

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОМПАНЕЙЦА

Д.И. НАГИРНЕР, В.М. ЛОСКУТОВ

Поступила 21 октября 1996

Принята к печати 5 ноября 1996

Вычислена функция Грина линейного уравнения Компанейца, выражающаяся через функции Уинтгера $W_{2,\mu}(z)$ или функции Макдональда $K_{\mu}(z)$ с чисто мнимым индексом. Предложен метод расчета этих функций. Для больших значений μ асимптотическое решение Лангера уточнено во втором приближении Черри. Вместо с разложением в ряды при небольших μ и асимптотикой при больших значениях аргумента, указанное приближение позволяет вычислять функцию Грина с точностью до пяти значащих цифр. Решения уравнения Компанейца будут использованы для оценки точности численных методов и для расчета эволюции спектра фотоонного газа при комптоновском рассеянии, а также средних частот и дисперсии частот фотонов при различных начальных спектрах.

1. *Введение.* Уравнение, носящее имя А.С. Компанейца, было получено им в 1949г. (опубликовано в 1956 [1]). Это уравнение описывает временную эволюцию однородного и изотропного поля излучения в бесконечном однородном и изотропном пространстве, заполненном равновесным нерелятивистским и невырожденным электронным газом. Оно применялось для решения многих астрофизических задач (см. обзоры [2-5]), в частности, для изучения эволюции спектров реликтового излучения [6,7] и вспышкающих компактных рентгеновских источников [8].

Уравнение Компанейца учитывает вынужденное рассеяние и поэтому нелинейно. Для нелинейного уравнения, по всей вероятности, не может быть найдено явного решения, в то время как в линейном приближении, справедливом, когда поле излучения не очень сильно, явное решение уравнения известно. Линейное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n \right) \right] \quad (1)$$

Здесь через $x = h\nu/k_B T$ обозначена безразмерная частота (h и k_B - постоянные Планка и Больцмана, ν - обычная частота, T - температура электронного газа). Искомая функция $n(x,t)$ - среднее число заполнения фотонных состояний - зависит от частоты x и времени t . К уравнению следует добавить начальное условие, задав распределение $n(x,0)$. Хотя уравнение (1) справедливо при условии $n \ll 1$, в силу его однородности относительно искомой функции n при решении уравнения можно в нее ввести произвольный численный множитель и оперировать с величинами порядка единицы.

Из уравнения (1), имеющего дивергентную форму, вытекает закон сохранения числа фотонов, а именно, прямым интегрированием можно убедиться, что

$$\int_0^{\infty} x^2 n(x, t) dx = \int_0^{\infty} x^2 n(x, 0) dx. \quad (2)$$

Функция Грина уравнения (1), знание которой позволяет найти решение при любом начальном распределении $n(x, 0)$, была найдена еще самим А.С. Компанейцем методом разделения переменных и представлена в виде разложения по собственным функциям стоящего справа в (1) оператора, спектр которого включает как дискретные, так и непрерывные собственные значения. Соответствующие собственные функции в работе [1] были выписаны со ссылкой на работы других авторов. Их получение нетривиально. Они довольно сложны и до сих пор не вычислялись. Между тем расчет решения этого уравнения представляет интерес как сам по себе, так и для оценки точности численных методов решения кинетических уравнений, описывающих взаимодействие полей излучения с электронами в более сложных случаях.

В настоящей заметке мы получим выражение для функции Грина линейного уравнения Компанейца методом преобразования Лапласа и предложим способ вычисления функций, входящих в него.

2. Функция Грина и ее преобразование Лапласа. Для линейного уравнения (1) можно определить функцию Грина, выражающую любое решение через соответствующее ему начальное распределение фотонов:

$$n(x, t) = \int_0^{\infty} G(x, x_1, t) n(x_1, 0) dx_1. \quad (3)$$

Функция Грина удовлетворяет тому же уравнению (1)

$$\frac{\partial G(x, x_1, t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial G}{\partial x} + G \right) \right] \quad (4)$$

с начальным условием

$$G(x, x_1, 0) = \delta(x - x_1). \quad (5)$$

Интеграл (2) для этой функции переходит в

$$\int_0^{\infty} x^2 G(x, x_1, t) dx = x_1^2. \quad (6)$$

Уравнение (4) можно решить методом преобразования Лапласа. Действительно, обозначив

$$\overline{G}(x, x_1, p) = \int_0^{\infty} G(x, x_1, t) e^{-pt} dt, \quad (7)$$

по обычным правилам теории этого преобразования получим, что функция (7) удовлетворяет уравнению, включающему начальное условие (5):

$$x^2 \frac{d^2 \overline{G}}{dx^2} + (x^2 + 4x) \frac{d\overline{G}}{dx} + (4x - p) \overline{G} = -\delta(x - x_1). \quad (8)$$

Однородное уравнение, соответствующее (8), принадлежит к типу вырожденных гипергеометрических уравнений, решения которого выражаются через функции Уиттекера $M_{2,\mu}(x)$ и $W_{2,\mu}(x)$. Краткие сведения об этих функциях приведены в справочнике Градштейна и Рыжика [9], на формулы из которого мы будем ссылаться.

Решение неоднородного уравнения (8) находим методом вариации произвольных постоянных и получаем обычное выражение для функции Грина преобразованного уравнения (8):

$$\overline{G}(x, x_1, p) = \frac{\Gamma(\mu - 3/2)}{\Gamma(1 + 2\mu)} x^{-2} e^{(x_1 - x)/2} M_{2,\mu}(x_m) W_{2,\mu}(x_M), \quad \mu = \sqrt{p + 9/4}, \quad (9)$$

где x_m и x_M - меньшее и большее из x и x_1 , соответственно. Функция от меньшего аргумента мала при $x \rightarrow 0$: $M_{2,\mu}(x) \sim x^{\mu+1/2}$, а функция при больших значениях аргумента $W_{2,\mu}(x) \sim x^2 e^{-x/2}$, т.е. экспоненциально убывает.

3. *Обращение преобразования.* Для обращения преобразования Лапласа надо найти особые точки функции (9) на комплексной плоскости p . Эта функция имеет две изолированные особые точки, а именно, два полюса, в которых обращается в бесконечность гамма-функция, стоящая в числителе дроби в (9): $p = 0$, $\mu = 3/2$ и $p = -2$, $\mu = 1/2$. Соответствующие вычеты функции (9)

$$\operatorname{res}_{p=0} \overline{G}(x, x_1, p) = \frac{3}{6} x^{-2} e^{(x_1 - x)/2} x^2 e^{-x/2} x_1^2 e^{x_1/2} = \frac{1}{2} x_1^2 e^{-x}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=-2} \overline{G}(x, x_1, p) &= -x^{-2} e^{(x_1 - x)/2} M_{2,1/2}(x_m) W_{2,1/2}(x_M) = \\ &= \frac{x_1}{2x} (2 - x)(2 - x_1) e^{-x}, \end{aligned} \quad (11)$$

так как $M_{2,3/2}(x) = W_{2,3/2}(x) = x^2 e^{-x/2}$ и $M_{2,1/2}(x) = (x - x^2/2) e^{-x/2}$, $W_{2,1/2}(x) = -2 M_{2,1/2}(x)$.

Кроме полюсов функция (9) имеет линию ветвления, где корень, представляющий μ , чисто мнимая величина. После всего сказанного не представляет труда обратить преобразование (9). Беря вычеты в двух точках, и обходя линию ветвления, находим

$$\begin{aligned}
 G(x, x_1, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int e^{pt} \overline{G}(x, x_1, p) dp = \\
 &= \frac{x_1^2}{2} e^{-x} \left[1 + \left(1 - \frac{2}{x} \right) \left(1 - \frac{2}{x_1} \right) e^{-2t} \right] + \frac{1}{2\pi i} e^{-9t/4} \\
 &\int_0^\infty e^{-u} du \left[\overline{G}(x, x_1, p = -9/4 - u - i0)_{\mu = i\sqrt{u}} - \overline{G}(x, x_1, p = -9/4 - u + i0)_{\mu = -i\sqrt{u}} \right] = \\
 &= \frac{x_1^2}{2} e^{-x} \left[1 + \left(1 - \frac{2}{x} \right) \left(1 - \frac{2}{x_1} \right) e^{-2t} \right] + \frac{1}{4\pi} x^{-2} e^{(x_1-x)/2} e^{-9t/4} x \\
 &\times \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}} \left| \frac{\Gamma(-3/2) + i\sqrt{u}}{\Gamma(2i\sqrt{u})} \right|^2 W_{2, i\sqrt{u}}(x) W_{2, i\sqrt{u}}(x_1).
 \end{aligned} \tag{12}$$

При переходе к последнему равенству было использовано выражение функций Уиттекера W через функции M по формуле 9.220.4 из [9].

4. *Представление через с.ф.* Выражение (12) можно представить разложением по с.ф. оператора, являющегося самосопряженной формой стоящего справа в (1) линейного оператора Компанейца:

$$\frac{d}{dx} \left[x^2 \frac{d}{dx} \chi_p(x) \right] + \left(2x - \frac{x^2}{4} - 2 \right) \chi_p(x) = -p \chi_p(x). \tag{13}$$

Это разложение имеет вид

$$\begin{aligned}
 G(x, x_1, t) &= \frac{x_1}{x} e^{(x_1-x)/2} \left[\chi_0(x) \chi_0(x_1) + \chi_2(x) \chi_2(x_1) e^{-2t} + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\infty \chi_{9/4+\mu^2}(x) \chi_{9/4+\mu^2}(x_1) e^{-(9/4+\mu^2)t} d\mu \right]
 \end{aligned} \tag{14}$$

и совпадает с найденным в [1]:

Две дискретных с.ф. из этого набора

$$\chi_0(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} e^{-x/2}, \quad \chi_2(x) = \frac{x-2}{\sqrt{2}} e^{-x/2} \tag{15}$$

ортогональны и нормированы на единицу:

$$\int_0^{\infty} \chi_0(x) \chi_2(x) dx = 0, \quad \int_0^{\infty} \chi_0^2(x) dx = \int_0^{\infty} \chi_2^2(x) dx = 1 \quad (16)$$

С.ф. непрерывного спектра

$$\chi_{9/4+\mu^2}(x) = \left[\frac{2}{\pi} \frac{\mu \operatorname{sh}(\pi\mu)}{(1/4 + \mu^2)(9/4 + \mu^2)} \right]^{1/2} \frac{1}{x} W_{2,1\mu}(x) \quad (17)$$

нормированы на δ -функцию

$$\int_0^{\infty} \chi_{9/4+\mu^2}(x) \chi_{9/4+\mu_1^2}(x) dx = \delta(\mu - \mu_1) \quad (18)$$

и ортогональны дискретным с.ф.

$$\int_0^{\infty} \chi_{9/4+\mu^2}(x) \chi_0(x) dx = \int_0^{\infty} \chi_{9/4+\mu^2}(x) \chi_2(x) dx = 0. \quad (19)$$

Вместе эти функции образуют полную систему на промежутке $[0, \infty)$, что выражается условием полноты, обеспечивающим выполнение начального условия (5):

$$\chi_0(x) \chi_0(x_1) + \chi_2(x) \chi_2(x_1) + \int_0^{\infty} \chi_{9/4+\mu^2}(x) \chi_{9/4+\mu^2}(x_1) d\mu = \delta(x - x_1). \quad (20)$$

Таким образом, функция Грина полностью определена. Для сравнения приведем решение стационарного уравнения, также в линейном приближении.

5. Решение стационарного уравнения. Если поле излучения не зависит от времени, то уравнение (1) переходит в однородное уравнение Компанейца

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^4 \left(\frac{dn(x)}{dx} + n(x) \right) \right] = 0. \quad (21)$$

Однородное уравнение сразу сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dn(x)}{dx} + n(x) = \frac{C_2}{x^4}. \quad (22)$$

Общее решение этого линейного уравнения имеет вид

$$n(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \int_x^{\infty} \frac{dx'}{(x')^4}. \quad (23)$$

Здесь $\alpha > 0$ - некоторое число. Решение в виде интеграла имеет смысл только при $x \geq \alpha$. Однако взять $\alpha = 0$ нельзя, так как подинтегральная функция при $x' \rightarrow 0$ стремится к бесконечности так сильно, что интеграл в (23) расходится. Первое же решение описывает распределение Вина, т.е. правильное стационарное решение, к которому стремятся нестационарные решения на больших временах. Второе решение надо, по-видимому, отбросить, как нефизическое.

Если в среде имеются стационарные источники фотонов, то задача о поле излучения в электронной бесконечной среде сводится к уравнению вида (21) с источниками

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^4 \left(\frac{dn(x)}{dx} + n(x) \right) \right] = f(x). \quad (24)$$

Оно решается так же, как и (21). Проинтегрируем уравнение (24) по x от 0 до x

$$\frac{dn(x)}{dx} + n(x) = \frac{1}{x^4} \int_0^x x_1^2 f(x_1) dx_1. \quad (25)$$

Получившееся линейное уравнение имеет следующее решение:

$$n(x) = e^{-x} \int_0^x e^{x'} \frac{dx'}{(x')^4} \int_0^{x'} x_1^2 f(x_1) dx_1 = e^{-x} \int_0^x x_1^2 f(x_1) dx_1 \int_{x_1}^x e^{x'} \frac{dx'}{(x')^4}. \quad (26)$$

Стационарная функция Грина, определяемая формулой

$$n(x) = \int_0^\infty G(x, x_1) f(x_1) dx_1, \quad (27)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^4 \left(\frac{dG(x, x_1)}{dx} + G(x, x_1) \right) \right] = \delta(x - x_1) \quad (28)$$

и может быть представлена в явном виде

$$G(x, x_1) = \begin{cases} e^{-x} x_1^2 \int_{x_1}^x e^{x'} \frac{dx'}{(x')^4}, & x_1 \leq x, \\ 0, & x_1 \geq x. \end{cases} \quad (29)$$

В частном случае степенного спектра источников $f(x) = x^\beta$, $\beta > 0$ решение выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию:

$$n(x) = \frac{x^\beta}{\beta(\beta+3)} e^{-x} F(\beta, \beta+1, x) \sim \begin{cases} \frac{x^\beta}{\beta(\beta+3)}, & x \ll 1, \\ \frac{x^{\beta-1}}{\beta+3}, & x \gg 1. \end{cases} \quad (30)$$

В то время как функции, входящие в решение стационарного уравнения, элементарны, расчет функций Уиттекера с мнимым индексом-задача непростая.

6. *Вычисление функций Уиттекера.* Для расчета эволюции спектра излучения необходимо вычислять функции $W_{2,i\mu}(z)$ при любых положительных z и μ . В разных областях их изменения приходится использовать различные формулы.

При больших аргументах z можно вычислить рассматриваемую функцию по асимптотической формуле 9.227 из книги [9]:

$$W_{2,i\mu}(z) = z^2 e^{-z/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! z^n} \prod_{k=1}^n [\mu^2 + (k-5/2)^2]. \quad (31)$$

В остальных случаях удобнее воспользоваться ее связью с функцией Макдональда.

Функция $W_{2,i\mu}(z)$, согласно рекуррентным формулам 9.234 из [9], выражается через $W_{0,i\mu}(x)$:

$$W_{2,i\mu}(z) = \left[z(z/2 - 1) - (1/4 + \mu^2) \right] W_{0,i\mu}(z) - 2z(z/2 - 1) W'_{0,i\mu}(z), \quad (32)$$

а функция нулевого порядка по формуле 9.235 (2) из [9] связана с функцией Макдональда:

$$W_{0,i\mu}(z) = \sqrt{z/\pi} K_{i\mu}(z/2). \quad (33)$$

Таким образом, требуемая функция выражается через функцию Макдональда и ее производную

$$W_{2,i\mu}(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}} \left[\left(\frac{z^2}{2} - \frac{3}{2}z + \frac{3}{4} - \mu^2 \right) K_{i\mu}(z/2) - z \left(\frac{z}{2} - 1 \right) K'_{i\mu}(z/2) \right]. \quad (34)$$

Именно функции Макдональда мы и будем вычислять. Все приведенные функции вещественны, несмотря на мнимый индекс $i\mu$.

При достаточно малых z воспользуемся связью функции Макдональда с модифицированными функциями Бесселя и их разложениями в ряды (формулы 8.485 и 8.445 из [9]):

$$\begin{aligned}
 K_{i\mu}(z) &= \frac{\pi}{2} \frac{i}{\operatorname{sh}(\pi\mu)} [I_{i\mu}(z) - I_{-i\mu}(z)] = \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{i}{\operatorname{sh}(\pi\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n!} \left[\frac{(z/2)^{i\mu}}{\Gamma(1+n+i\mu)} - \frac{(z/2)^{-i\mu}}{\Gamma(1+n-i\mu)} \right] = \\
 &= \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n!} \frac{\Gamma_1(1+n, \mu) \cos(\mu \ln(z/2)) - \Gamma_R(1+n, \mu) \sin(\mu \ln(z/2))}{\prod_{k=1}^n (\mu^2 + k^2)}.
 \end{aligned} \quad (35)$$

Соответственно для производной получается

$$\begin{aligned}
 K'_{i\mu}(z) &= \frac{1}{\mu z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n!} \{ [2n\Gamma_1(1+n, \mu) - \mu\Gamma_R(1+n, \mu)] \cos(\mu \ln(z/2)) - \\
 &\quad - [2n\Gamma_R(1+n, \mu) + \mu\Gamma_1(1+n, \mu)] \sin(\mu \ln(z/2)) \} \prod_{k=1}^n \frac{1}{\mu^2 + k^2}.
 \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $\Gamma_R(x, y)$ и $\Gamma_1(x, y)$ - вещественная и мнимая части гамма-функции комплексного аргумента $\Gamma(x + iy)$. Ряды (35) и (36) сходятся при любых z , однако практически производить по ним вычисления целесообразно при $z < \mu < 10$.

При больших значениях индекса (точнее, его модуля) μ применим асимптотические формулы. Наилучшими такими формулами, дающими равномерные по аргументу асимптотики при больших значениях порядка бесселевых функций, являются формулы Лангера. Метод получения таких формул изложен, например, в справочнике [10].

Согласно этому методу, сначала находятся решения уравнения в приближении ВКБ. Для функций Макдональда $w = K_{i\mu}(z)$, определяющие их уравнение

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 - \mu^2) w = 0 \quad (37)$$

надо решить отдельно для $z < \mu$ и $z > \mu$. Затем эти решения уточняются для области вблизи точки $z = \mu$ подбором асимптотического уравнения, которым служит уравнение Эйри. Следуя этому методу, получаем, что при больших μ

$$K_{i\mu}(z) \sim \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi\mu/2} \left(\frac{v}{u}\right)^{1/2} [J_{1/3}(\mu v) + J_{-1/3}(\mu v)], & z \leq \mu, \\ e^{-\pi\mu/2} \left(\frac{v}{u}\right)^{1/2} K_{1/3}(\mu v), & z \geq \mu, \end{cases} \quad (38)$$

где

$$u = \left| \frac{z^2}{\mu^2} - 1 \right|^{1/2}, \quad v = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} - u, & z \leq \mu, \quad 0 \leq u < 1, \\ u - \operatorname{arctg} u, & z \geq \mu, \quad 0 \leq u < \infty. \end{cases} \quad (39)$$

Для $z = \mu$ обе формулы дают один и тот же результат. Действительно, переходя в них к пределу при $u \rightarrow 0$, $v \sim u^3/3 \rightarrow 0$, получаем, что

$$K_{i\mu}(z) \sim \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi\mu/2} \left(\frac{u^3}{3u}\right)^{1/2} \left(\frac{\mu u^3}{6}\right)^{-1/3} \frac{1}{\Gamma(2/3)} \\ e^{-\pi\mu/2} \left(\frac{u^3}{3u}\right)^{1/2} \frac{1}{\sin(\pi/3)} \frac{\pi}{2\Gamma(2/3)} \left(\frac{\mu u^3}{6}\right)^{-1/3} \end{cases} = \frac{\pi}{3\Gamma(2/3)} \left(\frac{6}{\mu}\right)^{1/3} e^{-\pi\mu/2}. \quad (40)$$

Из (34) и (38) вытекает следующая асимптотика, справедливая при $\mu \gg z$:

$$W_{2,i\mu}(z) \sim -(2z)^{1/2} \mu^{3/2} e^{-\pi\mu/2} \cos\left(\mu \ln \frac{4\mu}{ez} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (41)$$

Эта асимптотика согласуется с условием нормировки с.ф. (18) и обращает функцию Грина при $t=0$ в δ -функцию, согласно начальному условию (5).

Оказалось, что формулы Лангера недостаточно точны для наших целей. Поэтому потребовалось уточнить и их. Способ уточнения результатов, получаемых методом Лангера, дан в работе Черри [11]. В основе этого уточнения лежит та же идея, что и у Лангера: у близких дифференциальных уравнений близки решения. Общая теория построения асимптотических формул для уравнений второго порядка с малым множителем перед второй производной изложена, например, в книге [12]. Здесь мы воспроизведем схему оригинальной работы Черри.

7. Метод Черри. Исходим из точного уравнения для функции, несколько отличной от рассматриваемой ранее: $w_+ = \sqrt{\zeta} K_{i\mu}(\lambda\sqrt{1+\zeta^2})$, т.е. при $z = \lambda\sqrt{1+\zeta^2}$, где λ — некоторый параметр, близкий к μ , введенный

для удобства и подлежащий определению в дальнейшем. Эта функция удовлетворяет уравнению, получающемуся из (37):

$$\begin{aligned} & (1 \mp \zeta^2)^2 \frac{d^2 w_*}{d\zeta^2} - 2 \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta} \frac{dw_*}{d\zeta} + \\ & + \left\{ \frac{5}{4} \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^2} \left(1 \mp \frac{\zeta^2}{5} \right) - \zeta^2 [\lambda^2 (1 \mp \zeta^2) - \mu^2] \right\} w_* = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Теперь перейдем к новой переменной, которую обозначим, как и раньше, через v , хотя эта новая переменная выражается через ζ точно так же, как старое v через u . В результате подстановки получается уравнение в новой переменной

$$\frac{d^2 w_*}{dv^2} + Q w_* = 0, \quad (43)$$

где коэффициент при w_* представлен как функция переменной ζ :

$$Q = \frac{5}{4} \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^6} \left(1 \mp \frac{\zeta^2}{5} \right) - (\lambda^2 - \mu^2) \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^2} \pm \mu^2. \quad (44)$$

Теперь подберем уравнение стандартного вида, которое было бы близко к рассматриваемому при малых ζ и v . Будем исходить из уравнений, решения которых известны и близки к функциям, входящим в асимптотики (38). Напишем подгоночные уравнения в виде одного уравнения с вариантами знака:

$$\frac{d^2 V}{d\xi^2} + \left[\pm v^2 + \frac{5}{36} \frac{1}{\xi^2} \right] V = 0. \quad (45)$$

Здесь v - величина, близкая к μ и подлежащая выбору из некоторых соображений. Решениями уравнения (45) являются функции

$$V = e^{-\pi i/2} \sqrt{\xi} \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}} [J_{1/3}(v\xi) - J_{-1/3}(v\xi)], & \text{верхний знак,} \\ K_{1/3}(v\xi), & \text{нижний знак.} \end{cases} \quad (46)$$

Постоянные в решении (46) выбраны, исходя из условия совпадения с решением ВКБ при не малых ζ , т.е. они те же, что и в (38).

Пойдем "навстречу" уравнению (43), т.е. модифицируем уравнение (45) так, чтобы оно было бы как можно ближе к (43). Для этого сделаем замены независимой переменной и решения при помощи одной функции:

$\xi = \phi(v)$, $V = \sqrt{\phi'(v)} W$. Для W в функции v получится уравнение, по форме совпадающее с (43):

$$\frac{d^2 W}{d v^2} + R W = 0, \quad (47)$$

где обозначено

$$R = \frac{1}{2} \frac{\phi''}{\phi'} - \frac{3}{4} \left(\frac{\phi''}{\phi'} \right)^2 + \frac{5}{36} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 \pm v^2 (\phi')^2. \quad (48)$$

Кажется заманчивым просто приравнять R из (47) величине Q из (43), т.е. правые части равенств (44) и (48), и из полученного уравнения определить функцию $\phi(v)$. Однако решить столь сложное уравнение аналитически невозможно. Поэтому был предложен метод приближенной подгонки путем разложения функции $\phi(v)$, а также постоянных λ и v в ряды по обратным степеням μ . В этом и заключается сущность метода Черри.

Разложим три величины, подлежащие определению, в ряды по обратным четным степеням большого параметра μ :

$$\phi(v) = v + \frac{\phi_1(v)}{\mu^2} + \frac{\phi_2(v)}{\mu^4} + \frac{\phi_3(v)}{\mu^6} + \dots, \quad (49)$$

$$\frac{\lambda^2}{\mu^2} = 1 + \frac{\gamma_1}{\mu^2} + \frac{\gamma_2}{\mu^4} + \frac{\gamma_3}{\mu^6} + \dots, \quad \frac{v^2}{\mu^2} = 1 + \frac{c_1}{\mu^2} + \frac{c_2}{\mu^4} + \frac{c_3}{\mu^6} + \dots. \quad (50)$$

Разлагая комбинации функций, входящих в выражение для R , по обратным степеням $1/\mu^2$, получаем разложение R . Это разложение надо приравнять величине Q из (44). Из равенств, получающихся в результате приравнивания нулю коэффициентов при трех последовательных степенях $1/\mu^2$, находим выражения для первых производных трех функций:

$$\phi_1' = \frac{c_1}{2} \mp \left[\frac{5}{72} \frac{1}{v^2} - \frac{5}{8} \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^6} \left(1 \mp \frac{\zeta^2}{5} \right) + \frac{\gamma_1}{2} \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^2} \right], \quad (51)$$

$$\phi_2' = \frac{c_2}{2} + c_1 \phi_1' - \frac{1}{2} (\phi_1')^2 \mp \left[\frac{1}{4} \phi_1'' + \frac{5}{36} \frac{\phi_1'}{v^2} - \frac{5}{36} \frac{\phi_1}{v^3} + \frac{\gamma_2}{2} \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^2} \right], \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \phi_3' = & \frac{c_3}{2} + c_1 \phi_2' + c_2 \phi_1' + \frac{c_1}{2} (\phi_1')^2 - \phi_1' \phi_2' \mp \left[\frac{1}{4} \phi_2'' - \frac{3}{8} (\phi_1')^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \phi_1' \phi_1'' + \frac{5}{36} \frac{\phi_2'}{v^2} - \frac{5}{36} \frac{\phi_2}{v^3} + \frac{5}{24} \frac{\phi_1^2}{v^4} - \frac{5}{18} \frac{\phi_1 \phi_1'}{v^3} + \frac{5}{72} \frac{(\phi_1')^2}{v^2} + \frac{\gamma_3}{2} \frac{1 \mp \zeta^2}{\zeta^2} \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

8. *Три первых порядка.* По полученным выражениям для производных $\phi_i'(v)$ можно последовательно найти и сами функции $\phi_i(v)$, приняв во внимание связь дифференциалов $dv = \zeta^2 d\zeta / (1 \mp \zeta^2)$. При этом оказывается, что все интегралы берутся и их можно находить подбором численных коэффициентов. Константы λ и v подбираются так, чтобы наилучшим возможным образом приблизить подгоночное уравнение к точному около точки, где модуль порядка функции Макдональда μ и аргумент этой функции $z = \lambda \sqrt{1 \mp \zeta^2}$ близки (в приближении Лангера - равны). Эта область содержит так называемую классическую точку поворота, при переходе через которую изменяется поведение решения: с одной стороны, при $z \geq \mu$, согласно формулам (38) решение экспоненциально убывает, а с другой - носит колебательный характер.

Можно поступить одним из двух способов. В указанной области, где величины ζ и v малы, можно разложить v , а затем и производные $\phi_i'(v)$ по степеням ζ . Постоянные γ_i и c_i выбираются таким образом, чтобы при $\zeta \rightarrow 0$ производная $\phi_i'(v)$ имела порядок ζ^2 или, что то же самое $v^{2/3}$. Сами функции при малых v имеют порядок $v^{5/3}$ (или ζ^5). Можно вести разложение по степеням v , как делалось в [11]. Для этого необходимо обращать разложение v по степеням ζ^2 и находить разложения степеней ζ по степеням v . Первый способ оказался менее трудоемким.

Из (51) находим $\gamma_1 = -1/35$, $c_1 = 23/525$, а

$$\phi_1(v) = \frac{23}{1050} v \pm \frac{5}{72} \frac{1}{v} \mp \frac{5}{24} \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{8} \frac{1}{\zeta} \pm \frac{1}{70} \zeta. \quad (54)$$

Далее, таким же образом, по (52) определяем постоянные и функции второго порядка: $\gamma_2 = -864/398125$, $c_2 = 604256/125409375$,

$$\begin{aligned} \phi_2(v) = & \frac{3139109}{1003275000} v \pm \frac{23}{15120} \frac{1}{v} - \frac{1255}{31104} \frac{1}{v^3} - \frac{1}{v^2} \left[\frac{1}{1008} \zeta \pm \frac{5}{576} \frac{1}{\zeta} - \frac{25}{1728} \frac{1}{\zeta^3} \right] \pm \\ & \pm \frac{14333}{9555000} \zeta + \frac{17}{3675} \frac{1}{\zeta} \mp \frac{463}{5760} \frac{1}{\zeta^3} + \frac{3757}{4480} \frac{1}{\zeta^5} \mp \frac{221}{128} \frac{1}{\zeta^7} + \frac{1105}{1152} \frac{1}{\zeta^9}. \end{aligned} \quad (55)$$

Наконец, в третьем порядке получаются следующие результаты: две постоянные $\gamma_3 = -86884704/101929953125$, $c_3 = 101889710752/41281631015625$ и функция

$$\begin{aligned} \phi_3(v) = & \frac{133862958329}{94358013750000} v \pm \frac{3139109}{14447160000} \frac{1}{v} - \frac{4153}{6531840} \frac{1}{v^3} \pm \frac{272075}{2239488} \frac{1}{v^5} - \\ & - \frac{1}{v^2} \left(\frac{14333}{137592000} \zeta \pm \frac{17}{52920} \frac{1}{\zeta} - \frac{463}{82944} \frac{1}{\zeta^3} \pm \frac{3757}{64512} \frac{1}{\zeta^5} - \frac{1105}{9216} \frac{1}{\zeta^7} \pm \frac{5525}{82944} \frac{1}{\zeta^9} \right) \pm \\ & \pm \frac{1}{v^3} \left(\frac{1}{70560} \zeta^2 + \frac{65}{96768} \frac{1}{\zeta^2} \mp \frac{25}{6912} \frac{1}{\zeta^4} + \frac{125}{41472} \frac{1}{\zeta^6} \right) \pm \\ & \pm \frac{1}{v^4} \left(\frac{251}{145152} \zeta \pm \frac{1255}{82944} \frac{1}{\zeta} - \frac{6275}{248832} \frac{1}{\zeta^3} \right) \pm \\ & \pm \frac{1077482173}{2096844750000} \zeta + \frac{250729}{401310000} \frac{1}{\zeta} \mp \frac{30399323}{4815720000} \frac{1}{\zeta^3} + \frac{142531199}{48921600} \frac{1}{\zeta^5} \mp \\ & \mp \frac{27292009}{3763200} \frac{1}{\zeta^7} + \frac{19769579}{483840} \frac{1}{\zeta^9} \mp \frac{314735}{3584} \frac{1}{\zeta^{11}} + \frac{82825}{1024} \frac{1}{\zeta^{13}} \mp \frac{82825}{3072} \frac{1}{\zeta^{15}}. \end{aligned} \quad (56)$$

В заключение этого пункта замтим, что переход от формул Черри к формулам Лангера осуществляется заменой функции и постоянных их нулевыми приближениями, т.е. константы λ и v заменяются на μ , а функция $\phi(v)$ на v .

9. *Схема расчета функции Грина.* Изложим сначала алгоритм вычисления функций Макдональда с большим по модулю мнимым порядком.

Из приведенных выше соотношений получается следующая результирующая формула

$$\begin{aligned} K_{1\mu}(z) \sim & e^{-\pi\mu/2} \left(\frac{\phi(v)\phi'(v)}{\zeta} \right)^{1/2} \times \\ & \times \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}} [J_{1/3}(v\phi(v)) + J_{-1/3}(v\phi(v))], & z = \lambda\sqrt{1-\zeta^2}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \\ K_{1/3}(v\phi(v)), & z = \lambda\sqrt{1+\zeta^2}, \quad \zeta \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (57)$$

Здесь сначала по величине μ находятся λ и $v = \sqrt{\mu^2 - c}$ по формулам (50). Далее по значению z определяются значения ζ и v , а затем значения коэффициентных функций в разложениях $\phi(v)$ и ее производных. Все это делается в третьем приближении по $1/\mu^2$. Вблизи точки поворота надо использовать разложения по степеням переменных, от которых зависят эти функции. Более удобными являются разложения по степеням ζ . Как всегда для первого соотношения между z и μ во всех формулах

берется верхний знак, а для второго - нижний. Все соответствующие коэффициенты разложений в обоих случаях совпадают по модулю, но примерно через один имеют одинаковые и противоположные знаки.

Следует сказать, что при вычислении функций и их производных по точным формулам, даже при не очень малых ζ , происходит сильная потеря точности вследствие большого числа сокращающихся степеней. Поэтому при таких ζ использовались два способа регуляризации. В первом - функции разлагались в степенные ряды по ζ , причем приходилось удерживать большое число слагаемых (до 20). Во втором способе в разложениях выделялись только те слагаемые, которые сокращаются, а остаток ряда вычислялся точно.

Для вычисления функции Уиттекера необходимо кроме самой функции Макдональда знать еще и ее производную. Для ее получения просто дифференцируем асимптотику функции. Удобнее продифференцировать логарифм асимптотики. Для логарифмической производной находим

$$\frac{K'_{\mu}(\lambda\sqrt{1\mp\zeta^2})}{K_{\mu}(\lambda\sqrt{1\mp\zeta^2})} \sim \mp \frac{\zeta}{2\lambda\sqrt{1\mp\zeta^2}} \left[-\frac{1\mp\zeta^2}{\zeta^3} + \frac{1}{3} \frac{\phi'(v)}{\phi(v)} + \frac{\phi''(v)}{\phi(v)} \pm 2v\phi'(v)A \right]. \quad (58)$$

Здесь для краткости обозначено

$$A = \begin{cases} \frac{J_{-2/3}(v\phi(v)) - J_{2/3}(v\phi(v))}{J_{1/3}(v\phi(v)) + J_{-1/3}(v\phi(v))}, & \text{верхний знак,} \\ \frac{K_{2/3}(v\phi(v))}{K_{1/3}(v\phi(v))}, & \text{нижний знак.} \end{cases} \quad (59)$$

В квадратной скобке в (58) стоят слагаемые, которые вблизи точки поворота велики, но частично взаимно сокращаются. Это слагаемые $-1/\zeta^3$ и $(1/3)\phi'(v)/\phi(v)$. Подставив разложения функций по степеням $1/\mu^2$ и ζ^2 , получим

$$\pm \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{3} \frac{\phi'(v)}{\phi(v)} \sim \pm \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{3} \frac{1}{\zeta^3/3 \pm \zeta^5/5} \sim \pm \frac{2}{5} \frac{1}{\zeta}. \quad (60)$$

После сокращения остается слагаемое порядка $1/\zeta$, которое компенсируется множителем ζ перед всем выражением справа.

Имея с.ф. $W_{2,\mu}(z)$, можно вычислить функцию Грина (14). Следует отметить, что при малых временах t подинтегральная функция в (14) начинает убывать только при очень больших μ . Для усиления сходимости интеграла в (14) у с.ф. пришлось выделить асимптотику (41), которая

даст точность лучше, чем 1%. Возникающее в произведении $W_{2,i\mu}(x)W_{2,i\mu}(x_1)$ произведение косинусов заменялось на разность тригонометрических функций и асимптотические части интеграла вычислялись отдельно. Оставив только главные слагаемые в разложениях по μ , представим асимптотическую часть интеграла (14) в виде

$$I = \frac{1}{\pi x} \sqrt{\frac{x_1}{x}} e^{(x_1-x)/2} e^{-9t/4} x \times \int_0^{\infty} e^{-\mu^2 t} d\mu \left[\sin \left(2\mu \ln \frac{4\mu}{e\sqrt{xx_1}} \right) + \cos \left(\mu \ln \frac{x}{x_1} \right) \right] = I_1 + I_2. \quad (61)$$

Второй интеграл (с косинусом) вычисляется точно и даст приближение функции Грина к δ -функции при малых t .

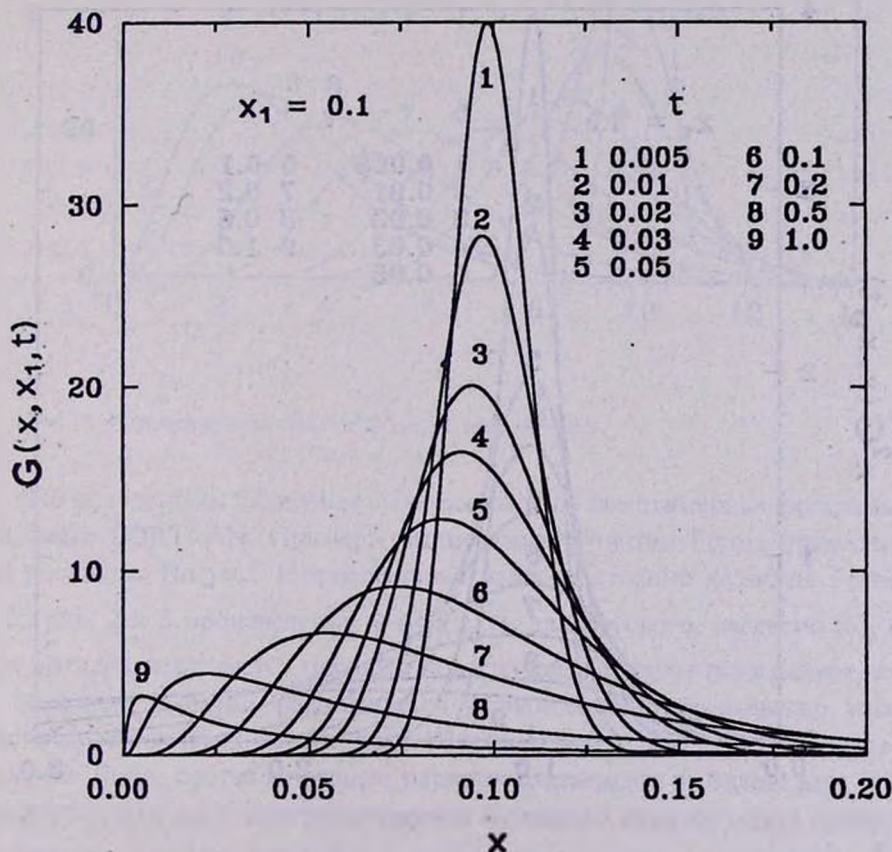


Рис. 1. Эволюция функции Грина $G(x, x_1, t)$ при $x_1 = 0.1$.

$$I_2 = \frac{1}{\pi x} \sqrt{\frac{x_1}{x}} e^{(x_1-x)/2} e^{-9t/4} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{\ln^2(x/x_1)}{4t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{(x_1-x)/2} \delta(\ln x - \ln x_1) = \delta(x - x_1). \quad (62)$$

В то же время интеграл от первого слагаемого в квадратных скобках

$$I_1 = \frac{1}{\pi x} \sqrt{\frac{x_1}{x}} e^{(x_1-x)/2} e^{-9t/4} \int_0^\infty e^{-\mu^2 t} d\mu \sin\left(2\mu \ln \frac{4\mu}{e\sqrt{xx_1}}\right) \quad (63)$$

является обычной функцией и ограничен при конечных x и x_1 даже при $t = 0$, хотя вычисление его при $t \ll 1$ очень трудоемко. Оставшаяся часть интеграла разбивалась на несколько промежутков, к которым применялась квадратурная формула Гаусса.

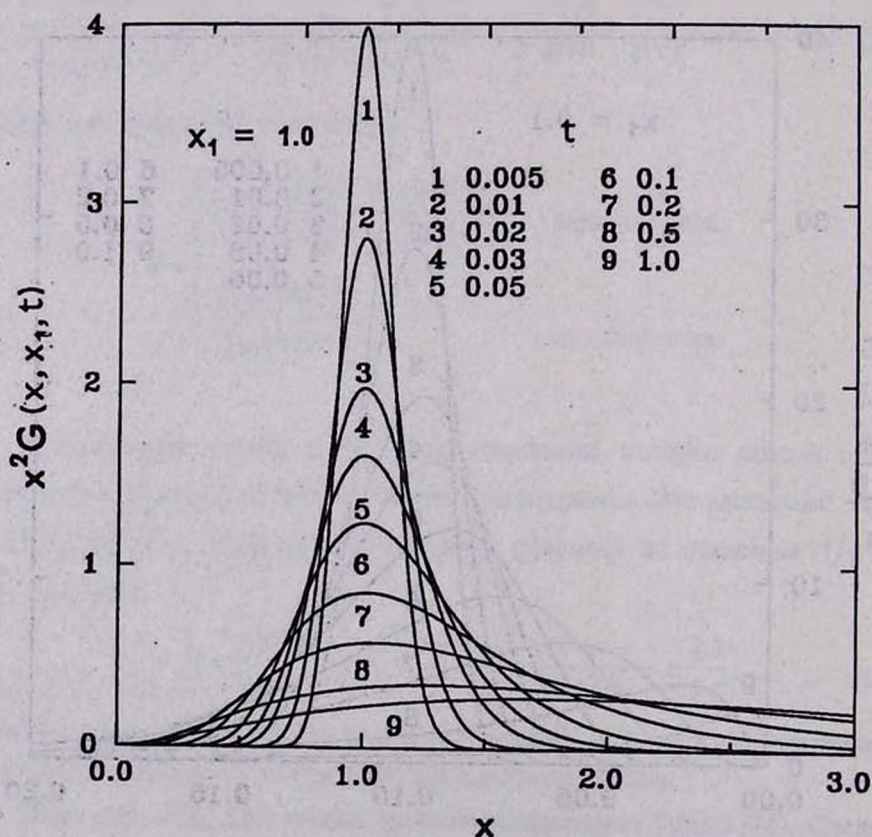


Рис. 2. Изменение величины $x^2 G(x, x_1, t)$ при $x_1 = 1.0$.

При конкретных начальных распределениях фотонов по энергиям, согласно (3), сначала можно вычислить интеграл по аргументу x_1 , а затем по параметру μ . При этом вычисление интеграла по μ упрощается.

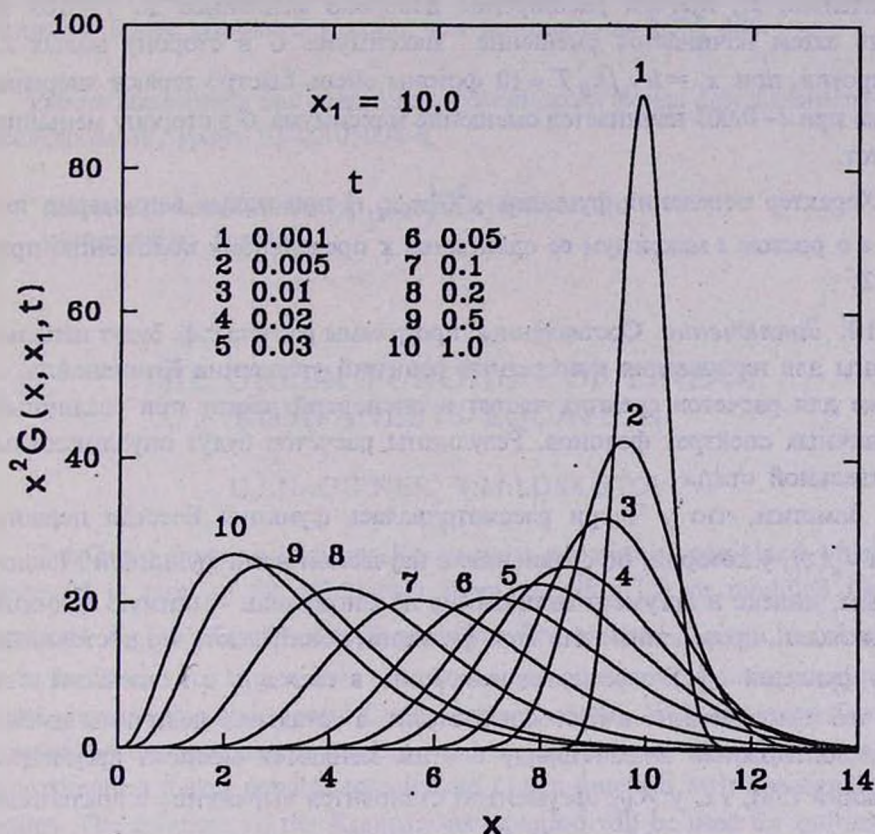


Рис. 3. Изменение величины $x^2 G(x, x_1, t)$ при $x_1 = 10.0$.

По полученным формулам были составлены компьютерные программы на языке FORTRAN. Примеры вычисления функции Грина приведены на рисунках. На рис. 1 представлена непосредственно функция Грина, а на рис. 2 и 3 произведение $x^2 G(x, x_1, t)$, для которого, согласно (6), во все времена сохраняется площадь под кривой. Графики показывают, как с течением времени расплывается первоначально бесконечно узкое распределение. Предельным распределением при $t \rightarrow \infty$ является распределение Вина, соответствующее первому слагаемому в разложении (12), не зависящему от t . Заметим, что сама функция Грина не имеет прямого физического смысла. Произведение $x^2 G$ пропорционально числу фотонов, а $x^3 G$ - энергии.

Рис. 1 отражает эволюцию функции Грина, когда начальная частота $x_1 = h\nu_1/k_B T = 0.1$ и энергия переходит от электронов к фотонам. При $x_1 \leq 1$ сначала кривая $G(x, x_1, t)$ расширяется примерно симметрично относительно x_1 , причем расширение довольно медленное до $t \approx 0.05$ и лишь затем начинается смещение максимума G в сторону малых x . Напротив, при $x_1 = h\nu_1/k_B T = 10$ фотоны очень быстро теряют энергию и уже при $t \sim 0.001$ начинается смещение максимума G в сторону меньших частот.

Характер поведения функции $x^2 G(x, x_1, t)$ при малых t примерно тот же, а с ростом t максимум ее сдвигается к предельному положению при $x = 2$.

10. *Заключение.* Составленные программы расчета с.ф. будут использованы для нахождения конкретных решений уравнения Компанейца, а также для расчетов средних частот и дисперсий частот при различных первичных спектрах фотонов. Результаты расчетов будут опубликованы в отдельной статье.

Заметим, что у Черри рассматривалась функция Бесселя первого рода $J_\mu(z)$, у которой, по сравнению с изучаемой нами функцией Макдональда, индекс и аргумент отличаются на множитель - мнимую единицу i . Выкладки, проведенные для этой функции, показывают, что постоянные γ_i и функции $\phi_i(\nu)$ с четными номерами, а также c_i с нечетными - те же, что и полученные в настоящей статье, а остальные величины имеют противоположный знак. Наряду с этим меняются местами аргументы функций (38), т.е. у $K_{1/3}$ аргументом становится выражение с арктангенсом, а у $J_{1/3}$ - с логарифмом. Изменяется и численный множитель асимптотики в соответствии с определением функций Бесселя.

В статье [11] приводятся только коэффициенты γ_1 и c_1 (там эти коэффициенты обозначены γ_0 и c_0 , наше обозначение нам кажется более последовательным). Они совпадают с найденными нами для $J_\mu(z)$. Кроме того, в [11] даются разложения λ и ν по степеням $1/\mu^2$, из которых следует, что γ_2 и c_2 также совпадают с нашими, а постоянные третьего порядка несколько отличаются. Выражения для функций выше первого порядка в [11] не приводятся совсем. Заметим, что формулы для функций и их разложений выводились нами с помощью системы REDUCE и несколько раз перепроверялись.

Заметим также, что методом Черри мы получили формулы третьего приближения, которое уже очень громоздко и для расчета функций в этом приближении требуется очень много слагаемых в разложениях около точки перемены знака разности $\mu - z$. Поэтому при численных расчетах

с.ф. мы ограничились вторым приближением, что вместе с другими формулами обеспечило точность расчетов $W_{2,l\mu}(z)$ в пять значащих цифр. Мы все же привели результаты для третьего приближения, которое можно использовать для повышения точности расчетов, если их производить на машинах более высокого класса, чем компьютеры IBM 486.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 95-02-05004-а.

Астрономический институт Санкт-Петербургского университета, Россия

THE GREEN FUNCTION OF LINEAR KOMPANEETS EQUATION

D.I.NAGIRNER, V.M.LOSKUTOV

The Green function of linear Kompaneets equation is computed which is expressed in term of the Whittaker functions $W_{2,l\mu}(z)$ or modified Bessel functions $K_{l\mu}(z)$ of purely imaginary index. The method is given to calculate these functions. For large values of μ the Langer asymptotic solutions are made more precise using the second Cherry approximation. With the expansion in series when the argument is not large and the asymptotics when it is large the approximation makes possible to calculate Green function with five significant figures. The solutions of the Kompaneets equation will be used for estimation of the accuracy of numerical methods and for computation the evolution of spectrum of photon gas under Compton scattering and mean photon frequencies and dispersion of frequency with various initial spectra.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С.Компанеец, ЖЭТФ, 31, 876, 1956.
2. Я.Б.Зельдович, Успехи физ. наук, 115, 161, 1975.
3. R.A.Sunyaev, L.G.Titarchuk, Astron. Astrophys., 86, 537, 1980.
4. R.A.Sunyaev, L.G.Titarchuk, Astron. Astrophys., 143, 374, 1985.
5. Л.А.Поздняков, И.М.Соболь, Р.А.Сюняев, Итоги науки и техники. Сер. Астрономия. 31, 265, 1986.
6. А.Ф.Илларионов, Р.А.Сюняев, Астрон. ж. 51, 698, 1974.
7. А.Ф.Илларионов, Р.А.Сюняев, Астрон. ж. 51, 1162, 1974.

8. *G.Chapline, J.Stevens*, *Astrophys. J.*, 184, 1041, 1973.
9. *И.С.Градштейн, И.М.Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971.
10. *Г.Бейтмен, А.Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, т.2. Наука, М., 1974.
11. *T.M.Cherry*, *J.London Math. Soc.*, 24, 121, 1949.
12. *С.Ю.Славянов*, Асимптотика решений одномерного уравнения Шредингера. Изд-во Ленинградского ун-та, Л., 1990.