae^{2\lambda}\right] = 0. \tag{14}$$

Отсюда получаем, что $\dot{\lambda} = 0$ (а, следовательно, и $\dot{\nu} = 0$) или

$$h'(r) = 0 \ , a(h+1) = 0. \tag{15}$$

Ниже нас интересует вопрос о существовании решений с $\dot{\lambda} \neq 0$, поэтому остановимся на случае (15). Из условия постоянства h совместно с (11) и (12) следует, что

$$h = -1 \, , \omega'(r) = f + g \ , \varphi = \varphi_0 e^{-2\mu}, \tag{16}$$

где φ_0 - постоянная интегрирования. Рассмотрим теперь уравнение скалярного поля (8д). Исключив λ' и ν' из этого уравнения согласно (12) (с $T_{ik} = 0$), приходим к следующему алгебраическому уравнению относительно λ :

$$e^{-2\lambda}\left(\frac{\mu''}{\mu'}+\frac{1}{r^2}+2\mu'^2\varphi\frac{d\varsigma}{d\varphi}\right)+2a\left[(2\varsigma-1)\mu'+\frac{1}{r}\right]-$$
$$-re^{-2\mu}\left[\frac{\mu''}{\mu'}+(2\varsigma-1)\mu'+\frac{2}{r}\right]=\frac{d\Lambda}{d\varphi}. \tag{17}$$

Отсюда для нестатических решений с $\dot\lambda \neq 0$ получим

$$\frac{\mu''}{\mu'}+\frac{1}{r}+2r\,\mu'^2\varphi\frac{d\varsigma}{d\varphi}=0,$$
$$2a\left[(2\varsigma-1)\mu'+\frac{1}{r}\right]=re^{-2\mu}\left[\frac{\mu''}{\mu'}+(2\varsigma-1)\mu'+\frac{2}{r}\right]+\frac{d\Lambda}{d\varphi}. \tag{18}$$

И, наконец, введя обозначения

$$F(r)=\left[\frac{\mu''}{r\mu'}-(2\varsigma-1)\mu'^2-\frac{2\mu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right]e^{2\omega},$$
$$G(r)=\left[a\left(\frac{a'}{a}+\frac{\mu''}{\mu'}+4\varsigma\mu'+\frac{4}{r}\right)-\frac{\Lambda}{\varphi}\right]e^{2\omega} \tag{19}$$

уравнение (8в) можно записать в виде

$$\left(e^{2\lambda}\right)^{\cdot\cdot}+e^{-2\lambda}F(r)+G(r)=0. \tag{20}$$

Нетрудно найти первый интеграл этого уравнения:

$$2\dot\lambda^2=\left[C(r)-2F\lambda\right]e^{-4\lambda}-Ge^{-2\lambda}, \tag{21}$$

где $C(r)$ - функция интегрирования. Продифференцируем уравнение (21) по r и воспользуемся соотношением $\dot\lambda'=2a\dot\lambda e^{2\lambda}$, являющимся следствием первого уравнения (12). В результате получим новое уравнение для $\dot\lambda^2$. Исключая из этого уравнения производные λ' согласно (12), с учетом (21) приходим к следующему алгебраическому уравнению относительно λ:

$$-6a\,Ge^{4\lambda}-16\,aF\lambda e^{2\lambda}+\left(8\,ac+2\,aF+G'-2\,fG\right)e^{2\lambda}$$
$$+2\lambda\left(F'-4\,Ff\right)+2\,fF+4\,CF-C'=0. \tag{22}$$

Для решений с $\dot\lambda \neq 0$ отсюда следует, что

$$aG=0,\; aF=0,\; G'=2\,fG-8\,aC,\; F'=4\,fF,\; C'=2\,fF+4\,Cf\,. \tag{23}$$

При $a \neq 0$ отсюда получим $F=G=C=0$ и, поэтому, согласно (21), $\dot\lambda=0$, т.е. в этом случае нестатические решения отсутствуют. Рассмотрим поэтому случай $a=0$. С учетом определения (13) и последнего соотношения (16), а также (23), приходим к следующей системе уравнений относительно функции $\varphi(r)$:

$$\varphi(r\varphi)' = \varphi_0\Lambda(\varphi)\,, \left[\ln\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)\right]' + \frac{r\varphi'\varsigma'}{2\varphi} + \frac{1}{r} = 0,$$

$$\Lambda\left[\left(\varsigma+\frac{1}{2}\right)\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{2}{r}\right] = \Lambda', \quad \left[\ln\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)\right]' - \left(\varsigma-\frac{1}{2}\right)\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{2}{r} = -\frac{\varphi_0}{r\varphi}\frac{d\Lambda}{d\varphi}. \tag{24}$$

Можно показать, что эта система имеет решение только при $\Lambda = 0$ и $\varsigma = -1/2$ и это решение имеет вид

$$\varphi = \frac{\mathrm{const}}{r},\ 2\lambda = -\ln r + T(t), \quad \nu = -\lambda + \omega_0, \tag{25}$$

с постоянной интегрирования ω_0. Функция $T(t)$ определится из уравнения (21), где $C(r)$ в свою очередь можно найти из последнего уравнения (23):

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2F_0}}\, e^{C_1}\, erfi\left(\sqrt{T - C_1}\right),\ F_0 = e^{2\omega_0} \tag{26}$$

Соответствующая этому решению метрика имеет вид

$$ds^2 = F_0\, re^{-T}dt^2 - \frac{e^T}{r}dr^2 - r_1 r\left(d\,\theta^2 + \sin^2\theta\, d\,\varphi^2\right), \tag{27}$$

где r_1 - постоянная интегрирования с размерностью длины. Таким образом, в вакуумном случае в БСТТ можно сформулировать следующий аналог теоремы Бирктофа в ОТО.

Если (*i*) в системе координат (6) искривленная метрика диагональна (см. (7)) с $\mu = \mu(r)\,(\mu' \neq 0)$, (*ii*) гравитационный скаляр не зависит от времени: $\dot\varphi = 0$, то сферически-симметричное гравитационное поле в наиболее общем варианте БСТТ является статическим при $\varsigma \neq -1/2$. Для $\varsigma = -1/2$ имеется нестатическое решение (25)-(27).

Рассмотрим теперь сферически-симметричное гравитационное поле в области, занятой материей. Прежде всего заметим, что уравнение непрерывности $T^k_{i;k} = 0$ в случае метрики (6) и ограничений (9) запишется в виде системы

$$\begin{aligned} &\dot T^0_0 + \left(T^0_0 - T^1_1\right)\dot\lambda = 0, \\ &T'^1_1 + \nu'\left(T^1_1 - T^0_0\right) + 2\mu'\left(T^1_1 - T^2_2\right) = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Ниже мы будем полагать, что уравнение состояния имеет вид

$$T^1_1 = aT^0_0\,, \tag{29}$$

для которого решение первого уравнения (28) есть

$$T_0^0 = s(r)\, e^{(\alpha-1)\lambda} \tag{30}$$

с функцией интегрирования $s(r)$. Из уравнений (11), (12) теперь получим

$$hf - g + \omega' + h'\lambda + a(h+1)\, e^{2\lambda} + b(h+\alpha)\, e^{(\alpha+1)\lambda} = 0\,,\; b = \frac{s}{2\mu'\varphi}. \tag{31}$$

Необходимыми условиями наличия у этого уравнения решений с $\dot{\lambda} \neq 0$ являются

$$hf - g + \omega' = 0,\; h' = 0,\; a(h+1) = 0,\; b(h+\alpha) = 0\,. \tag{32}$$

Так как $b \neq 0$, то отсюда следует, что h=-a. При a=1 рассмотрение аналогично вышеприведенному вакуумному случаю с новой космологической функцией $\Lambda + T_0^0$. Поэтому здесь будем полагать $a \neq 1$, когда согласно (32) a=0. Подстановка производных (12) в уравнение (8д) с учетом (29) и (30) приводит к следующему алгебраическому уравнению для λ:

$$a_1(r) + a_2(r)\, e^{-2\lambda} + a_3(r)\, e^{(\alpha-1)\lambda} + r\,\varphi(1-\alpha)\, b e^{(\alpha+1)\lambda} = 0. \tag{33}$$

Поскольку $b \neq 0$, то при $a \neq \pm 1$ это уравнение не имеет решений с $\dot{\lambda} \neq 0$. Для $a = -1$ имеем $h = 1$ и согласно (11) получим $\mu'=0$. Решения с $\mu'=0$ мы рассматривать не будем, поскольку они не имеют предела $e^{2\mu} \to r^2$ вдали от гравитирующей системы.

Таким образом, сформулированная выше теорема остается в силе и при наличии негравитационной материи, тензор энергии-импульса которой удовлетворяет условиям (iii) $T_0^1 = 0$, (iiii) $T_1^1 = \alpha\, T_0^0$.

В качестве примера негравитационной материи рассмотрим электромагнитное поле. Антисимметричный тензор поля F_{ik} определяется из уравнений Максвелла. В сферически-симметричном случае отличны от нуля компоненты F_{01} и F_{23} [4,7]:

$$F_{01} = q_1\, e^{-2\mu},\; F_{23} = q_2 \sin\theta,$$

где q_i - постоянные интегрирования. Соответствующий тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_i^k = \left(q_1^2 + q_2^2\right) e^{-4\mu}\, \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

и удовлетворяет приведенным выше условиям теоремы Биркгофа.

4. В предыдущем разделе мы доказали аналог теоремы Биркгофа для класса решений БСТТ с неоднородным скалярным полем ($\varphi' \neq 0$). В работах [13-15] показано, что в теории имеются также решения с постоянным гравитационным скаляром. Рассмотрим условия справедливости теоремы Биркгофа для этих решений. Итак,

пусть в (10) $\varphi' = 0$ (т.е. вследствие (9) φ=const), а, следовательно, и $\dot{l} = 0$. Совместно с (28) теперь получаем, что $T_0^0 = 0$. При $\varphi = 1/8\pi G$ уравнения (8а)-(8г) совпадают с уравнениями Эйнштейна с космологической постоянной. Из этих уравнений функция $\mu(r)$ не определяется, что соответствует свободе выбора радиальной координаты в ОТО. В БСТТ координатная система фиксирована выбором фоновой метрики (в данном случае (6)). Функция $\mu(r)$ здесь определяется из уравнения (8д) с φ=const:

$$-\mu'^2 - 2\mu'\nu' + (\nu' + 2\mu' - \lambda')/r - 1/r^2 + r(\nu' + \lambda')e^{2(\lambda-\mu)} + \Lambda' e^{2\lambda} = 0,$$

где функции ν и λ выражаются через $\mu(r)$ из уравнений Эйнштейна. Таким образом, для решений БСТТ с φ=const теорема Биркгофа справедлива при тех же условиях, что и в ОТО. При анализе решений с постоянным φ удобно исходить из уравнения (5), которое в данном случае примет вид (см. также [15])

$$\left(\sqrt{-g}\,\overline{W}^n\right)_{,n} = -\sqrt{-g}\,(T + 4\Lambda - 2\varphi\Lambda')/\varphi. \tag{34}$$

Рассмотрим решения этого уравнения для случая нулевой космологической постоянной и в области вне небесного тела. Согласно теореме Биркгофа в ОТО метрика в этой области является статической и поэтому отлична от нуля только компонента

$$\overline{W}^1 = 2e^{-2\lambda}\left(\nu' + 2\mu' - \frac{1}{r}\right) - 2re^{-2\mu}. \tag{35}$$

Соответствующее решение уравнений Эйнштейна есть решение Шварцшильда и в координатной системе с метрикой (7) имеет вид

$$e^{2\nu} = 1 - R_g e^{-\mu},\ e^{2\lambda} = \mu'^2 e^{2(\mu-\nu)}, \tag{36}$$

где R_g - гравитационный радиус центрального тела. Введя новую функцию

$$y(r) = e^{\mu}/R_g \equiv R/R_g \tag{37}$$

и подставив (35) в (34), с учетом (36), после однократного интегрирования во внешней области получим уравнение

$$ry' = y + C_1 - 1 \pm \sqrt{(C_1 - 1)^2 + 2C_1 y}, \tag{38}$$

где C_1 - постоянная интегрирования, определяемая внутренним решением задачи.Еще одно интегрирование приводит к результату

$$r = r_0\left|x - 1 \pm C_1\right|^{1\mp C_1} \cdot \left|x + 1 \pm C_1\right|^{1\pm C_1},\ x = \sqrt{2C_1 y + (C_1 - 1)^2}. \tag{39}$$

Постоянная интегрирования r_0 определяется из условия согласованности метрик (6) и (7) на бесконечности : $\lim\limits_{r\to\infty} R(r) = r$ и равна

$$r_0 = R_g / 2C_1. \tag{40}$$

Из того же условия следует, что $C_1 \geq 0$. В координатной системе (R,θ,φ)метрика g_{ik} имеет обычный шварцшильдовский вид, а фоновая метрика -

$$\gamma_{ik} = \mathrm{diag}\left(1, -(dr/dR)^2, -r^2, -r^2 \sin^2\theta\right), \tag{41}$$

где функция $r = r(R)$ определяется из (29). Заметим, что при $C_1=0$ для решений с верхним знаком получаем $r=R$.

Для метрик (6), (7) в случае статических конфигураций

$$\overline{W}^0 = -2e^{-2\nu}\left(\dot{\lambda} + 2\dot{\mu}\right) = 0.$$

Отсюда совместно с (34) (при $\Lambda(\varphi) = 0$) получим

$$\overline{W}^1 = -\frac{1}{\sqrt{-g\varphi}} \int_0^r \sqrt{-g}\, T dr. \tag{42}$$

Здесь предположено, что $\overline{W}^1(0) = 0$ (о решениях с постоянным скалярным полем, не удовлетворяющих этому условию, см. [16]).

В области вне небесного тела интеграл в правой части является постоянным и отсюда с учетом (35) и (38) получим следующее выражение для постоянной C_1:

$$C_1 = \frac{1}{2\varphi R_g} \int^{r_1} T e^{\nu+\lambda+2\mu} dr - \frac{1}{2} = \frac{1}{\varphi R_g} \int_0^{r_1} r T^\alpha_\alpha e^{\nu+\lambda+2\mu} dr, \ \alpha = 1, 2, 3, \tag{43}$$

где r_1 - координатный радиус тела, и была использована формула Толмена для R_g. Так как, вообще говоря, $T^a_a < 0$, то $C_1<0$, что противоречит условию согласованности метрик (6), (7) на бесконечности.

Таким образом, отсюда следует, что для статических конфигураций с $W^1(0) = 0$ не существуют решения БСТТ с постоянным скалярным полем и с метриками (6) и (7), так как внешнее решение (39) не может быть сшито с внутренним решением (см. также [15]).

Авторы признательны Л.Ш.Григоряну за обсуждение результатов работы и ценные замечания.

Работа выполнена в рамках гранта 96-855 Министерства науки и высшего образования Республики Армения.

Ереванский государственный университет, Армения.

ON BIRKHOFF'S THEOREM IN BSTT

P.F.KAZARIAN, A.A.SAHARIAN

It is shown, that in the most general variant of the bimetric scalar-tensor theory of gravitation the spherically-symmetric vacuum gravitational field is static, if the gravitational scalar does not depend on time. This result is generalized on some cases of presence of a source, including an electromagnetic field. Both branches of the solutions with a variable and constant scalar field are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С.Вейнберг,* Гравитация и космология, Мир, М., 1975.
2. *A.Das,* Progr. Theor. Phys., **24**, 915, 1960.
3. *К.А.Бронников, М.Ковальчук, Н.В.Павлов*, В кн. : Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 7, М., Атомиздат, 1976, стр.119.
4. *К.А.Бронников, М.Ковальчук,* В кн. : Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 10, М., Атомиздат, 1979, стр.12.
5. *K.D.Krori, D.Nandy,* J. Phys. A, **10**, 993, 1977.
6. *D.R.K.Reddy,* J. Phys. A, **6**, 1867, 1973; **10**,185, 1977.
7. *R.Venkateswarlu, D.R.K.Reddy,* Astrophys. Spase Sci., **159**, 173, 1989.
8. *Г.Г.Арутюнян, В.В.Папоян, В.Н.Первушин, М.Б.Шефтель*, Астрофизика., **37**, 527, 1994.
9. *Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян,* Астрофизика, **31**, 359, 1989.
10. *L.Sh.Grigorian, A.A.Saharian,* Astrophys. Spase Sci., **167**, 271, 1990.
11. *А.А.Саарян, Л.Ш.Григорян,* Астрофизика, **32**, 491, 1990; **33**, 107, 1990.
12. *К.Уилл*, Теория и эксперимент в гравитационной физике, Энергоатомиздат, М, 1985.
13. *А.А.Саарян, Л.Ш.Григорян*, Тр. IV семинара "Гравитационная энергия и гравитационные волны " , Дубна, 1992, с.193.
14. *L.Sh.Grigorian, A.A.Saharian,* Astrophys. Spase Sci., **207**, 1, 1993.
15. *А.А.Саарян,* Астрофизика, **36**, 245, 1993.
16. *Л.Ш.Григорян, П.Ф.Казарян, Г.Ф.Хачатрян,* готовится к опубликованию.