

ЗАКОН ПОДОБИЯ ПРИ СПЕКТРАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ВРЕМЕННОГО РЯДА. I

В.Ю.ТЕРЕБИЖ

Поступила 9 сентября 1996

На примере гауссова стационарного процесса изучается обратная задача нахождения естественной состоятельной оценки спектральной плотности. В первой части работы приводятся исходные соотношения и кратко описаны основные результаты.

1. *Введение.* Почти столетие тому назад Артур Шустер [1] ввел понятие периодограммы $P_N(\nu)$ в качестве оценки спектральной плотности случайного временного ряда, содержащего N отсчетов. Пусть $\xi(t)$ - стационарный, непрерывный случайный процесс со спектральной плотностью $g(\nu)$, а $y = [y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]'$ - совокупность его наблюдаемых значений, разделенных одним и тем же интервалом времени δt (штрих означает операцию транспонирования матрицы, мы везде используем векторы-столбцы). Тогда *периодограмма Шустера* представляется в виде:

$$P_N(\nu) = \frac{\delta t}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-i \cdot 2\pi\nu\delta t k) \cdot y_k \right|^2, \quad (1.1)$$

где $i = \sqrt{-1}$. Будучи функцией случайной реализации y , периодограмма $P_N(\nu)$ сама представляет собой случайную величину для каждого значения частоты ν .

Уже сам Шустер доказал, что при больших значениях $T \equiv N \cdot \delta t$ среднее значение периодограммы стремится к спектральной плотности $g(\nu)$ порождающего ряд процесса, т.е.

$$\langle P_N(\nu) \rangle = g(\nu) + O(N^{-1}), \quad N \gg 1, \quad (1.2)$$

где, как обычно, $O(\alpha)$ означает член порядка α и предполагается, что $\nu \neq 0$ или значениям, кратным частоте Найквиста $\nu_C \equiv (2\delta t)^{-1}$. На статистическом языке этот результат означает, что $P_N(\nu)$ является *асимптотически несмещенной оценкой* спектральной плотности $g(\nu)$. Поскольку на практике именно это требование представляется весьма желательным, казалось бы, нет оснований искать другие оценки $g(\nu)$. Однако Шустер обнаружил также, что дисперсия случайной величины $P_N(\nu_j)$ в точках спектра,

разделенных малым интервалом $\delta v = 1/T$, не убывает с ростом N :

$$\text{Var}[P_N(v_j)] = g^2(v_j) + O(N^{-1}), \quad v_j = j/T, \quad (1.3)$$

где j - целые числа и v_j предполагается не совпадающим с концами интервала Найквиста. Таким образом, точность оценивания спектральной плотности с помощью $P_N(v)$ не возрастает с увеличением объема данных наблюдений - как говорят, статистика $P_N(v)$ не является *состоятельной*. Наконец, Шустер показал, что $P_N(v)$ асимптотически подчиняется экспоненциальному распределению со средним значением, совпадающим с

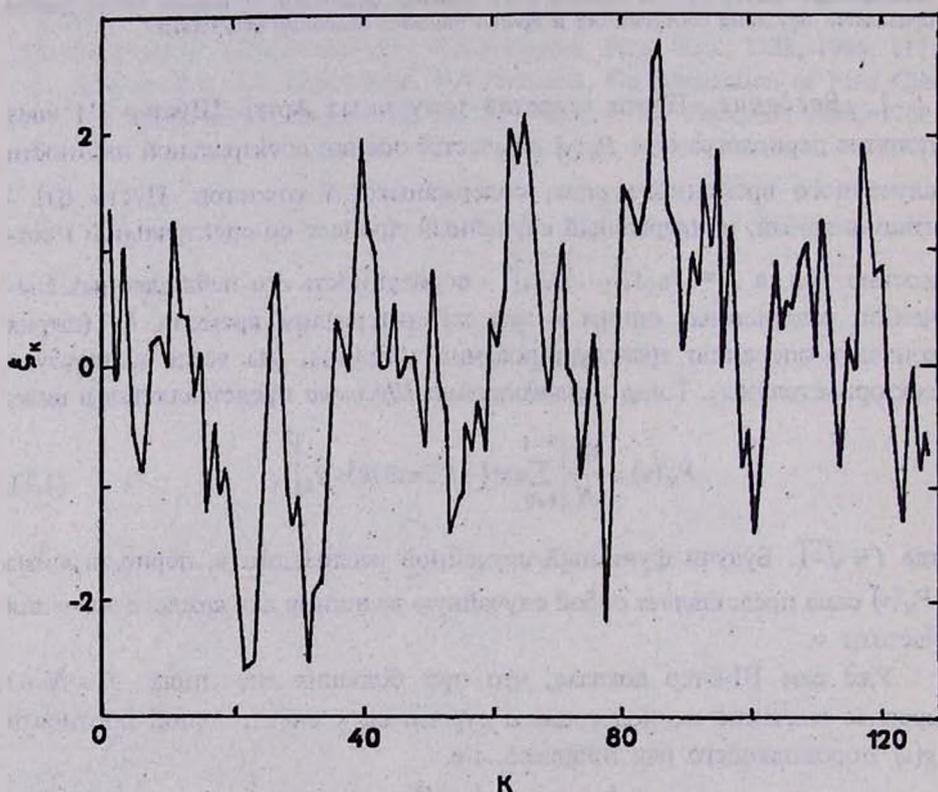


Рис. 1.1 Реализация случайного процесса AR-1 с дисперсией $\sigma^2 = 1$ и коэффициентом корреляции между соседними отсчетами $\rho = 0.7$. Полное количество отсчетов временного ряда $N = 128$.

$g(v)$, а значения периодограммы в точках спектра, разделенных интервалом, кратным δv , становятся при больших N некоррелированными между собой.

Периодограмма Шустера является *векторной* оценкой в том смысле, что оцениванию подлежат неизвестные значения спектральной плотности

во всем интервале Найквиста. Если бы, например, $g(\nu)$ была *a priori* задана везде, кроме одной точки спектра, мы имели бы дело со *скалярной* оценкой плотности. Естественно ожидать, что точность последней будет выше; мы остановимся на этом в дальнейшем при обсуждении результатов численного моделирования. Шаг по частоте в (1.1) выбирается равным $\delta\nu = 1/T$ по той причине, что соответствующие отсчеты $P_N(\nu)$ не коррелируют между собой и тем самым дают дополнительную информацию о спектре.

На рис. 1.1 в качестве примера приведена реализация случайного процесса авторегрессии первого порядка (процесс AR-1, см. далее §3)

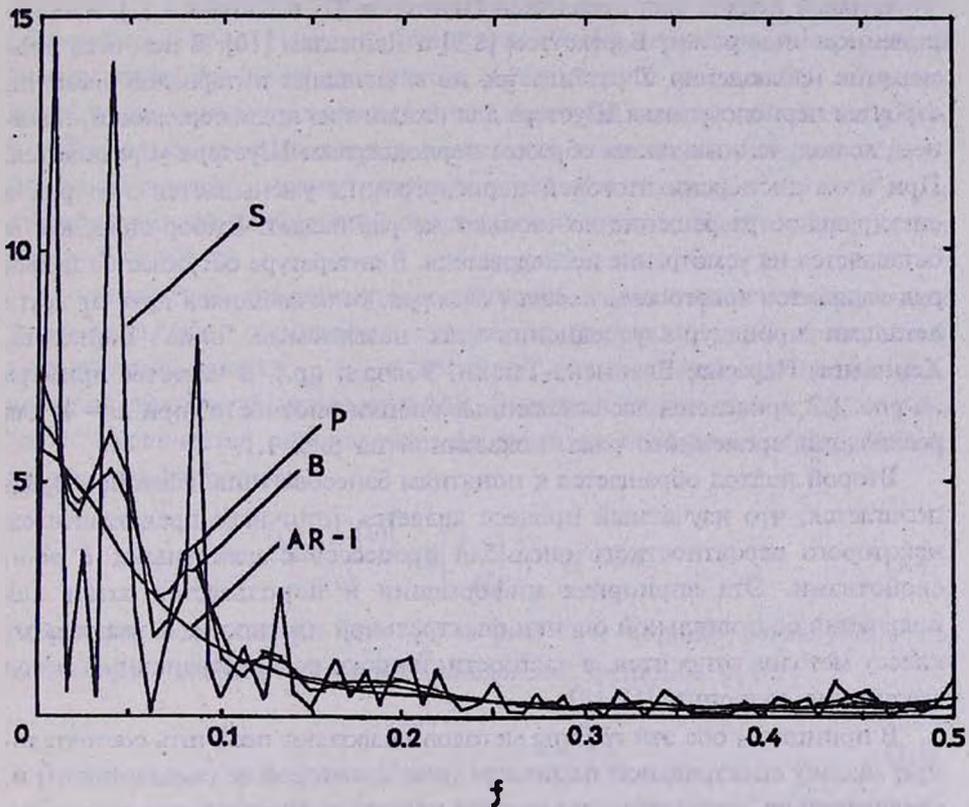


Рис. 1.2 Спектральная плотность процесса AR-1 при $\sigma^2 = 1$, $\rho = 0.7$. Показаны также периодограмма Шустера (S), оценки Барллетта (B) и Парзена (P), вычисленные по приведенной на рис. 1 реализации.

при $N = 128$. Спектральная плотность исходного процесса $g(\nu)$ показана на рис. 1.2; там же приведена вычисленная по реализации периодограмма Шустера. Поскольку ширина отдельных пиков периодограммы $\delta\nu \approx 1/T$, по мере роста объема выборки они становятся лишь более узкими, а

распределение пиков по высоте остается тем же. То обстоятельство, что мы сталкиваемся здесь с весьма пологой - экспоненциальной - плотностью распределения, приводит к типичным выбросам $P_N(\nu)$ значительной амплитуды, не уменьшающимся при $N \rightarrow \infty$, а дополнительная некоррелированность $P_N(\nu_j)$ в близких точках спектра обуславливает "рваный" вид периодограммы Шустера, породивший многие "открытия" периодичности исходных процессов.

Итак, имеются веские аргументы в пользу поисков оценки спектральной плотности, точность которой улучшалась бы по мере роста объема выборки. Известно много таких оценок (см. [2-6]); они основаны на одном из следующих двух подходов.

Первый подход был предложен Шустером [1] и Слуцким [7], а в современном виде развит Бартлеттом [8,9] и Даниэлем [10]. В нем весь промежуток наблюдения T разбивается на m меньших интервалов времени, строятся периодограммы Шустера для каждого из подинтервалов и, наконец, m полученных таким образом периодограмм Шустера усредняются. При этом дисперсия итоговой периодограммы уменьшается в m раз, а спектральное разрешение во столько же раз падает. Выбор значения m оставляется на усмотрение исследователя. В литературе обсуждается целый ряд вариантов такого *сглаживания спектра*, отличающихся друг от друга деталями процедуры усреднения (так называемые "окна" Бартлетта, Хеннинга, Парзена, Блэкмена-Тьюки, Уэлча и пр.). В качестве примера на рис. 1.2 приведены две сглаженные оценки плотности (при $m = 4$) для реализации временного ряда, показанной на рис. 1.1.

Второй подход обращается к понятиям байесова типа. Именно, предполагается, что изучаемый процесс является типичным представителем некоторого вероятностного ансамбля процессов с известными *a priori* свойствами. Эта априорная информация и используется затем для получения состоятельной оценки спектральной плотности. К указанному классу методов относится, в частности, широко распространенный метод максимума энтропии [11-13].

В принципе, обе эти группы методов позволяют получить состоятельную оценку спектральной плотности (при некоторой ее смещенности) и, следовательно, удовлетворяют нуждам практики. Вместе с тем, использующиеся в них произвольные предположения *ad hoc* типа выбора процедуры усреднения, количества временных подинтервалов, характеристик ансамбля и пр. нельзя признать эстетически приемлемыми. Даже если исходить из чисто утилитарной точки зрения, то и тогда указанные черты проявляют себя недопустимым образом. Фактически при анализе данных аккуратный исследователь должен применить несколько различных методик, и затем сохранить те результаты, которые остаются неизменными при "разумной" смене способа анализа.

Все эти соображения заставляют искать объективный подход к проблеме спектрального оценивания, по сути дела, искать строгое решение обратной задачи оценивания спектральной плотности $g(\nu)$ по данным наблюдений $y = [y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]'$ и реально имеющейся априорной информации об изучаемом процессе. Соответствующее рассмотрение стационарного гауссова процесса, основанное на т.н. *бккамовском* подходе к обратным задачам математической физики [14,15], и составляет предмет данного исследования.

Формальной основой анализа служит найденное ниже точное представление матрицы Фишера I_r , коэффициентов ковариации $\{r_n\}$ гауссова временного ряда при любых значениях N . Это позволяет найти матрицу Фишера I_g и для спектральной плотности $g(\nu)$, связанной с $\{r_n\}$ преобразованием Фурье. Наконец, ввиду известного *неравенства информации* (неравенства Рао-Крамера) знание I_g позволяет установить нижнюю границу дисперсии произвольной несмещенной оценки плотности $g^*(\nu)$.

Поскольку приводимые далее выкладки технически достаточно сложны, укажем здесь основной результат в асимптотической области $N \gg 1$, представляющей наибольший практический интерес (фактически, достаточно $N > 10$).

Оказывается, относительная точность несмещенного оценивания плотности, т.е. отношение стандартного отклонения наилучшей несмещенной оценки $g^*(\nu)$ к истинной спектральной плотности $g(\nu)$, является некоторой универсальной функцией параметра $w = (F-1)/N$, где F - количество оцениваемых значений плотности в спектре вплоть до частоты Найквиста:

$$\frac{\sigma_{\min}[g^*(\nu)]}{g(\nu)} \approx \theta\left(\frac{F-1}{N}\right), \quad N \gg 1. \quad (1.4)$$

Результаты вычислений (см. §9 и рис. 9.4) хорошо согласуются со следующим аналитическим представлением функции $\theta(w)$:

$$\theta(w) \approx \frac{Cw^{1/2}}{(1-w)^\gamma}, \quad 0 < w < 1, \quad (1.5)$$

где параметры C и γ слегка меняются в зависимости от вида исходной спектральной плотности (для белого шума $C \approx 1.88$, $\gamma \approx 0.30$). Закон подобия (1.4) показывает, в частности, что при фиксированном значении w точность всякой несмещенной оценки не может быть ниже некоторого *не зависящего от длины ряда* значения, т.е. в этих условиях оценка будет статистически несостоятельной. Если мы хотим добиться более высокой точности оценивания, следует выбрать менее детальную модель спектральной плотности, например, ограничиться количеством оцениваемых отсче-

тов $g(v)$ порядка $F \approx N^{1/2}$. При этом теория дает *естественную состоятельную* оценку этих отсчетов.

Для периодограммы Шустера параметр $w \approx 1/2$, и если бы $P_N(v)$ была строго несмещенной оценкой плотности, то для нее из (1.4) и (1.5) следовала нижняя граница относительной точности оценивания вида $\sigma[P_N(v)]/g(v) \approx 1.6$. Уменьшение дисперсии $P_N(v)$ обусловлено ее смещенностью; как показывают соотношения (1.2) и (1.3), при этом достигается относительная точность $\sigma[P_N(v)]/g(v) \approx 1.0$.

Таким образом, несостоятельность оценок типа периодограммы Шустера обусловлена стремлением выяснить чрезмерно большую информацию относительно искомого объекта - спектральной плотности $g(v)$. Мы обязаны при анализе ограничиваться информацией, реально содержащейся в данных. Если при этом модель спектральной плотности выбирается до начала наблюдений, то для достижения заданной точности оценивания следует накопить временной ряд вполне определенной минимальной длины. Если же ставится задача интерпретировать уже имеющиеся данные объемом в N отсчетов, то следует умеренно задавать модель спектральной плотности с тем, чтобы точность оценок была достаточно высока. Количественное описание требуемого согласования модели с данными и дает приведенное выше соотношение подобия.

Уже давно высказывалось мнение, что природа несостоятельности периодограммы Шустера связана с тем же "гистограммным эффектом", который проявляется при восстановлении плотности распределения какой-либо случайной величины по экспериментальным данным. Как мы видим, это мнение было вполне обоснованным, причем закон подобия дает конкретные рекомендации по выбору разумной теоретической модели.

Имея в виду дальнейшее обобщение результатов на случай несравномерных временных рядов, мы приводим сначала некоторые известные положения из теории стационарных случайных процессов с непрерывным параметром, которые лежат в основе дискретных моделей. С этой же целью на первом этапе анализа явным образом сохраняется обозначение временного шага δt .

2. *Дискретизация стационарного процесса.* Обозначим посредством $\xi(t)$ действительный, стационарный в широком смысле процесс на бесконечном интервале времени. Процесс предполагается центрированным, так что его среднее значение $\langle \xi(t) \rangle = 0$, а ковариационная функция

$$r(\tau) = r(-\tau) = \langle \xi(t) \cdot \xi(t + \tau) \rangle, \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (2.1)$$

Согласно теореме Винера-Хинчина, ковариационная функция $r(\tau)$ и спектральная плотность $g(v)$ стационарного процесса связаны между собой

проброзованием Фурье:

$$r(\tau) = \int \exp(i 2\pi\nu\tau) g(\nu) d\nu, \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (2.2)$$

$$g(\nu) = \int \exp(-i 2\pi\nu\tau) r(\tau) d\tau, \quad -\infty < \nu < \infty. \quad (2.3)$$

Здесь и ниже бесконечные пределы интегрирования не указываются. Спектральная плотность $g(\nu)$ - неотрицательная симметричная функция частоты ν , а интеграл от нее по всему спектральному диапазону равен дисперсии σ^2 процесса $\xi(t)$:

$$\sigma^2 = \langle \xi^2(t) \rangle = r(0) = \int g(\nu) d\nu. \quad (2.4)$$

Это соотношение позволяет интерпретировать $g(\nu)d\nu$ как дисперсию тех гармонических компонент процесса $\xi(t)$, частоты которых заключены в узком интервале $\delta\nu$ вблизи данного значения ν .

На практике $\xi(t)$ всегда представляет собой частотно-ограниченный процесс, а потому примем, что

$$g(\nu) = \begin{cases} g_0(\nu), & |\nu| \leq \nu_c, \\ 0, & |\nu| > \nu_c, \end{cases} \quad (2.5)$$

где частоту $\nu_c > 0$ будем называть далее *критической частотой*. Для частотно-ограниченных процессов известная *теорема отсчетов* Ла Валле Пуссена-Котельникова-Шеннона (см. [16-18]) утверждает, что соответствующая ковариационная функция

$$r(\tau) = \int_{-\nu_c}^{\nu_c} \exp(i 2\pi\nu\tau) g_0(\nu) d\nu \quad (2.6)$$

может быть представлена в виде ряда

$$r(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\tau/\delta t - n) \cdot r_n, \quad (2.7)$$

где вспомогательная функция $\text{sinc}(\cdot)$ определена соотношением

$$\text{sinc}(x) \equiv \sin(\pi x)/(\pi x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.8)$$

интервал времени, отвечающий критической частоте, равен

$$\delta t \equiv (2\nu_c)^{-1}, \quad (2.9)$$

и $r_n = r_{-n} = r(n \cdot \delta t)$ - значения ковариационной функции на дискретной временной сетке:

$$r_n = \langle \xi_k \xi_{k+n} \rangle, \quad \xi_k \equiv \xi(k \cdot \delta t), \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (2.10)$$

Полагая в (2.6) время запаздывания $\tau = n \cdot \delta t$, мы получаем точное соотношение

$$r_n = \int_{-v_c}^{v_c} \exp(i \cdot 2\pi v n \delta t) g_0(v) dv, \quad (2.11)$$

а его обращение дает следующее важное представление спектральной плотности:

$$g_0(v) = \delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-i \cdot 2\pi v n \delta t) r_n, \quad -v_c \leq v \leq v_c. \quad (2.12)$$

Формулы (2.7) и (2.12) показывают, что в случае спектрально-ограниченного процесса для описания непрерывных функций $r(\tau)$ и $g(v)$ достаточно задать лишь дискретную совокупность коэффициентов ковариации $\{r_n\}$, $n = 0, 1, \dots$

Заметим, что теорема Рэлея в данном случае сводится к равенству:

$$\int r^2(\tau) d\tau = \int_{-v_c}^{v_c} g_0^2(v) dv. \quad (2.13)$$

Подставляя сюда $g_0(v)$ из (2.12), находим:

$$\int r^2(\tau) d\tau = \delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n^2. \quad (2.14)$$

Простой пример приведенным выше соотношениям доставляет часто применяющийся на практике случай *частотно-ограниченного белого шума*. При этом реальная плотность заменяется некоторым постоянным значением:

$$g_0(v) = g_0 = \text{const}, \quad -v_c \leq v \leq v_c. \quad (2.15)$$

Для белого шума отличен от нуля только первый коэффициент ковариации $r_0 = \sigma^2 = 2v_c g_0 = g_0 / \delta t$; выражение для ковариационной функции при произвольном запаздывании следует из (2.11):

$$r(\tau) = r_0 \cdot \text{sinc}(\tau / \delta t). \quad (2.16)$$

В общем случае случайный процесс $\xi(t)$ характеризуется протяженной ковариационной функцией $r(\tau)$. Это означает, в частности, что отдельные его значения $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}$, разделенные интервалом времени δt , представляют собой зависимые случайные величины, попарные коэффициенты ковариации между которыми равны r_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$. Дальнейшее обсуждение упрощается, если мы рассмотрим *гауссов* случайный процесс. При этом плотность распределения многомерной случайной величины $\xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}]'$ равна

$$\varphi(y|r) = (2\pi)^{-N/2} (\det R)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} y' \cdot R^{-1} \cdot y\right), \quad (2.17)$$

где введены вектор $r = [r_0, r_1, \dots, r_{N-1}]'$ и матрица

$$R = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \dots & r_{N-1} \\ r_1 & r_0 & \dots & r_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N-1} & \dots & r_0 & \dots \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Ковариационная матрица R относится к классу симметрических *тёплицевых* матриц (их называют *матрицами Лорана* [19]). Будем считать R положительно определенной матрицей.

Как известно, гауссовы процессы охватывают весьма значительный круг приложений, в том числе и в астрономии, так что полученные для них результаты имеют достаточно общий характер.

Крымская лаборатория Гос. астрономического
ин-та им. П.К.Штернберга, Россия

SIMILARITY LAW IN A TIME SERIES SPECTRAL ESTIMATION. I.

V.Yu.TEREBIZH

The searching of the natural consistent estimate of spectral density is studied on the example of Gaussian stationary process. The estimation is considered as an inverse problem of mathematical physics. Basic relations and a brief summary of main results are given in the first part.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.Schuster, Terr. Magn., 3, 13, 1898.
2. G.M.Jenkins, D.G.Watts, Spectral Analysis and Its Applications, Holden Day, San Francisco, 1968; Г.Дженкинс, Д.Ваттс, Спектральный анализ и его приложения, Мир, М., 1971, 1972.
3. T.W.Anderson, The Statistical Analysis of Time Series, Wiley, New York, 1971; Т.Андерсон, Статистический анализ временных рядов, Мир, М., 1976.

4. *D.R.Brillinger*, Time Series. Data Analysis and Theory. Holt, Rinchart and Winston, New York, 1975; *Д.Бриллинджер*, Временные ряды. Обработка данных и теория, Мир, М., 1980.
5. *S.L.Marple, Jr.*, Digital Spectral Analysis With Applications, Prentice- Hall, Englewood Cliffs, 1987; *С.Л.Марпл- мл.*, Цифровой спектральный анализ и его приложения, Мир, М., 1990.
6. *В.Ю.Теребиж*, Анализ временных рядов в астрофизике, Наука, М., 1992.
7. *Е.Е.Слуцкий*, Вопросы конъюнктуры, 3, No. 1, 1927; *E.E.Slutsky*, *Econometrica*, 5, 105, 1937.
8. *M.S.Bartlett*, *J. Roy. Statist. Soc., Suppl.* 8, 27, 85, 1946.
9. *M.S.Bartlett*, *Biometrika*, 37, 1, 1950.
10. *P.J.Daniell*, *J. Roy. Statist. Soc., Suppl.* 8, 27, 1946.
11. *E.T.Jaynes*, *Phys. Rev.*, 106, 620, 1957.
12. *E.T.Jaynes*, *Phys. Rev.*, 108, 171, 1957.
13. *J.P.Burg*, Paper presented at the 37-th Ann. Int. Meeting, Oklahoma City, 1967.
14. *В.Ю.Теребиж*, Успехи физ. наук, 165, 143, 1995.
15. *V.Yu.Terebizh*, *Int. Journ. of Imaging Systems and Technology*, 6, 358, 1995.
16. *В.А.Котельников*, Материалы к I Вс. съезду по вопр. техн. реконстр. дела связи и развития слаботочной пром., М., 1933.
17. *C.Shannon*, *C.Bell Syst. Techn. J.*, 27, 379, 623, 1948.
18. *А.Н.Колмогоров*, *В.М.Тихомиров*, Успехи мат. наук, 14 (2), 3, 1959.
19. *M.G.Kendall*, *A.Stuart*, The Advanced Theory of Statistics, Vols. 2, 3, Griffin, London, 1969; *М.Кендалл*, *А.Стьюарт*, Статистические выводы и связи, Наука, М., 1973; Многомерный статистический анализ и временные ряды, Наука, М., 1976.