АСТРОФИЗИКА

ТОМ 39 АВГУСТ, 1996 ВЫПУСК 3

УДК: 52-425

ОБ ЭЛЕКТРИЗАЦИИ, ВЫЗВАННОЙ ТЯГОТЕНИЕМ МАССИВНОГО ТЕЛА

Д.А.КИРЖНИЦ, А.А.ШАЦКИЙ

Поступила 6 марта 1996
Принята к печати 11 марта 1996

Определена величина избыточного заряда в сердцевине тяжелого тела (и избыточного заряда противоположного знака на его поверхности), появившегося в результате воздействия сил тяготения.

До последнего времени продолжает привлекать к себе внимание старая проблема связи вращательных и магнитных характеристик небесных тел. Одним из аспектов этой проблемы служит вопрос о нарушении квазинейтральности вещества тела (нейтральности в среднем по масштабам, превышающим параметр решетки или радиус Дебая) под действием сил тяготения тела. Они не только уплотняют вещество тела, но и создают избыток положительного заряда в центре, а отрицательного - на периферии тела, сильнее действуя на тяжелые ядра, чем на легкие электроны. Возникающее при этом электрическое поле и служит тем действующим началом, которое сжимает электронную компоненту вещества тяготеющего тела.

Вращаясь вокруг своей оси, такое тело, благодаря перераспределению его заряда, должно приобрести магнитный момент. До последнего времени делаются попытки объяснить, с помощью обсуждаемого механизма, магнитные свойства небесных тел. Цель данной заметки состоит в доказательстве безнадежности таких попыток из-за крайней малости самого эффекта перераспределения заряда, отвечающей параметру

$$\alpha = \frac{Gm_p^2}{e^2} \simeq 10^{-36}, \qquad (1)$$

где G - постоянная Ньютона, m_p и e - масса и заряд протона.

1. Начнем с элементарных оценок, непосредственно относящихся к твердому (кристаллическому) состоянию вещества. Перераспределение заряда при этом сводится просто к смещению ядра относительно центра ячейки Вигнера-Зейтца и к появлению дипольного момента и поляризации [1]. Очевидно, что обе силы - электрическая и гравитационная, действующие на смещенное ядро, должны взаимно уравновешиваться. Отсюда

$$Ze\,\mathbf{E} = -GM^2\,\nabla\!\int \mathrm{d}x'\,n_p(x')/|x-x'|, \tag{2}$$

где Ze и M - заряд и масса ядра, $\mathbf{E}$ - напряженность поля, n_p - концентрация ядер. С учетом уравнения $\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\delta\rho$, где $\delta\rho$ - избыточный заряд, находим

$$\delta\rho = \left(\frac{A}{Z}\right)^2 \alpha\rho_p \sim \alpha\rho_p. \tag{3}$$

Здесь A - массовое число, ρ_p - плотность заряда ядер.

В пользу оценки (3) говорят уже простые размерные соображения. Безразмерное отношение $\delta\rho/\rho_p$ должно быть пропорционально величине G (или, точнее, величине α), что следует из применения теории возмущений по гравитационному взаимодействию. Соответствующий коэффициент пропорциональности может зависеть от безразмерных параметров вещества - z, отношения масс электрона и протона, отношения кулоновской энергии, приходящейся на частицу, к наибольшей из величин E_F и T (E_F - энергия Ферми). Можно убедиться, что для астрономических объектов перечисленные параметры отличаются от единицы не более, чем на два, максимум на три порядка. Поэтому они не могут качественно сказаться на оценке (3), основу которой составляет линейная зависимость $\delta\rho/\rho_p$ от G.

Отрицательный заряд, компенсирующий (3) и локализованнный на поверхности тела, равен

$$Q = -\int \mathrm{d}x\delta\rho \sim \alpha Q_p, \tag{3'}$$

где Q_p - полный заряд ядер тела. Поляризация $P = Zen_p\,\delta$ (δ - смещение ядра) равна, очевидно, $-\mathbf{E}/4\pi$, т.к. индукция $\mathbf{D}$ из-за отсутствия внешних зарядов равна нулю. Наконец, элементарный расчет с использованием формулы (3) дает отношение магнитного момента тела к его механическому моменту

$$\sim -\alpha\frac{e}{m_p c}. \tag{4}$$

Из-за малости параметра α (см. (1)) перечисленные здесь величины исключительно малы и рассматриваемый эффект перераспределения заряда не может иметь прямых наблюдательных проявлений.

Достаточно сказать, что для Земли (масса 10^{27} г., радиус $\sim 10^9$ см) величина поверхностного заряда (3') отвечает одному электрону на 1 м^2 поверхности.

2. Более строгий вывод соотношения (2) для твердого состояния вещества основывается на выделении из полной энергии системы части, зависящей от смещений ядер δ_k (k - номер ядра), и минимизации этой части по δ_k с последующей заменой $\delta_k \to p_k/(Zen_p)$. При этом суммы по решетке можно заменить интегралами:

$$\sum_k \to \int \mathrm{d}x\, n_p, \qquad p_k \to p(x).$$

Начнем с гравитационной энергии взаимодействия ядер с ядрами

$$\mathrm{E}_{gr} = -\frac{GM^2}{2}\sum_{k,k'}\left|x_k - x_{k'}\right|^{-1}.$$

Делая замену $x_k \to x_k + \delta_k$ и разлагая по δ до первого порядка включительно, находим

$$\mathrm{E}_{gr} = -\frac{GM^2}{Ze}\int \mathrm{d}x p(x)\, \nabla\int\frac{\mathrm{d}x'\, n_p(x')}{|x-x'|}. \qquad (5)$$

Кулоновская энергия взаимодействия ядер и электронов имеет вид

$$\mathrm{E}_C = \frac{Ze^2}{2}\sum_{k,k'}{}'\left|x_k - x_{k'}\right|^{-1} - Ze^2\int \mathrm{d}x\, n(x)\sum_k\left|x_k - x\right|^{-1} +$$

$$+\frac{e^2}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}x'\, n(x)\, n(x')\cdot|x-x'|^{-1},$$

где $n \approx Zn_p$ - концентрация электронов. При повторении тех же выкладок, которые привели к (5), нужно иметь в виду два обстоятельства. Во-первых, разлагать по δ (или p) теперь нужно до второго порядка включительно (величина α мала, см. (1)). Во-вторых, разложение по δ невозможно в случае взаимодействия с электронами той же ячейки из-за необходимости учета вклада области $r < \delta$ и этот случай нужно рассматривать точно. Ему отвечает второй член в Ec, в котором нужно выделить интеграл по объему ячейки

$$-Ze^2\int \mathrm{d}x\, n(x)|x-\delta|^{-1},$$

умноженный на число ядер. Это дает для зависящей от P части

$$\mathrm{E}_C^{(1)} = \frac{2\pi}{3}\int \mathrm{d}x\, P^2.$$

В оставшейся части Ec после разложения по δ возникает обычный член диполь - дипольного взаимодействия, к которому сводится взаимодействие разных ячеек

$$E_C^{(2)} = \frac{1}{2}\int dxdx'\left(P(x)P(x')\cdot|x-x'|^{-3} - 3\frac{(P(x),(x-x'))(P(x'),(x-x'))}{|x-x'|^5}\right)$$

(линейные по P члены Ес исчезают из-за нейтральности системы).

Выражение $E_C^{(2)}$ можно представить в виде (см. *Приложение*)

$$E_C^{(2)} = -\frac{2\pi}{3}\int dx\left[P^2(x) - 3(P(x),\nabla)\frac{\operatorname{div}P(x)}{\Delta}\right]$$

Поэтому сумма $E_C^{(1)}$ и $E_C^{(2)}$ имеет вид

$$E_C = 2\pi\int dx\, P_l^2, \tag{6}$$

где $P_l = \frac{\nabla\operatorname{div}}{\Delta}P$ - продольная часть вектора P (она же фактически входит в (5)). Минимизация суммы (5) и (6) по P_l возвращает нас, с учетом равенства $\mathbf{E} = -4\pi P$, к соотношению (2).

Подчеркнем, что в это последнее соотношение не входит поправка на отличие действующего поля от среднего [1]. Такая поправка возникла бы, если бы мы поместили рассматриваемое ядро, для которого пишется баланс сил (2), в пустую полость. На самом же деле имеется взаимодействие ядра с электронами своей ячейки (полости). Оно описывается величиной $E_C^{(1)}$ и ему отвечает нужный вклад в напряженность $-4\pi P/3$, поскольку $\frac{\delta E}{\delta P} = -E$.

Для завершения доказательства соотношения (2) нужно еще убедиться в том, что не рассмотренные выше части энергии системы (точнее говоря, их зависящие от P части) не сказываются на результате. Сюда относятся прежде всего электронные компоненты энергии - кинетическая, обменная, корреляционная [2].

В случае сильно сжатого вещества - а именно он наиболее интересен для тяжелых небесных тел с веществом в твердом состоянии - доминирующую роль играет кинетическая энергия свободного электронного газа (остальные перечисленные компоненты энергии малы сравнительно даже с учтенной выше кулоновской энергией).

Разложение этой энергии по смещениям ядра относительно центра ячейки

$$\delta E_{kin} \propto \int dx\, n\,\delta U, \qquad \delta U = Ze^2(1/r - 1/|r+\delta|)$$

ведет к нулевому результату из-за сферической симметрии n и известного разложения кулоновского члена в виде ряда по полиномам Лежандра. Что же касается энергии ядер, то в твердом состоянии при низких температурах нужно рассмотреть лишь нулевую энергию колебаний ядер, которая составляет $\frac{3}{2}\hbar\omega_0$ на одно ядро (ω_0 - частота колебаний). Поэтому сказаться на приведенном выше доказательстве могла бы лишь заметно зависящая от сдвига δ или поляризации P часть ω_0. Но в условиях исключительной малости величины δ (по порядку величины, как можно видеть из результатов раздела 1, $\delta \sim \alpha R$, где R - радиус тела) смещение центра колебаний ядра в модели ячеек вообще никак не сказывается на частоте колебаний: изменение энергии при смещении ядра на величину δ_r равно $z^2 e^2 \delta_r^2 / 2 R^3$ (где R - радиус ячейки) и при замене $\delta_r \to \delta_r + \delta$ (смещение центра колебаний) квадрат частоты, как вторая производная энергии по δ_r, вообще не меняется.

3. Формула (3) в действительности имеет универсальный характер и справедлива независимо от того, в каком состоянии находится вещество. Будем использовать метод функционала плотности [3], записывая свободную энергию (в общем случае температура T отлична от нуля) системы в виде функционала концентраций электронов n и ядер n_p.

$$F\{n, n_p\} = F_0 + E_{sc} + F_{xc} - \mu \int \mathrm{d}x\, n - \mu_p \int \mathrm{d}x\, n_p, \tag{7}$$

где первый член отвечает свободным электронному и ядерному газам, второй - кулоновской и гравитационной энергиям их взаимодействия в приближении самосогласованного поля, третий - соответствующим обменным и корреляционным эффектам. Последние два члена отвечают множителям Лагранжа и отражают сохранение полных чисел электронов и ядер. Минимум F по n и n_p определяет равновесные распределения этих величин. Записывая

$$E_{sc} = -\frac{GM^2}{2} \int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}x'}{|x - x'|} n_p n'_p + \frac{e^2}{2} \int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}x'}{|x - x'|} (n - zn_p)(n' - zn'_p),$$

получим условия минимума (7) по n и n_p.

$$\begin{cases} \Delta \dfrac{\delta(F_0 + F_{xc})}{\delta n(x)} = 4\pi e^2 (n - zn_p) \\ \Delta \dfrac{\delta(F_0 + F_{xc})}{\delta n_p(x)} = -4\pi z e^2 (n - zn_p) - 4\pi G M^2 n_p. \end{cases} \tag{7'}$$

Если бы можно было опустить левую часть 2-го уравнения (7'), то с учетом $\delta\rho = e(zn_p - n)$, $\rho_p = zen_p$ мы получили бы из этого уравнения доказываемое нами соотношение (3), а 1-ое уравнение (7'), при подстановке в него 2-го и при соответствующих упрощениях совпадает с уравнениями Чандрасекара, определяющим равновесное распределение электронов и ядер. Отметим, что левая часть этого уравнения определяется наиболее легкими частицами-электронами, а правая - содержит после указанной подстановки лишь гравитационные величины, хотя гравитация прямо на электроны практически и не действует. Действует же на них электрическое поле, исследуемое в этой заметке, которое лишь количественно, в силу (3), совпадает с гравитационным.

Итак, уравнения (7') переписываем в виде

$$\delta\rho = \alpha\rho_p(1+\sigma)^{-1}; \quad \sigma = \frac{\Delta\delta F/\delta n_p}{z\,\Delta\delta F/\delta n}, \tag{8}$$

где под F здесь и ниже понимается сумма $F_0 + F_{xc}$.

Появление величины σ либо не меняет порядка величины $\delta\rho/\rho_p$, либо уменьшает это отношение. Единственный случай, когда оно может значительно вырасти, отвечает исключительной близости величины σ к -1. Такую возможность нельзя не считать практически невероятной. Более того, можно думать, что σ мало сравнительно с единицей. Проиллюстрируем эту малость на двух примерах [2]. Для них обоих принимается, что электронный газ вырожден и сильно сжат, так что соответствующий вклад в F составляет $\sim \frac{\hbar^2}{m}\int \mathrm{d}x\, n^{5/3}$. В первом примере ядра локализованы в узлах решетки и энергия их нулевых колебаний отвечает F порядка $\hbar\frac{Ze}{\sqrt{MR^3}} \vee n_p \sim \frac{Ze\hbar}{\sqrt{M}}\int \mathrm{d}x\, n_p^{3/2}$ (см. выше). Тогда для величины σ в (8) находим:

$$\sqrt{\frac{m}{M}}Z(a_0 n^{1/3})^{-1/2} \ll 1,$$

где m - масса электрона, $a_0 = \hbar^2/me^2$ - его боровский радиус. Эта малость связана с неравенствами $\frac{m}{M} \ll 1$ и $a_0 n^{1/3} \gg 1$ в сжатом веществе. Второй пример отвечает больцмановской слабо неидеальной ядерной подсистеме, для которой зависящая от n_p часть $F \sim -e^3\int \mathrm{d}x \frac{n_p^{3/2}}{\sqrt{T}}$ - корреляционная поправка Дебая-Хюккеля. Отсюда для величины σ находим $e\sqrt{\frac{n^{1/3}}{T}}\Big/(\sqrt{Z}\,a_0 n^{1/3}) \ll 1$, поскольку условие слабой неидеальности: $T \gg e^2 n^{1/3}$.

4. В заключение возвратимся к вопросу о минимуме функционала (7) в связи с нарушением локальной электронейтральности системы.

Отметим сразу же, что такое нарушение очевидным образом присуще уже кристаллическому состоянию вещества в отсутствие сил тяготения, что электроны размазаны, а ядра локализованы в точке.

Существенно, что такое нарушение не описывается минимумом функционала F как точки в функциональном пространстве, где его функциональная производная исчезает. В данном случае мы имеем дело с краевым минимумом, достигаемым, когда параметр, определяющий длину локализации ядра, стремится к своему предельному значению, равному нулю.

В самом деле, рассмотрим второе, чисто кулоновское слагаемое величины E_{sc}, которое разобьем на нейтральные в целом сферические ячейки Вигнера-Зейтца с ядром в центре, причем радиус ячейки равен R, а ядро размазано по сфере с радиусом ρ. Такой модели отвечает энергия

$$E_{sc} = -\frac{3}{10}\cdot\frac{Z^2e^2}{R}\cdot\frac{2x^3+4x^2+6x+3}{(x^2+x+1)^2},$$

где $x = \frac{\rho}{R}$. При $x=0$ это выражение даст известную энергию связи решетки $-\frac{9Z^2e^2}{10R}$. Легко видеть, что наибольшее по абсолютной величине значение E_{sc} действительно достигается на границе физически допустимой области, т.е. при фиксированном R, при $x=0$.

Приложение

Исходное выражение для $E_C^{(2)}$ запишем в виде

$$E_C^{(2)} = \int dx\, P_i(x)\, K_{ij}(k)\, P_j(x),$$

где $k = -i\nabla$, градиент действует на p_j, а

$$K_{ij} = \frac{1}{2}\int\frac{d\xi}{\xi^3}\left(\delta_{ij} - 3\frac{\xi_i\xi_j}{\xi^2}\right)e^{-ik\xi}.$$

Этот интеграл удовлетворяет очевидному условию $K_{ii}=0$ и поэтому может быть представлен в виде

$$K_{ij} = -\frac{1}{2K^2}k_lK_{lm}k_m\left(\delta_{ij} - \frac{3k_ik_j}{k^2}\right).$$

Несложное, но громоздкое вычисление дает приведенное в тексте выражение для $E_C^{(2)}$.

В заключение мы хотели бы отметить критические дискуссии изложенных выше вопросов с Б.В.Васильевым, В.И.Григорьевым и В.И.Максимовым.

Физический институт Лебедева РАН,
Физический факультет МГУ

PHENOMEN OF ELECTRIZATION CAUSED BY GRAVITATION OF MASSIVE BODY

D.A.KIRZHNITS, A.A.SHATSKY

The value of excess charge in the kernel of massive body (and the opposite in sign excess charge at the surface) caused by the influence of gravitational forces is determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И.Е.Тамм*. Курс теории электричества. Наука,М., 1989.
2. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц*. Статистическая физика, ч.1, Наука, М., 1995.
3. *С.Лундквист, М.Марч*, (ред). Теория неоднородного электронного газа. Мир, М, 1987.