АСТРОФИЗИКА

ТОМ 40 ФЕВРАЛЬ, 1997 ВЫПУСК 1

УДК: 52:531.51+524.354.6

О МОМЕНТЕ ИНЕРЦИИ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД I. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НАКОПЛЕННОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

Л.Ш.ГРИГОРЯН[1], Г.Ф.ХАЧАТРЯН[2]

Поступила 11 сентября 1996
Принята к печати 23 сентября 1996

Выведено релятивистское дифференциальное уравнение первого порядка для накопленного момента инерции сферически-симметрического небесного тела. Предложена приближенная формула, описывающая вклад релятивистских эффектов в момент инерции сверхплотной звезды. В случае конфигураций из несжимаемой жидкости эта аппроксимация описывает результаты численных расчетов Чандрасекара и Миллера с погрешностью 5% во всем диапазоне центральных давлений от 0 до ∞.

1. *Введение.* Вращение является общим свойством небесных тел. Оно детально изучено в ньютоновской теории тяготения (см., например, [1] и приведенные там ссылки). Релятивистская теория медленно вращающихся звезд была предложена Хартлом [2]. Им же, совместно с Торном [3], были изучены модели вращающихся звездных конфитураций. Эти исследования были продолжены в [4-8] и других работах. Влияние вращения на параметры белых карликов и нейтронных звезд изучалось параллельно в [9-12] и других публикациях. Интерес к релятивистской теории вращающихся небесных тел значительно возрос в последнее десятилетие в связи с наблюдением ряда короткопериодических пульсаров и осознанием того обстоятельства, что вращение играет важную роль для конечной стадии звездной эволюции (теория гравитационного коллапса и вспышек сверхновых).

В п.2 выведено релятивистское уравнение для накопленного момента инерции медленно вращающегося сферически-симметрического небесного тела. В следующем разделе обсуждаются релятивистские поправки к полному моменту инерции. В Заключении приведены выводы работы.

2. *Релятивистское уравнение для накопленного момента инерции.* В случае стационарного аксиально-симметрического гравитационного поля можно ввести систему координат t, r, θ, φ, в которой квадрат интервала имеет вид [13]

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 e^{\mu} \left[d\theta^2 + \sin^2\theta (d\varphi + \omega\, dt)^2 \right], \qquad (1)$$

где ν, λ, μ и ω являются функциями r, θ и угловой скорости вращения небесного тела Ω, измеренной удаленным наблюдателем.

Согласно [2] медленное вращение является малым возмущением, и поэтому в нулевом порядке по Ω метрический тензор зависит только от радиальной координаты:

$$\nu = \nu_0(r), \quad \lambda = \lambda_0(r), \quad \mu = \omega = 0 \quad \text{при} \quad \Omega = 0 \tag{2}$$

(шварцшильдовская система координат), и определяется релятивистскими уравнениями гидростатического равновесия для сферически-симметрического небесного тела:

$$\frac{dP}{dr} = -G(\rho + c^{-2}P)\frac{m + 4\pi r^3 P/c^2}{r(r - 2Gm/c^2)} \tag{3а}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2 \tag{3б}$$

(уравнения Оппенгеймера-Волкова), где

$$e^{-\lambda_0} = 1 - \frac{2Gm}{rc^2} \tag{4а}$$

$$\frac{d\nu_0}{dr} = \frac{2G(m + 4\pi r^3 P/c^2)}{r(rc^2 - 2Gm)}. \tag{4б}$$

В этих выражениях P и ρc^2 - давление и плотность полной энергии звездного вещества, $m(r)$ - тяготеющая масса, накопленная внутри сферического слоя радиуса r, G - ньютоновская гравитационная постоянная, а c - скорость света. Имея уравнение состояния

$$\rho = \rho(P) \tag{5}$$

вещества сверхплотного небесного тела, и, задавая центральное давление $P(0) = P_0$, можно определить радиус R и тяготеющую массу

$$M = m(r) \quad \text{при} \quad r \geq R \tag{6}$$

путем интегрирования (3) с начальным условием

$$m(0) = 0. \tag{7}$$

При этом радиус небесного тела $r = R$ определяется условием $P(R) = 0$ или $\rho(R) = \rho_s$, где ρ_s - плотность вещества на поверхности небесного тела. Функции $\lambda_0(r)$ и $\nu_0(r)$ определяются уравнениями (4). Результаты подобных расчетов подытожены в [14-19] и других работах.

Медленное вращение небесного тела приводит к релятивистскому эффекту увлечения инерциальных систем отсчета (см., например, [15]), благодаря которому

$$\varpi(r) \neq \Omega, \tag{8}$$

где ϖ - угловая скорость вращения гравитирующего вещества в локально инерциальной системе отсчета:

$$\varpi = \Omega + \omega. \tag{9}$$

Вращение приводит также к сферической, квадрупольной и другим

более сложным деформациям, которые определяются функциями ν, λ и μ. Из (1) видно, что ν, λ и μ являются четными функциями, а ω - нечетной функцией Ω. Поэтому в первом приближении по малому параметру $c\Omega R^2/GM$ (медленно вращающееся сферически-симметрическое небесное тело) можно считать

$$\nu \approx \nu_0(r), \quad \lambda \approx \lambda_0(r), \quad \mu \approx 0, \quad \omega \sim \Omega . \tag{10}$$

Функция $\varpi(r)$ определяется не диагональной компонентой уравнения Эйнштейна:

$$R_0^3 = \frac{8\pi G}{c^4} T_0^3 , \tag{11}$$

где R_{ik} - тензор Риччи пространства-времени, а

$$T_{ik} = (\rho c^2 + P) u_i u_k - P g_{ik} \tag{12}$$

- тензор энергии-импульса звездного вещества. В раскрытом виде (11) сводится к уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r^4 j \frac{d\varpi}{dr} \right) + 4 r^3 \varpi \frac{dj}{dr} = 0 \tag{13}$$

с граничными условиями

$$\left(\frac{d\varpi}{dr} \right)_{r=0} = 0, \quad \varpi(\infty) = \Omega \tag{14}$$

(см., например, [2,3,6-11,16,18]). При этом

$$j(r) = e^{-\nu_0/2} \sqrt{1 - 2Gm/rc^2} \;\Rightarrow\; j(r) = 1 \quad \text{при} \quad r \geq R. \tag{15}$$

Уравнение (13) элементарно интегрируется за пределами небесного тела [2,9]:

$$\frac{\varpi(r)}{\Omega} = 1 - \frac{2GI}{c^2 r^3} \quad \text{при} \quad r \geq R. \tag{16}$$

В этом выражении $I = J/\Omega$ является релятивистским обобщением для медленно вращающейся системы ньютоновского понятия момента инерции (J - полный момент количества движения для небесного тела и гравитационного поля). Для вычисления релятивистского момента инерции, необходимо проинтегрировать уравнения Оппенгеймера-Волкова (3) совместно с (46), (13), а затем воспользоваться условиями непрерывности ϖ и $d\varpi/dr$ на поверхности небесного тела:

$$\frac{\varpi(R)}{\Omega} = 1 - \frac{2GI}{c^2 R^3}, \qquad \frac{d\varpi}{dR} = \frac{6GI\Omega}{c^2 R^4}. \tag{17}$$

При желании можно использовать интегральное представление [8,16]

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R j(r) r^4 \frac{\varpi(r)}{\Omega} \frac{\rho + c^{-2} P}{1 - 2Gm/rc^2} dr. \tag{18}$$

Для его вывода достаточно проинтегрировать обе части уравнения (13) и в полученное выражение подставить

$$\frac{dj}{dr} = -\frac{4\pi G r(\rho + c^{-2} P)}{c^2 - 2Gm/r}, \tag{19}$$

а также $d\varpi/dR$ из (17).

Можно обойтись без дифференциального уравнения второго порядка, каковым является (13). Для этого введем функцию $i(r)$, определяемую соотношением

$$i = \frac{c^2 \varpi' r^4}{2G(3\varpi + r\varpi')}, \tag{20}$$

где штрих над функцией означает операцию дифференцирования по r. Дифференцируя $i(r)$, имеем

$$\frac{di}{dr} = \frac{3c^2 \varpi r^3 (4\varpi' + r\varpi'')}{2G(3\varpi + r\varpi')^2}. \tag{21}$$

В свою очередь из (13) и (19) находим

$$4\varpi' + r\varpi'' = \frac{4\pi}{c^2} Gr(4\varpi + r\varpi') \frac{\rho + c^{-2}P}{1 - 2Gm/rc^2}, \tag{22}$$

и поэтому

$$\frac{di}{dr} = 6\pi r^4 a(1+a) \frac{\rho + c^{-2}P}{1 - 2Gm/rc^2}, \tag{23}$$

где

$$a = \frac{\varpi}{3\varpi + r\varpi'}. \tag{24}$$

Из определения (20) вытекает, что

$$1 - 3a = \frac{2Gi}{c^2 r^3}. \tag{25}$$

Подставив выражение для a в (23), придем к уравнению

$$\frac{di}{dr} = \frac{8}{3}\pi r^4 \left(1 - \frac{2Gi}{c^2 r^3}\right)\left(1 - \frac{Gi}{2c^2 r^3}\right) \frac{\rho + c^{-2}P}{1 - 2Gm/rc^2}. \tag{26}$$

Из него следует, что за пределами небесного тела $i(r)$ постоянно и, как видно из (17), (20), равно полному моменту инерции:

$$i(r) = I \quad \text{при} \quad r \geq R. \tag{27}$$

Согласно (14) в центре небесного тела

$$i(0) = 0. \tag{28}$$

Наконец, в случае слабого гравитационного поля (26) переходит в уравнение

$$\frac{di_N}{dr} = \frac{8}{3}\pi\rho r^4 \tag{29}$$

для накопленного момента инерции $i_N(r)$ ньютоновской теории. Аналогия с уравнениями (3б), (6), (7) для накопленной массы позволяет утверждать, что $i(r)$ является накопленным моментом инерции релятивистской теории.

Объединяя (26) с уравнениями Оппенгеймера-Волкова (3), получим систему трех релятивистских дифференциальных уравнений первого порядка, определяющих распределение давления, массы и момента инерции в объеме сферически-симметрического небесного тела. Как видим, (26) заменяет уравнения (4б), (13).

Уравнение (26) впервые без вывода было использовано одним из авторов (*Л.Ш.Г*) в [17] для вычисления моментов инерции белых карликов и нейтронных звезд.

3. *Релятивистские поправки к моменту инерции.* Отличие релятивистского уравнения (26) от уравнения (29) ньютоновской теории можно учесть введением множителя σ:

$$I = \sigma I_N, \qquad I_N = i_N(R). \tag{30}$$

Для модели из несжимаемой жидкости:

$$\rho = \text{const}, \tag{31}$$

релятивистский множитель σ был рассчитан Чандрасекаром и Миллером [6] путем численного интегрирования (4б), (13). В модели (31) уравнения (3), (29) интегрируются аналитически:

$$R = r_0\sqrt{1-\left(\frac{\rho c^2+P_0}{\rho c^2-3P_0}\right)^2}, \qquad M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3, \qquad I_N = \frac{2}{5}MR^2, \tag{32}$$

где $r_0^2 = 3c^2/8\pi G\rho$ (см., например, [14]). На рис. 1 представлены результаты расчетов [6]. Из них следует, что σ стремится (а) к ньютоновскому пределу 1 при $r_g/R \to 0$ $\left(P_0/\rho c^2 \to 0\right)$, и в то же время (б) к значению ≅2.00 в пределе $r_g/R \to 8/9$, когда $P_0/\rho c^2 \to \infty$. Заметим, что для сверхплотного звездного вещества отношение $P/\rho c^2$ не может превышать 1 [14], и поэтому соответствующие отрезки кривых (между вертикальными прямыми с $P_0/\rho c^2 = 1$ и ∞) представляют академический интерес. Более того,

$$\lim_{P\to\infty}\frac{P}{\rho c^2} = \frac{1}{3}, \tag{33}$$

согласно свойству асимптотической свободы кварков. В последнем случае из рис. 1 видно, что σ может достигать значения порядка 30%. На рис. 1 результаты Чандрасекара и Миллера дополнены отношением σ к

$$\sigma_0 = \frac{2}{1-0.5x+\sqrt{1-x+0.09x^2}}, \quad x = \frac{r_g}{R}, \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}. \tag{34}$$

Кривая σ/σ_0 свидетельствует о том, что $\sigma_0(x)$ описывает результаты расчетов $\sigma(x)$ с погрешностью 5% во всем диапазоне центральных давлений от $P_0 = 0$ до $P_0 = \infty$.

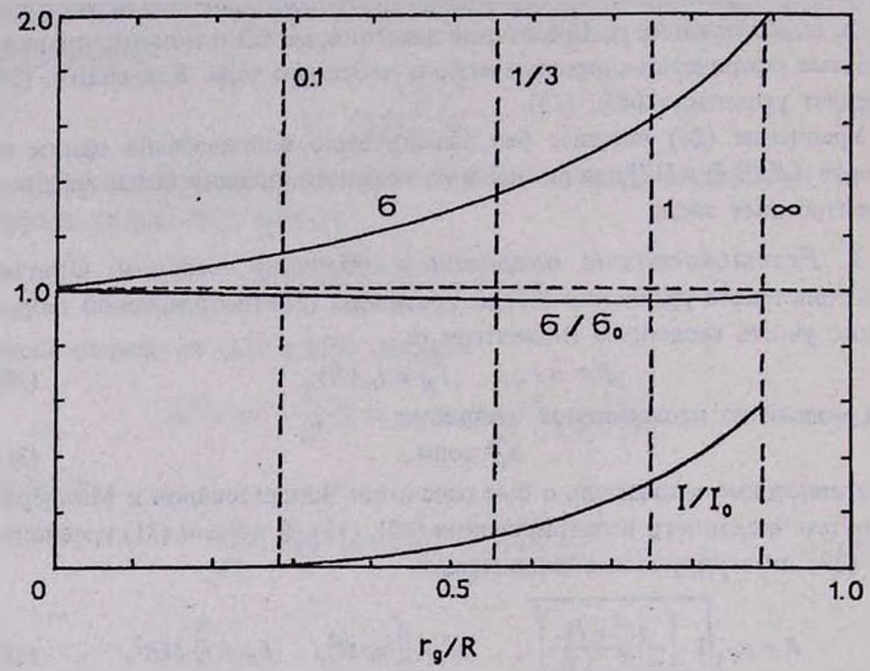

Рис. 1. Графики релятивистского момента инерции I, релятивистского множителя $\sigma = I/I_N$ и σ/σ_0 в зависимости от r_g/R для моделей сверхплотных звезд из несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$). Значения I и σ взяты из [6] (табл. 1), $I_0 = c^2\left(3c^2/8\pi G\rho\right)^{3/2}/2G$. Вертикальные прямые соответствуют $P_0/\rho c^2 = 0.1$, 1/3, 1 и ∞.

В работе Равенола и Петика [8] предложена формула

$$I \approx 0.21\frac{MR^2}{1-x} \tag{35}$$

для момента инерции сферически-симметрического небесного тела. Столь простая формула с погрешностью ~10% воспроизводит результаты численных расчетов для 11 вариантов уравнения состояния $\rho = \rho(P)$ звездного вещества и конфигураций с не очень малыми массами ($0.5\,M_\odot \lesssim M < 2\,M_\odot$ для одного из вариантов уравнения состояния). Как отмечается в [8], (35) не применимо для модели с $\rho = \text{const}$. В этом случае согласно (34)

$$I \approx \frac{0.8\,MR^2}{1-0.5x+\sqrt{1-x+0.09x^2}}. \qquad (36)$$

Перейдем к выводу $\sigma_0(x)$ методом, который был использован Равенолом и Петиком для обоснования (35).

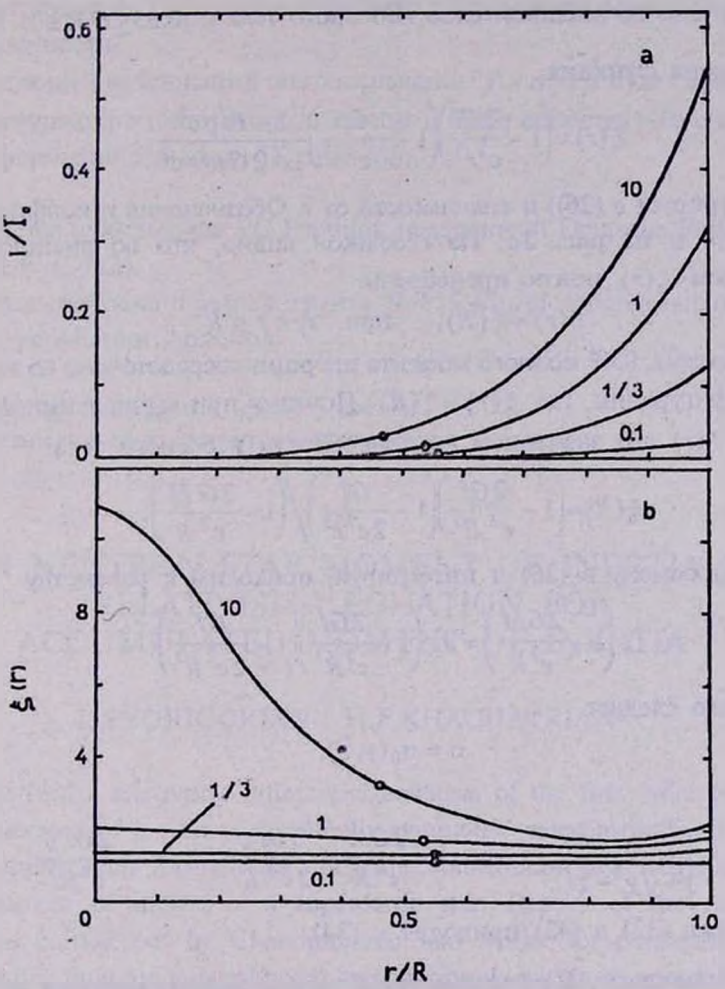

Рис. 2. Графики функций, входящих в релятивистское уравнение (26) и (38), в зависимости от радиальной координаты r, для моделей с $\rho = \text{const}$, R - радиус небесного тела, $I_0 = c^2\left(3c^2/8\pi G\rho\right)^{3/2}/2G$. Дальнейшие пояснения в тексте.

На рис. 2*а* приведены графики накопленного момента инерции $i(r)$ как функции радиальной координаты r для моделей из несжимаемой жидкости. Рядом с кривыми указаны значения центрального давления P_0 в единицах ρc^2. Кружочки на кривых указывают расположение сфе-

рической поверхности $r = r_1$, внутри которой накоплено 5% полного момента инерции:

$$i(r_1) = 0.05\,I. \tag{37}$$

Расположение кружочков согласуется с результатом ньютоновской теории: $r_1 = (0.05)^{1/5} R \approx 0.55R$, и указывает на то, что 95% момента инерции сосредоточено во внешнем слое небесного тела с $0.55 \le r/R \le 1$. На рис. 2*b* приведена функция

$$\xi(r) = \left(1 - \frac{2Gl}{c^2 r^3}\right)\left(1 - \frac{Gl}{2c^2 r^3}\right)\frac{1 + P/\rho c^2}{1 - 2Gm/rc^2} \tag{38}$$

(она фигурирует в (26)) в зависимости от r. Обозначения и конфигурации те же, что и на рис. 2*a*. Из графиков видно, что во внешнем слое изменением $\xi(r)$ можно пренебречь:

$$\xi(r) \approx \xi(R), \quad \text{при} \quad r_1 \le r \le R. \tag{39}$$

Таким образом, 95% полного момента инерции сосредоточено во внешнем слое конфигурации, где $\xi(r) \approx \xi(R)$. Поэтому при вычислении I можно заменить $\xi(r)$ его значением на поверхности небесного тела:

$$\xi(R) = \left(1 - \frac{2GI}{c^2 R^3}\right)\left(1 - \frac{GI}{2c^2 r^3}\right)\Big/\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right). \tag{40}$$

Производя замену в (26) и интегрируя, приходим к равенству

$$I\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) \approx I_N\left(1 - \frac{2GI}{c^2 R^3}\right)\left(1 - \frac{GI}{2c^2 R^3}\right), \tag{41}$$

из которого следует

$$\sigma \approx \sigma_0(y, z), \tag{42}$$

где

$$\sigma_0 = \frac{2}{y + \sqrt{y^2 - z^2}}, \qquad y = 1 - \frac{2GM}{c^2 R} + \frac{5GI_N}{2c^2 R^3}, \qquad z = \frac{2GI_N}{c^2 R^3}. \tag{43}$$

Подстановка (32) в (43) приводит к (34).

4. *Заключение.* В релятивистской теории момент инерции медленно вращающегося сферически-симметрического небесного тела определяется интегрированием уравнения (4б) совместно с дифференциальным уравнением второго порядка (13), где ϖ - угловая скорость вращения звездного вещества в локально-инерциальной системе отсчета (см., например, [2,3, 6-11,16,18]). В данной работе выведено релятивистское дифференциальное уравнение первого порядка (26) для накопленного момента инерции $i(r)$. Оно заменяет (4б), (13) и совместно с уравнениями Оппенгеймера-Волкова (3) позволяет определить распределение давления, массы и момента инерции в объеме сферически-симметрического небесного тела.

Для релятивистского множителя σ, определяемого соотношением $I = \sigma I_N$ (I_N - момент инерции, вычисленный с помощью уравнения (29) ньютоновской теории), выведена приближенная формула (42). В случае конфигураций из несжимаемой жидкости σ_0 принимает вид (34) и воспроизводит результаты численных расчетов Чандрасекара и Миллера [6] с погрешностью 5% во всем диапазоне центральных давлений от нуля до бесконечности.

В следующей публикации аппроксимация $I \approx \sigma_0 I_N$ будет применена для конфигураций с плотностью $\rho \neq \text{const}$ и будет сопоставлена с приближенной формулой Равенола-Петика (35).

В расчетах использован PC Pentium, подаренный Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG).

Работа выполнена в рамках гранта 96-855 Министерства образования и науки Республики Армения.

[1] Институт прикладных проблем физики
[2] Ереванский государственный университет, Армения

ON NEUTRON STAR MOMENT OF INERTIA I. RELATIVISTIC EQUATION FOR ACCUMULATED MOMENT OF INERTIA

L.Sh.GRIGORIAN[1], H.F.KHACHATRIAN[2]

It is derived a relativistic differential equation of the first order for accumulated moment of inertia of spherically-symmetric celestial body. It is proposed an approximate formula describing the contribution of relativistic effects to the moment of inertia of a superdense star. Results of the numerical calculations carried out by Chandrasekhar and Miller for configurations of incompressible fluid are approximated by our formula within an accuracy of 5% for all values of central pressures from 0 to ∞.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ж.Л.Тассуль*, Теория вращающихся звезд, Мир, М., 1982.
2. *J.B.Hartle*, Astrophys. J., **150**, 1005, 1967.
3. *J.B.Hartle, K.S.Thorne*, Astrophys. J., **153**, 807, 1968.

4. *J.B.Hartle*, Astrophys. J., **161**, 111, 1970.
5. *J.B.Hartle*, Astrophys. Space Sci., **24**, 385, 1973.
6. *S.Chandrasekhar, J.C.Miller*, Mon. Notic. Roy. Astr. Soc., **167**, 63, 1974.
7. *J.M.Thomas*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser., **79**, 189, 1989.
8. *D.G.Ravenhall, C.J.Pethick*, Astrophys. J., **424**, 846, 1994.
9. *Д.М.Седракян, Э.В.Чубарян*, Астрофизика, **4**, 239, 551, 1968.
10. *В.В.Папоян, Д.М.Седракян, Э.В.Чубарян*, Астрофизика, **5**, 97, 415, 1969.
11. *Г.Г.Арутюнян, Д.М.Седракян, Э.В.Чубарян*, Астрофизика, **7**, 467, 1971; Астрон. ж., **48**, 496, 1971.
12. *Г.Г.Арутюнян, В.В.Папоян, Г.С.Саакян, А.В.Саркисян*, Астрофизика, **33**, 69, 1990.
13. *J.B.Hartle, D.H.Sharp*, Astrophys. J., **147**, 317, 1966.
14. *Г.С.Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
15. *Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер*, Гравитация, Мир, М., 1977.
16. *W.D.Arnett, R.L.Bowers*, Astrophys. J. Suppl. Ser., **33**, 415, 1977.
17. *L.Sh. Grigorian, G.S.Sahakian*, Astrophys. Space Sci., **95**, 305, 1983.
18. *G.Bao, E.Ostgaard*, Inter. J. Mod. Phys. D, **3**, 813, 1994.
19. *Г.С.Саакян*, Физика нейтронных звезд, Изд. ОИЯИ, Дубна, 1995.